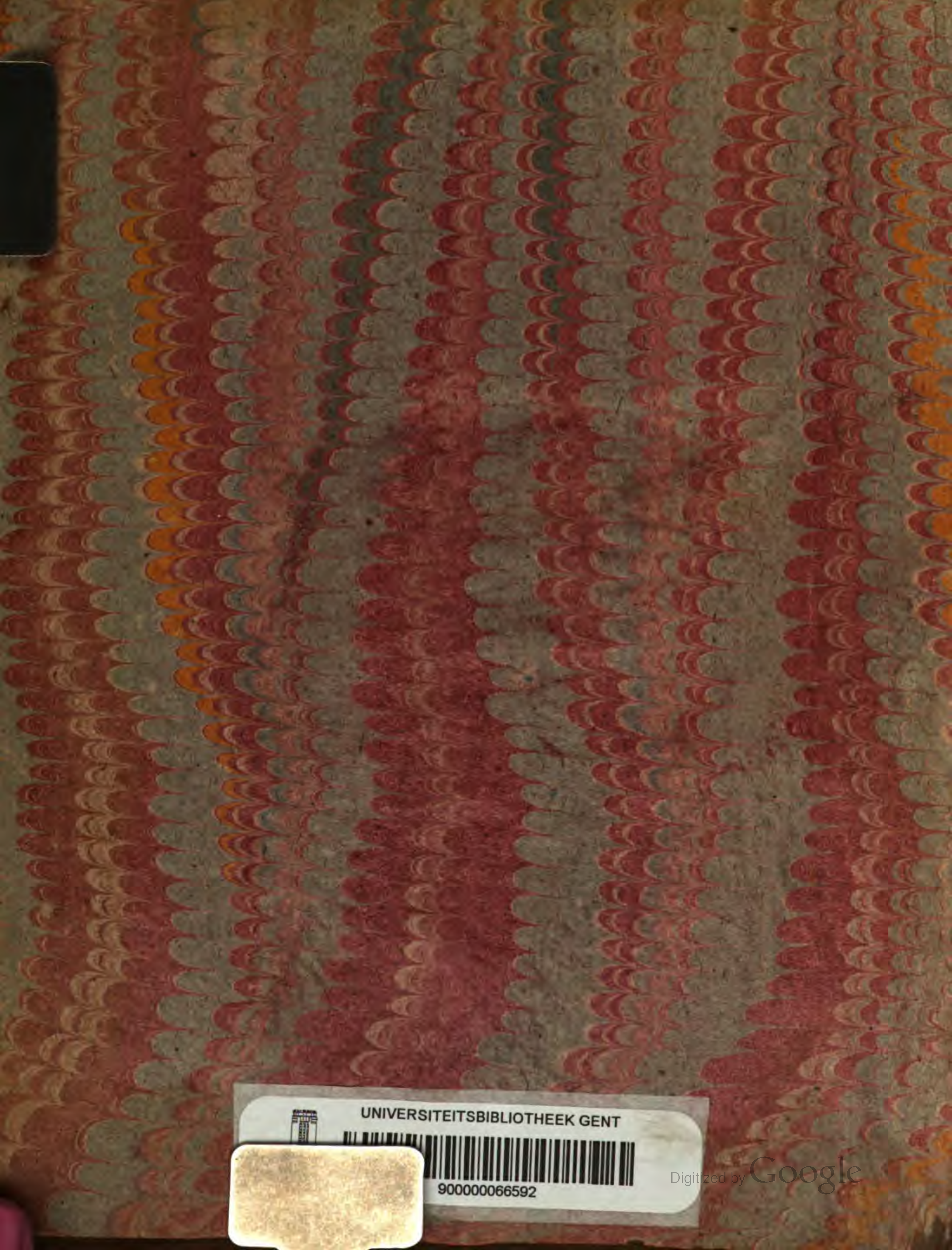







UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT
900000066592
Digitized by Google



JACOBI
BERNOULLI,
BASILEENSIS,
OPERA.

Tomus Primus.



GENEVÆ,
Sumptibus Hæredum CRAMER
& Fratrum PHILIBERT.

M. DCC. XLIV.



JACOBI BERNOULLI,

BASILEENSIS,

OPERA.

Tomus Primus.



GENEVÆ,
Sumptibus Hæredum CRAMER
& Fratrum PHILIBERT.

M. DCC. XLIV.





VIRO EXCELLENTISSIMO, CELEBERRIMO, NICOLAO BERNOULLI,

J. U. DOCT. ET PROFESSORI,

Academiæ Basileensis h. t. Rectori Magnifico,

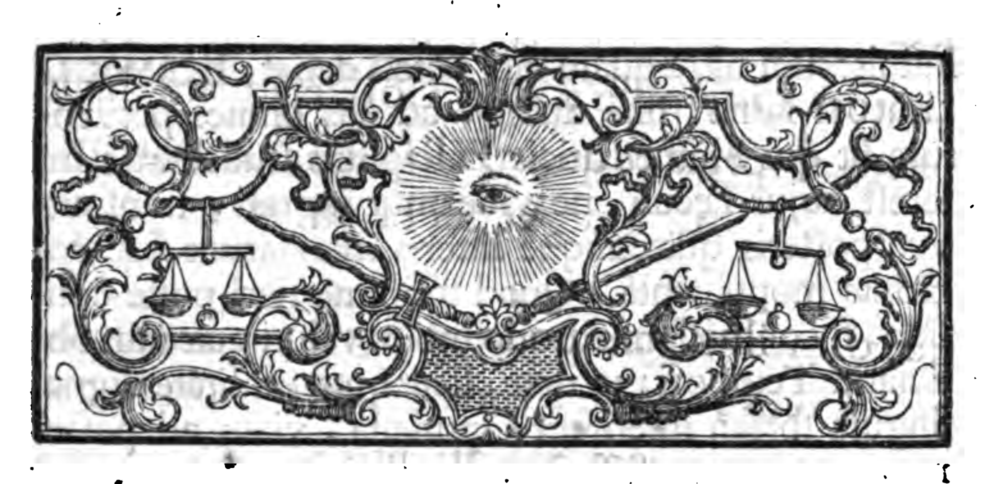
S. P. D. G. C. G.



OVAM, quam curavi, Operum Patrui Tui editionem cui dedicarem non erat, Vir Doctissime, quod ambigerem. Hæc tot nominibus Te nuncupat Patronum, ut clientelam istam, ne si velim quidem, possim ad alium traducere. Nam ut mittam, quæ diu inter nos intercessit, quamque spero fore perpetuam, amicitiam; cui potius consecrarem ingenii *Bernoulliani* monumenta, quam Tibi, non nominis tantum

heredi, sed doctrinæ; simillimoque Præceptori Discipulo; cui Collectionem hanc offerrem prius, quam Illi, cujus diligentia & benignitate integra facta est & amplior; cui denique notas, quibus, ut potui, loca quædam illustrare conatus sum, melius commendarem, quam Viro, cujus hortatione & exemplo viam monstrante inductus sum, ut id operis susciperem. Tu igitur quicquid id est, sive munusculum, sive, ut ego censeo, quod optimam certe partem jam Tuum, nunc, veluti quodam alluvionis jure, accrescit Tibi totum, accipe & amare me pergito. Sic Te Deus sospitet, nobisque ut diutissime vivas & felicissime concedat. Vale. Genevæ. Cal. Octob. 1743.

LECTORI



LECTORI

S.

VETUSTORUM Auctorum Scripta, quibus Artes & Scientias suo tempore excultas tradere nobis adnitebantur, dum vel legimus servata, vel perdita desideramus; nequit fieri, quin illorum socordiam indignemur quorum barbarie vel incuria perierunt; horum contra laudemus industriam qui his colligendis conservandisque utilem operam dederunt. Si quos autem ab interitu salvos præstare tenemur Auctores, ii certe sunt, quos novis Artibus condendis aut insigniter promovendis gloriam adsecutos cernimus. Quamobrem cum Illustrium Virorum, quibus universa Mathesis, Calculus inprimis

infinitorum ultra quam dici potest debet, BERNOULLIORUM fama, sine dubio, ad eos omnes perventura sit qui Mathematicis Disciplinis studebunt; interest hujus sæculi, ne videamur ingrati, transmittere posteris quæcunque litteris mandarunt suæ doctrinæ monumenta. Quod tutissime fieri posse confido, si conjunctim edendo moles veluti quædam objiciatur Tempori; ut quæ, licet immortalitate digna, singula forsan interirent Opuscula, viam ad posteros, agmine quasi facto, sibi faciant. Igitur, post editos præstantissimi JOHANNIS BERNOULLI labores, Opera Fratris ejus JACOBI, Mathematici pariter celeberrimi, ante aliquot annos defuncti, in manus tibi trado, Lector Candide. Laborem utilitatis Tuæ gratia susceptum si probes, finem adsecutus sum quem mihi proposui: Sin minus, Tui saltem juvandi voluntas errorum mihi veniam impetrabit.

Quid hic præstiterim vides. BERNOULLII Opuscula, vulgata prius sed dispersa, collegi; ne omissis quidem iis, quæ juvenis in usum Studiosorum conscripsit, ut Professorium munus, vel adipisceretur, vel expleret. Quanquam enim non sint cum illis omnino comparanda quæ maturior vulgavit, illorum tamen lectio fructu non destituitur. Amœnum enim est videre a quibus initiis ad illum doctrinæ apicem evectum sit hominis ingenium: utile, cognoscere exemplo quid possint labor & studium.

Quod

Quod autem inter cæteros non compareat elegantissimus de *Arte conjectandi* Tractatus, causa est, quod is sit separatim editus, multorum manibus tritus, & facile parabilis. Hunc igitur, nisi intelligam aliter Tibi videri, prælo rursus committendum non existimavi. Sed, quæ Nostro dederunt occasionem scribendi, aliena Schediasmata nonnulla intermiscui; ut nusquam quid sit id de quo agitur ambigas.

Tractatus singulos unde eruerim in margine adnotavi. Nunc vero primum lucem aspiciunt publicam Auctoris *Posthuma varia*; quorum, post mortem, edendorum Nostro consilium fuisse testatur Titulus ipsius manu conscriptus, una cum tribus Articulis prioribus. Sequentes ad decimum tertium usque, dictante BERNOULLIO, descripserat Celeb. JACOBUS HERMANNUS. Reliquos viginti, ex Patrui Schedis excerptos, mecum humanissime communicavit Excellentissimus NICOLAUS BERNOULLI, Auctoris e Fratre NICOLAO Nepos, & doctissimis, quas simul editas habes, notis exornavit.

Quas cum mitteret Vir amicissimus, me per litteras magnopere hortabatur, ut & ipse non ad priores modo Posthumorum Articulos, sed ad omnia omnino Opuscula e quibus ista Collectio conficitur, meas quoque notas adjungerem. Ego, quamvis huic oneri imparem me, tot præsertim negotiis distractum, facile agnoscerem, & sera aliquantulum veniret hor-

tatio,

tatio, impressis jam plusquam trecentis paginis, nolui tamen omittere quicquam eorum quæ, tanti Viri judicio, Tyronibus faciliorem Auctoris nostri lectionem efficere possent. Horum itaque in gratiam, Tyronibus enim unice scripsisse me profiteor, non iis qui edita tenent loca Matheseos; Horum, inquam, in gratiam, conatus sum primum ea quæ, propter brevitatem aut alias ob causas, erant intellectu difficiliora paucis explanare; deinde, quæ sine probatione afferebantur demonstrare: tum paulatim, Lectori familiarior factus, Methodis particularibus generaliores, ubi poscere videbatur argumenti dignitas, substituere tentavi: denique, quod synthetice adstruebatur, analytice nonnunquam investigare periclitatus sum. Quo successu, tuum, Lector Benevole, judicium esto. Parce autem ac sobrie, hac libertate, quæ mihi prope licentia videbatur, usus sum, ne Textum Commentarius opprimeret. Vereor tamen ut multis displiceat labor iste meus, querentibus Auctori fuisse admistum aliquid tam dispar sui atque dissimile: Ac sane justissimam esse reprehensionem non diffiterer, nisi, quæ in hisce notis congessi, pleraque summis, quos toties laudo, Mathematicis deberentur. Utcunque erit, juvabit saltem me illorum voluntati paruisse, quorum amicitia nihil habeo antiquius, & eorum utilitati consuluisse, quorum commodo nihil est mihi carius. Vale.

VITA

VITA
CELEBERR. MATHEMATICI
JACOBI BERNOULLII
In Acad. Basil. Mathem. Profess. Meritiss.

ORATIONE PARENTALI

EXPOSITA

DIE XXIII NOVEMB. A. CIƆ IƆ CCV.

A

J. JACOBO BATTIERIO
J. U. D. ELOQ. PROFESS. P.

Edita primum

BASILEÆ,

CIƆ IƆ CCV.



J. JACOBUS BATTIERIUS,

J. U. D.

Eloq. Professor Publ.

LECTORIBUS S. D.

SI morientibus etiam, quæ sunt TACITI verba, cura est decori exitus, semperque viri graves & honesti, & qui illis morientibus ministrant, id sibi cavendum existimarunt, ne quid, vel in vultu, vel in cetera corporis conformatione, indecorum etiam a morte conspici posset, ipsique adeo illi, qui violenta morte sibi pereundum videbant, id agere sunt soliti, ut honeste caderent: non est profecto du-

bitandum, majorem longe honestæ ad posteritatem memoriæ propagandæ, quam illarum corporis sui exuviarum ad intempestivum decorem qualitercunque componendarum, curam atque studium morientium animis insidere, illisque volentibus fieri, si, quæ DEUS in hac vita præ aliis beneficia in eos contulit, quæque per illos præclara corporis animique viribus geri voluit, ad posteritatis notitiam transmittantur. Præterquam enim quod hæc cogitatio justiorem illis & minus tristem mortis conditionem facit, quando vident, non item ut corporis vitam, sic memoriam quoque sui fato interituram; tum vero posteritatis, cujus eos curam aliquam gerere merito est credendum, non parum interest, illam proposito clarorum Virorum exemplo ad virtutis & eruditionis æmulationem excitari. Ceterum uti hæc erga defunctos pietatis testificatio ipsa in se admodum est laudanda; ita certe reprehendendum est perversum illorum institutum, qui tum demum suo se officio rite defunctos putant, cum in exponendis demortuorum virtutibus & dissimulandis vitiis nihil mediocriter dixerint aut fecerint. Quæ res non potest non diversum habere exitum, quam quem illi in dicendo sibi proposuerant. Ea enim ratione id accidit, ut qui ascititium illum Oratoris fucum atque imposturam animadvertunt Auditores, omnem illius narrationi fidem abrogent, & cum non levi existimationis defuncti dispendio ne veras quidem

dem ejus laudes ſibi perſuaderi patiantur. Qua in re paria fere iſti cum Veterum ſtultitia facere videntur, qui, magno quodam viro id notante, amicorum defunctorum urnis cippos & columnas marmoreas cum imponerent, optabant tamen iiſdem terram levem, votis ſuis plane contraria facientes: Ita hi, dum famæ defunctorum volunt conſulere, nimia illa & modum excedente laudatione totam evertunt. De ALEXANDRO M. illud eſt memoriæ proditum, quod cum ei in Hydaſpe amne naviganti Poëta quidam carmen obtuliſſet, in quo ille Regem turres dejicientem monteſque perfodientem introduxerat, cum indignatione a ſe illum repulerit; Apage, dicens, iſthæc mendacia, quæ illa etiam, quæ vere a me geſta ſunt, in falſitatis poſſunt ſuſpicionem adducere. Ego vero, qui Clariſſimi viri, JACOBI BERNOULLII, *principis horum temporum Mathematici, & in Academia noſtra Profeſſoris celeberrimi, quem menſis Auguſti dies* XVI *nobis triſti atque præcoce fato ſubduxit, vitæ mortiſque hiſtoriam oratione parentali explicare conſtitui, quanquam in exponendis ejus laudibus, quas ſibi ſummas mathematicarum rerum ſcientia apud omnes comparavit, non habeo neceſſe vereri, ne quid ſupra illius meritum dicam; reputavi tamen apud animum meum, conſultius me facturum, ſi, quæ res fidei plus & invidiæ minus habitura videbatur, tenui ſed ingenua Oratione præcipua duntaxat vitæ & ſtudiorum illius*

lius capita delibarem potius, quam amplificandis ejus virtutibus, aut falsis ei astruendis, fidem in Auditorum animis consumerem. Ei Orationi publice recitandæ statutus est a me dies XXIII *hujus mensis Novembris. Vos ergo, qui defuncti memoriam honoratis (honorabitis autem, si omnino suus apud vos literis honos constat) dicto die, hora* X *matutina, in Auditorium JCtorum frequentes confluite, & me incomta oratione, qualem lugubrem esse convenit, justa conjunctissimo Collegæ facientem benigne audite. Dabitur a me vicissim opera, ne quod amoris, honoris, & observantiæ officium ullo unquam tempore frustra a me expectetis. Valete.*

Rectore Academiæ Magnifico

D. SAMUELE WERENFELSIO, S. Th. D.

Vet. Test. Prof. celeberr.

Decano Facultatis Artium Spectabili

D. EMANUELE KÖNIG, Med. D.

Physicæ Profess. meritiss.

VITA



VITA
JACOBI BERNOULLII
MATHEM. CELEBERR.

SI qui sunt ex vobis, AUDITORES, qui temere hoc a me factum existimant, quod ego potissimum, homo mathematicarum rerum scientia minime omnium initiatus, & plane ἀγεωμέτρητος, hanc mihi præstantissimi nostrorum temporum Mathematici publica oratione laudandi provinciam sumserim; hi, quod pace illorum dixerim, parum ex condigno hujus Viri virtutes æstimare, ejusque eruditionem angustis admodum finibus circumscribere videntur. Ut enim negari profecto non potest, mathematicæ eruditionis laudem præ aliis omnibus in eo emicuisse, eaque illum præcipue inter eruditos se censeri voluisse; ita vicissim nemo est qui non intelligat, præter hanc principem & præcipuam facultatem, aliarum quoque laudandarum artium segetem quasi quandam in eo effloruisse, quæ si priori illi dignitate exæquari non debent, insigne tamen de-

cus,

cus, &, ut ita loquar, colorem illi conciliarunt. Eam intelligo virtutem, qua & adversarios disputando convincere, & quæ subtiliter atque ingeniose ab ipso excogitata erant, eleganter, perspicue, ac copiose disserere sciebat. Quarum rerum intelligentia cum ad plures pertineat, & a me quoque, per id tempus quo ego illo conjunctissimo Collega sum usus, sæpius in eo cum admiratione fuerint animadversæ, videor meo quodam jure in laudanda præstantissimi Viri memoria partem mihi posse vindicare. Quod si vero ad dicendum parem ejus doctrinæ facultatem orationis non attulero, illud erit vobis cogitandum, nec alium facile quenquam potuisse reperiri, qui tam eximias laudes verbis exæquare potuisset. Quare permittite, *Auditores*, ut hoc officio, quod & defuncti voluntas non obscure mihi paulo ante obitum destinavit, & ea, quæ non interrupta mihi semper cum eo intercessit, amicitia quasi pro imperio injungit, qualicunque, fideli certe ac ingenua, vitæ & studiorum ipsius enarratione defungar, & literati Orbis desiderio, qui ut hunc Virum ex egregiis ingenii monumentis jam diu nosse & admirari cœpit, etiam præcipua vitæ illius momenta, quibusque ille adminiculis usus ad tam eximiam eruditionem pervenerit, sibi explicari postulat, bona vestra cum venia satisfaciam.

Natus est JACOBUS BERNOULLIUS iis majoribus, quos ob constantem purioris Religionis professionem ALBANI *Ducis* credulitas patria sua *Antverpia* pulsos, in exteris regionibus fortunarum suarum sedem quærere coegit, postquam in illa civitate BERNOULLIORUM gens, METERANO * quoque celebri rerum Belgicarum scriptori memorata, diutissime floruerat, & Consulatum quoque gesserat. Accidit ea calamitas JACOBO, qui cum octo liberis utriusque sexus domo profugus *Francofurti* domicilium posuit, ibique A. CIↃ IↃ LXXXIII denatus est. Ejus ex filio nepos cognominis, cum nostræ Religioni esset addictior, a fratribus, qui reliquorum Protestantium religio-

* *Edit. Germ. L. XI. p. 225. & L. XVI. p. 343.*

religionem amplexi apud *Francofurtenses* perpetuam fortunarum sedem constituerunt, quorumque posteritas etiamnum ibi perdurat, secessione facta, *Basileam* commigravit, quæ urbs aliis quoque familiis ob eandem religionis causam patria profugis, & meæ quoque, benignum hospitium exhibuit. Parentem habuit noster NICOLAUM, senem venerabilem, Fori judicialis & Cameræ Rationum apud nos assessorem, qui inverso fatorum ordine octogesimo ætatis anno primogeniti hujus filii sui funus duxit. Matrem, MARGARETHAM SCHÖNAUERAM, quam præcoce funere ereptam in adolescentia amisit. Hoc conjugum pari præter defunctum nati sunt tres alii filii etiamnum superstites, primus Urbis Senator suo merito jamdum designatus; alter *Groningana* hucusque, nunc nostræ Academiæ in docenda Mathesi Professor ascriptus, inter principes hujus ævi Mathematicos jamdiu connumeratus; tertius Artis Pharmaceuticæ unus omnium peritissimus. Natus est autem anno superioris seculi quinquagesimo quarto, die XXVII Decembris, atque, utprimum per ætatem doctrinæ capax est habitus, Gymnasii nostri Præceptoribus iis litteris, quibus pueritia ad eruditionem & honestatem informari solet, instruendus est traditus. Horum industria cum jam eo usque in literis profecisse est visus, ut in Academicam lucem translatus Philosophiæ studio vacare posset, cœpit ille, ne tantæ de se excitatæ spei per socordiam decoqueret, uti domestica informatione Venerandi & Cl. Viri, D. D. JOH. JACOBI HOFMANNI, tunc Græcæ Linguæ, nunc Historiarum apud nos Professoris celeberrimi: & per illud triennium, quod tractando Philosophiæ studio legibus est constitutum, Peripateticorum dogmata, quæ fere sola tunc temporis in Scholis tradi solebant, avide hausit: donec ex illis angustiis eluctatus, anno CIↃ IↃCLXXI, Magister Artium publice renunciatus animum ad studium sacrum applicare cœpit, magis tamen, quod postea semper est professus, ex Patris sui quam propria voluntate: quippe qui ad aliud studiorum genus propendere se, & a natura quasi impelli, animadverteret. Jam tum enim in illa adolescentia ex figurarum quarundam geometricarum inspectione se-

cretam quandam oblectationem in animo suo existere sentiens, paulatim mathematicas disciplinas ita deperire cœpit, ut ad hoc studium a natura factus esse videretur. Quod consilium quanquam Patri minus probari animadverteret, neque adeo ulla ab eo subsidia in eum usum acciperet, in proposito tamen usque rectum clavum tenuit, &, impellente genio, identidem ad suos numeros ac figuras furtivo quodam studio divertit, &, cum proprios libros nullos haberet, quoscunque ipsi fors aliunde objiciebat, ingenti aviditate evolvit. Ibi illud accidit memorabile, ut quæ res ejus in mathematica scientia profectus insigniter remoratura credebatur, plurimum etiam hoc ipso fine ei prodesset. Idem enim illi tum contigit, quod de HENRICO VALESIO, Viro inter *Gallos* Græcis Latinisque literis instructissimo, in illius vita memoratur, eum scil. cum patrem haberet præparcum, & ipse, adolescens minime pecuniosus, libros emere non posset, nonnisi commodatos legere consuevisse: de quibus dicere solebat, nullis se libris melius unquam fuisse usum: hos enim a se exactissime evolvi & excerpi, ut quos paulo post restituendos nunquam in manus suas redituros esse nosset. In his rei librariæ, quantum quidem ad mathematicam scientiam pertinet, angustiis constitutus, strenue tamen, quoad res ferebat, propositum ursit: eo tunc emblemate uti solitus, quod obfirmatum ejus in eo, quod semel cœperat, studiorum genere persequendo animum, atque omnibus objectis difficultatibus reluctantem exprimeret. Repræsentabat autem illud PHAETHONTEM, PHOEBI patris sui currui insistentem, cum hac epigraphe: *INVITO PATRE SIDERA VERSO.* Adeo se opprimi non patitur concitatus ille naturæ impetus, non frustra certe a DEO animis nostris infusus, cui qui refragantur, ad nullum unquam excellentem in doctrina gradum, quasi reflante vento, eluctari potuerunt: cum contra, qui cursum illum naturæ atque destinationem ad certum vitæ & doctrinæ genus quasi manu ducentem secuti, id unum sibi agendum censuerunt, cujus a naturæ autore DEO ingenitam sibi facultatem deprehenderunt, tanquam secundo amne provecti, ad id quod in literis summum est, pervenisse

venisse observentur. Plane ut hac quoque parte, quæ sunt CICERONIS verba, Naturam optimam ducem tanquam DEUM sequi eique parere pulchrum sit: cujus ut supremæ parentis imperio qui obtemperat, parentibus minus obedisse argui non potest. Aut putatisne, *Auditores*, ex antiquis OVIDIUM, ex recentioribus PETRARCHAM & CASAUBONUM, illam in literis laudem fuisse consecuturos, si parentum suorum vota secuti Jurisconsultorum scriptis atque tristibus fori altercationibus, ad quæ illi nunquam sine nausea accedebant, quam humanioribus studiis, ad quæ a natura facti erant, suas vigilias impendere maluissent?

Quanquam autem egregius adolescens illum mentis ardorem, quo ad Mathesin ferebatur, objectis sibi impedimentis non remitteret, id tamen effecit necessariorum subsidiorum penuria, ut tum quidem ultra vulgaris Arithmeticæ, Geometriæ, & Astronomiæ cognitionem penetrare non posset. Quin imo quemadmodum illis, qui natalis terræ angulum nunquam sunt egressi, ullas extra suum cœlum terras jacere vix fit verisimile: sic ille, cui nisi tritos Mathematicorum libellos adhuc videre non contigerat, ignorabat etiam, esse alia longe præstantiora, quæ a doctissimis Viris in illa doctrina & elucubrata jam essent, & aliorum industria eruderari possent. Dedit tamen jam in illis primæ adolescentiæ rudimentis quendam ex se perspicacissimi ingenii fructum, excutiendo celebri Problemate chronologico de inveniendo anno Periodi Julianæ ex datis tribus cyclis, Solis, Lunæ, & Indictionum, quod occasione propositionis secundæ, quæ in prima parte *Deliciarum Mathematicarum* DANIELIS SCHWENTERI extat, proprio marte octodecim annorum tyro felicissime resolvit. Ea ergo ætate, præter Theologiam, cujus studium nunquam deposuit, Matheseos tractatio præcipuam occupationum ejus partem faciebat: cui tamen, ut erat omnium doctrinarum ejus ingenium capax, humaniorum literarum, quæ in eleganti orationis conformatione consistunt, studium conjunxit; quibus eo cum profectu incubuit, ut, quæ laus non admodum ab iis expectatur, qui omnem suam industriam uni veritati indagandæ

 addi-

addicunt, in utroque & solutæ & ligatæ orationis genere ea jam tum ediderit artis documenta, quæ ingenii acumine, verborum nitore, sententiarum elegantia, etiam peritissimis illarum artium magistris potuerint satisfacere. Extant etiamnum, ut semel hac de re dicam, præter joculare illius carmen *Scarronis* versibus Gallica lingua, insigni festivitate & rara in peregrino præsertim homine imitationis felicitate, conditum, cui ab argumento *Pomum Eridos* titulum fecit, alia ejus Latina carmina complura, quæ pro re nata magna cum ingenii & Poeticæ facultatis commendatione lusit. In Epigrammate cumprimis plane videbatur regnare, quod carminis genus tam concinna brevitate, tanta venustate, & acumine (quæ sunt præcipuæ ejus carminis virtutes) tamque apte & argute sciebat concludere, ut non minus poëtica hæc tam elegantis ingenii monumenta, quam illa mathematica, in doctorum hominum manus pervenire fuerit optandum.

Tam procul ille a quorundam male feriatorum opinione erat remotus, qui homine altioribus studiis & veritatis præcipue indagationi operato orationis curam ut rem levem & nugatoriam indignam arbitrantur. Quanto rectius noster cum CICERONE, illo bene & dicendi & sentiendi magistro, utrumque officium conjungendum esse credidit? Eloqui enim copiose, modo prudenter, melius esse statuebat, quam vel acutissime sine eloquentia cogitare: quod cogitatio in se ipsa vertatur; eloquentia complectatur eos, quibuscum communitate juncti sumus. Neque tamen hæc sive mathematica sive humanitatis studia ita sibi illum totum vindicarunt, quin theologicum quoque ex voluntate Patris, qui filium Ministerio destinabat, semel cœptum magna cura urgeret, eo successu, ut A. CIↃIↃCLXXVI, præmisso examine in eorum numerum reciperetur, quibus sacrorum publice docendorum facultas conceditur: quo ille officio postea & apud nos, & *Genevæ* præcipue, tum & in *Lemovicensi* illa commoratione sua, concionibus ad populum habendis feliciter est defunctus. Et intra hæc quidem studia, Theologiæ, Humaniorum literarum, & Matheseos, suam ille industriam coercuit, sed ita, ut

ut præcipuam tamen operæ suæ partem in postremo illo collocaret, in eoque uno studeret excellere. Neque enim tam bene comparatum esse norat cum præstantibus etiam ingeniis, ut si æquali diligentia plura studia complectantur, ultra mediocritatem fere in singulis proficiant. Quando & ERATOSTHENEM ferunt, utut magno esset ingenio præditus, tamen quod, præter Geographiam, plurium quoque aliarum disciplinarum cognitionem partitis studiis sectaretur, in omni literarum genere infra primos substitisse, eoque nomine *βῆτα* fuisse cognominatum.

Hæc studiorum fundamenta postquam in patria posuit, peregrinatione literaria linguarum & artium cognitionem locupletare constituit: hancque mense Maio A. CIↃ IↃC LXXVI, bono cum DEO est ingressus, & *Genevam* primum appulsus, paulo post in ea urbe insigne dexteritatis & judicii sui specimen edidit. Erat tum spectabili inter *Genevenses* Mercatori, Domino A WALDKIRCH, filia ELISABETHA, quæ bonarum literarum capaci ingenio a natura instructa, calamitate aliqua jam inde a secundo post nativitatem mense omnem oculorum usum amiserat. Hanc ille solerti & arguta quadam docendi ratione usus non eo tantum perduxit, ut literas expedite pingere disceret, sed & Logicæ, Physicæ, & Historicæ artis scientiam non pœnitendam sibi compararet. Post viginti mensium commorationem, *Geneva* relicta, totam fere *Galliam* perlustravit. Accidit enim tum temporis, ut cum CLAUDIUS BLANCHERIUS *Marchio* LOSTANGIUS ex *Lemovicensibus*, filio suo ephorum & præceptorem quæreret, noster oblata sibi ea conditione A. CIↃ IↃCLXXVIII per *Lugdunenses*, & *Arvernos* facto itinere, *Nedam*, ejus Marchionis sedem, peteret, in qua postquam per menses tredecim Concionatoris & Informatoris officio est functus, continuata per *Lemovicenses* & *Petrocorios* profectione, *Burdegalam* venit, cujus urbis amœnitate captus per semestre tempus, quo in ea substitit, præter conversationem, quam cum doctis ejus civitatis Viris, BAUDOVERO Mathematico, nec non RONDELETIO, GOYONIO, & SARRAVIO, qui tum in Reformatorum Ecclesia sacra administrabant, frequentem habuit, Tabulas quoque Gnomoni-

cas universales, quæ inter defuncti schedas etiamnum ineditæ latent, magno studio concinnavit: excursionem quoque in vicinam *Regulam*, ubi tum *Aquitaniæ* Parlamentum jus dicebat, fecit. Hinc secundo *Garumnæ* in Oceanum delatus, *Aquitaniæ* litora & *Ream* insulam prætervectus, *Rupellam* appulit, unde per *Nannetes*, & *Salmurium*, ubi Cel. CAPELLUM; hinc per *Aurelianum*, ubi PAJOTUM compellavit, *Lutetiam Parisiorum* venit, in qua urbe postquam duorum mensium spatio quicquid vel in hominibus vel in ædificiis rebusque aliis visendum occurrebat, curiosis oculis perlustrasset, Patriæ & Parentum ex tanto intervallo iterum aspiciendorum desiderio impulsus, per *Franciæ Insulam*, *Campaniam*, *Lotharingiam*, *Alsatiam*, ipso Ascensionis die *Basileam* intravit. Hujus ille itineris Gallici eum fructum tulit, ut illius Linguæ tam uberem tamque accuratam sibi notitiam compararet, ut, quod de illo ipsorummet Gallorum judicium fuit, cum ipsis ejus linguæ magistris præstantissimis de puritate & elegantia certare posset. Quo minus autem etiam in Matheseos studio insignem aliquam ex ea profectione utilitatem caperet, duabus potissimum rationibus factum esse sæpe amicis commemorare est solitus, nempe cum ætatis vitio, quæ rerum utilium incuriosa fere inania tantum sectatur, & in istis peregrinationibus non a patria magis quam a semetipsa aberrare consuevit: tum vero & opinionis quodam errore, quod solidas & vere sic dictas scientias, ut in quibus hucusque tam parum a se profici potuisse meminerat, ne dari quidem ullas existimaret. Ex qua re illud est consecutum, ut nec de compellandis viris doctis, ex quorum alloquio plurimum poterat proficere, nec de aliis uberioris scientiæ consequendæ mediis multum solicitus esset.

Ex illo ergo Gallico itinere domum redux, suasu amicorum Cel. MALEBRANCHII *Scrutinium veritatis* & CARTESII scripta tum primum cœpit evolvere, cujus scriptoris Methodum potius quam Principia approbabat. Hæc ei lectio ad id profuit, ut jam in Philosophia ultra consueta compendia sapere inciperet. Dum in his est, Cometæ, qui per id tempus in cœlo formidandæ

dæ magnitudinis effulsit, occasione, quendam ingenii lusum de futura ejus nova apparitione in publicum edidit: pauloque post A. cIↃIↃCLXXXI m. Aprili secundo *Rheno* alteram in *Belgium* & *Angliam* profectionem instituit, certus, id quod priori itinere a se peccatum fuerat, in hoc emendare. Et in *Belgio* quidem *Amstelodami* aliquanti temporis moram traxit, ibique ALEXANDRUM DE BIE, Matheseos Professorem, res mathematicas in gratiam nautarum vernacula lingua explicantem aliquoties audiit: ac per otium in vicinas urbes & provincias excursionem fecit. Inprimis autem *Lugduno-Batavæ* Universitati penitius lustrandæ aliquod tempus dedit, in qua Celeberrimis Viris, WITTICHIO, LE MOINE, Theologis: BOCKELMANNO J.C. & WOLDERO Philosopho innotuit. Et huic certe Belgicæ commorationi illud se debere sæpe prædicabat, quod excussis, quibus hactenus immersus erat, tenebris atque præjudiciis, sanioris Philosophiæ & demonstrationum mathematicarum, quas a præstantissimis ejus scientiæ magistris publice videbat exhiberi, dulcedine inescatus, ipse quoque ad illorum exemplum ad altiorem aliquem doctrinæ gradum viam affectare cœpit. Ibi ergo Elementa *Euclidea* docuit prius quam didicit, ratus, id quod res est, & quod proverbio dicitur, docendo nos discere, eamque optimam esse proficiendi rationem, si, quæ ipse jam primum didiceris, aliis discenda propines. Qua in re eadem ejus, quæ judiciosissimi cujusdam apud nos Viri, ratio fuit, qui de se ipso sæpe commemorabat, accidisse sibi aliquando, ut cum in Orientali quadam lingua, quam nec ipse adhuc penitus cognitam habebat, discipulum erudiret, & non ipse minus, quam discipulus faciebat, informationi se præparare haberet necesse, ipse hunc singulis diebus nonnisi uno Grammatices ejus linguæ capite anteverteret. Sed ut ad nostrum redeamus, hac ille tam assidua lectione, meditatione, doctorumque Virorum conversatione, præcipue autem quod *Cartesianam* Geometriam attentissimo studio tum primum evolveret, tanta ad mathematicam ejus scientiam accessio est facta, ut brevi post tempore, volens aliquod profectuum suorum, quos in *Belgio* fecerat, specimen publice extare,

extare, primo quidem Conamen illud suum *de Cometarum motu* in Latinam linguam translatum, multo quam prius auctius: postea etiam Tractatum *de Gravitate Ætheris*, Belgicis typis excusos in publicum ediderit, qui libri, quemadmodum de Hortensii scriptis memoriæ est proditum, tanquam Phidiæ signa simul aspecti fuere & probati. Ergo, ut solent mutuis finibus & nexis quasi vestigiis labor atque gloria convenire, sic ut unius finis alterius gradus efficiatur, ex illo scriptorum suorum tirocinio primus ei ad nomen inter Mathematicos sui temporis comparandum aditus patuit: inprimis cum inde ab eo tempore *Diarium Eruditorum Parisiense*, & *Acta Lipsiensia* singulis annis observationibus suis locupletaret.

Postquam autem in literario illo Batavicarum Academiarum mercatu animum mathematica eruditione egregie instruxerat, & gravissima scorbuti ægritudine fuerat defunctus, discendi aviditate provectus per præcipuas *Brabantiæ*, *Zeelandiæ*, *Flandriæ*que civitates, *Caletum* usque continuato itinere in *Angliam* trajecit, in qua insula Ill. Boylium, Isaacum Vossium, Robertum Hookium, Justellum, Stillingfleetum, Baxterum, Galium, aliosque Celeberrimos Viros, salutare non intermisit. Inter alios compellavit Adrianum quoque Beverlandium, Virum ab impiis, quas etiam scriptis publice editis Orbi manifestas esse voluit, sententiis quam eruditione sua celebriorem: qui tunc ex Belgio relegatus in Isaaci Vossii familia degebat. Non quod malæ frugis hominem vel tanti æstimaret, sed ut ex perspecta bonorum malorumque, & eorum qui vere, quique ad speciem tantum eruditi essent, indole, quæ nativa esset eruditionis facies, posset internoscere: secutus in ea re exemplum prudentium familiæ patrum, qui, dicente Plinio, pluribus sæpe veris denariis adulterinum emunt, ut verus agnoscatur. Ex *Anglia Hamburgum* est transvectus, unde brevi per *Germaniam* transitu in patriam A. cIↃ IↃC LXXXII rediit. Quanquam ne tum quidem prius sibi cessandum existimavit, quam bimestri itinere *Helvetiæ* pagos omnes in duorum amicorum, & inter eos dilectissimi Fratris mei, comitatu esset emensus. Ex eo tempore

pore ſtabilem in patria pedem poſuit, & mathematica ſtudia, cum principia tam pulchre ipſi ſe dediſſent, majori etiam labore urgenda ſumſit: ad quorum amorem & diligentem tractationem ut popularium animos, hactenus in ea re ſegniores, excitaret, Collegium, quod vocant, experimentale Phyſico-Mechanicum publice aperuit, primuſque rerum harum pulcherrimarum in urbe noſtra vel autor vel evulgator extitit. Contigit tum, ut ab Eccleſia Reformata, quæ *Argentinæ* colligitur, opera ejus in Sacris Gallica & Germanica lingua ad populum docendis requireretur. Sed ille, infirmitatis ſuæ, ut aiebat, ſibi conſcius, eam conditionem reſpuit, profecturus contra *Heidelbergam*, ubi in docenda publice Matheſi vicarium ei Profeſſoris munus deſtinabatur, niſi matrimonio, quod amicorum & Parentis præcipue ſuaſu hoc ipſo Anno CIↃ IↃCLXXXIV iniit, in patria fuiſſet retentus. Hoc ipſi fœdus contractum eſt cum lectiſſima virgine JUDITHA, STUPANORUM celebrium Urbis noſtræ Medicorum, quorum etiamnum ſcripta leguntur, nepte & pronepte: e qua geminæ ſobolis, maſculæ & fœmineæ, pater eſt factus: quarum hæc in honeſto & felici Domini NICOLAI RYHINERI Mercatoris conjugio vivit: filius autem pictoriæ artis, ad quam diſcendam naturali quadam animi inclinatione ferebatur, *Auguſtæ Vindelicorum* etiamnum operam navat, & jam ea tirocinii ſui argumenta dedit, quæ præſtantem in futurum artificem urbi noſtræ pollicentur.

Hac matrimonii via cum jam plene in ſuam tutelam perveniſſet, decrevit, reliquis ſtudiis quibuſcunque quibus ſe non eſſe natum ſentiebat ſepoſitis, totum ſe dare Matheſeos ſcientiæ, famamque de ſe excitatam non tueri tantum, ſed majorem etiam ſibi aſtruere. Hoc loco, quando res ipſa id poſtulare videtur, profligandam mihi video illorum ſententiam, quæ defuncti exiſtimationi certe perquam eſt injurioſa, qui, quod ſæpe ex illis eſt auditum, univerſum hoc Cl. Viri interioris illius & abſtruſioris Matheſeos excolendæ inſtitutum, tanquam ſterile & in mera contemplatione poſitum, ex quo nulla in humanam ſocietatem commoda redundare poſſint, ſibi damnandum cenſuerunt.

Cujus suæ opinionis principem & antesignanum habent sane non levem, SOCRATEM, qui, ut est apud LAERTIUM, Geometriam non nisi modice discendam aiebat: eorum vero studium, qui ad descriptiones usque intellectu difficiles discendo progrederentur, penitus improbabat; quod diceret, non videre se quem usum ea res habere posset: posse autem aiebat omnem hominis vitam occupare, & profectibus aliarum disciplinarum plurimum officere. Sed hi quidem homines, qui cum pressius urgentur, demonstrationes totamque adeo rem mathematicam a se ne intelligi quidem, & algebraicos characteres tantum non pro magicis haberi confiteri coguntur, quemadmodum hanc suam sententiam, quam de re sibi incomperta tanto supercilio ferunt, contra omnium seculorum constantissimum consensum tueantur, ipsi viderint. Illud certe perspicue falsum est, quod pro confesso sibi sumunt, nihil esse in studiis laudandum, quod non idem sit utile. Quod quidem si illis damus, jam artes illæ omnes e Rep. fuerint exterminandæ, quæ elegantiam magis quam hujus vitæ necessitatem utilitatemve in operibus suis consectantur. Ipsa certe communis hominum vita, & commerciorum, quæ inter eos viget, ratio, abunde illos refellit, quæ non illis rebus carissimum pretium posuit, quæ in quotidiano victu maximum usum habent, sed quæ vel raritate vel difficultate præ aliis vulgatioribus se commendant. Quæ ergo vel invidia vel inscitia est, in scientiarum dijudicatione diversam viam insistere, & illarum tantum rerum cognitioni pretium ponere, quæ quidem usum in hac vita insignem, ceterum intelligentiam pervulgatam & in promtu positam habent; iis contra artibus, quæ res a vulgarium oculis remotas & reconditas eruunt, eo solo nomine dignitatem & æstimationem omnem abrogare, quod illarum usus non æque perspectus est & diffusus? Et profecto, si quod res est dicere volumus, in omnibus his a quibus Eruditi appellamur disciplinis, si ea quæ ad vitam commodius & honestius degendam faciunt ab illis quæ præter curiosam contemplationem & scientiam nihil admodum continent sejungimus, quam, DEUS bone! macilenta, & exucca, omnisque ornatus indiga

indiga tota hæc, cujus scientiam profitemur, Encyclopædia, tanquam mundo detracto mulier, omnium oculis apparebit. Sed nolo jam ego adversus mathematicarum contemplationum contemtores ista defensione uti, ne id sibi a me dari existiment, quod est minime illis concedendum, nullum ex hoc studii genere fructum in hac vita expectari posse. Nisi forte eam, illi nullam esse utilitatem putant, si quis se ipsum & animum suum hujusque facultates, rerum admirabilium, quas DEUS in natura non temere expressit, quamque inde existere necesse est, bonitatis, prudentiæ & majestatis Divinæ cognitione instruere satagat. BERNOULLIUS certe noster id se egisse in schedis suis confitetur, ut illis contemplationibus suis vestigia sapientiæ Creatoris sui in illius operibus rimaretur. Neque vero tam sterilis est Mathematicorum contemplatio, quin etiam ad civilem hanc vitam & cultiorem & instructiorem efficiendam plurima adminicula suppeditet. Enimvero ut illi qui humani corporis structuram primi hominibus tradidisse contenti, medendi artem ipsi non exercuerunt, apud æquos & cordatos viros non minorem laudem invenerunt, minusque humanæ societati profuisse judicantur, quam qui traditam ab illis scientiam postea ad sanandas ægritudines transtulerunt: Ita qui mathematicis contemplationibus unice sunt dediti, quanquam ipsi ad mechanicam operationem, quam ut ingenuo homine indignam ipsi ex antiquis PLATO & ARCHIMEDES attingere nunquam voluerunt, non progrediuntur, tamen, cum curis suis atque vigiliis ea principia extruant, quæ aliis postea in rerum humano generi utilissimarum inventione perfectioneve mirifice subserviunt, nemo Mathematicorum illas vigilias jure infructuosas dixerit. Plane si quæ Geographicæ, Nauticæ, aliarumque artium incrementa sperari possunt, mathematicæ disciplinæ, ut quarum illæ nonnisi quædam quasi propagines existunt, in subsidium veniant necesse fuerit. Sed ad id, unde justa me *Bernoullianorum* studiorum defensio abduxit, tempus est ut revertar.

Tunc ergo ut urgeret propositum, & in Matheseos studio aliquid excellens efficeret, autores omnes una cum *Fratre*, cui

prius Matheseos principia magna fide & egregio cum successu impertierat, legere, & inter legendum aliis explicare instituit: ad quod studium cum perpetua quædam meditatio accederet, paulo post ipsa interioris Geometriæ adyta, sua ipse opera, nullius præceptoris industria adjutus, vere αὐτοδίδακτος, sibi reclusit, ac præstantissima tam veterum quam recentiorum inventa plana perspectaque reddidit. Fuit autem hæc illius laus plane singularis, quod cum plurimi ante ipsum Geometræ ea quæ a majoribus tradita erant edidicisse contenti nihil ex se laudandum promere satagerent, aut, si quando ambitione compulsi ad scribendum accederent, aliorum inventa in suos libros exscripta in se transferrent, Phorcydum sororum imitatores, quæ, ut est in fabula, cum non nisi unum, sed exemtilem, oculum haberent, eo invicem utebantur: Ipse bonum patremfamilias agere maluit, fecitque ampliora quæ accepit; ut mathematicæ supellectilis ab antecessoribus ad eum transmissa hæreditas major ab ipso ad posteros transiret. Inprimis autem ut magni operis, ita magnæ & eximiæ laudis fuit illa nostri industria, quam cum ingeniosissimo *Fratre* posuit in indagando Calculo, quem vocant, differentialium & integralium: in quem a Celeberrimo LEIBNITIO primum inventum, & in *Actis Eruditorum Lipsiensibus* * non nisi tecte & quasi per ænigma in mathematici cujusdam problematis resolutione allegatum, non prius inquirere destitit, quam optato fine potiretur: cujus ille primum specimen exhibuit in iisdem *Actis* mense Maio CIↃIↃCXC solutione Problematis, quod a Cel. LEIBNITIO de invenienda linea descensus æquabilis olim fuerat propositum. Hancque ejus dexteritatem mirifice sibi probari testatus est LEIBNITIUS †: hoc addito corollario, analysin illam sui Problematis eruere utique non fuisse cujusvis, nec quenquam sibi esse notum, qui melius quam BERNOULLIUS mentem suam penetraverit. Quibus gemina sunt ea præconia, quæ ille idem ingeniosissimis Fratribus etiam postea impertiit: cujusmodi illud est, quod non dubitare se ait,

* Mens. Octobr. 1684. † Mens. Jul. 1684.

sit, * ipsos aliqua detecturos, ad quæ pervenire sibi ipsi difficile esset futurum, ** & ad ea jam illos pervenisse in Calculo differentiali, quæ HUGENIUS per jocum hypertranscendentia appellabat: † denique effecisse illos, ut jam non ipsorum minus quam suus ille calculus esse videatur. Et hoc quidem tam egregio invento non minus exultavit BERNOULLIUS noster quam ARCHIMEDES olim, qui cum ex balnei mensura furtum in corona per fraudulentam argenti ad aurum admistionem deprehendisset, e balneo prosiliens suum illud *εὕρηκα* alta voce ingeminavit. Nec profecto injuria: quippe cum hujus methodi beneficio novas subinde regulas novaque principia extrueret, & quæstiones plurimas, quas ne tentare quidem alii sustinuissent, feliciter resolveret; alia vero tantum inchoata ab aliis perpoliret, absolveret, & ad summum perduceret.

Dum in his est, DEUS ipse, tam egregiis ejus laboribus præmium constituens, theatrum ei aperuit, in quo industriam suam publice exercere posset. Mortuo enim Cl. Viro PETRO MEGERLINO JCto, Mathematico, & Historico eximio, scriptis quoque editis celebri, cum in Mathematica Professione successor ei desideraretur, nemo illi provinciæ cum laude sustinendæ visus est magis idoneus quam noster, ut qui suæ in hac scientia eruditionis testem universum Orbem literatum allegare poterat. Ergo Matheseos Professor d. XV Febr. An. CIϽ IϽC LXXXVII conspirantibus in unum suffragiis electus, Dignitates quidem Academicas, Rectoris semel, Decani vero Philosophici tertium magna cum industriæ atque dexteritatis commendatione administravit. In iis vero, quæ ad ornandam provinciam, quam acceperat, proprie pertinebant, id omne quod a Professore publico requiritur, cumulatissime præstitit. Namque & publica & domestica informatione tam diligentem tamque utilem studiosis operam navavit, ut exteri quoque non pauci hujus Viri fama suis sedibus exciti ad illum convolarent. Possem nominare complures, qui hodienum in celeberrimis *Germaniæ* Academiis

* Mens. *Sept.* 1691. ** Mens. *Jul.* 1695. † Mens. *Maio* 1697.

ex eo hauſtam ſcientiam cum laude publice profitentur, & in alios transfundunt. Et fuit profecto in illo peculiaris ad docendum aptitudo, atque tanta, ut difficillima quæque & impeditiſſima Auditoribus ſuis ea docendi facilitate propinare noſſet, ut neſcirent fere, per ludumne aut ſomnum, an ſerio ſtudio iſta didiciſſent. In publicis vero, quas ſubinde in gratiam ſtudioſorum repræſentabat, diſputationibus, argumentum deligebat non de trivio ſumtum, ſed ex recondita Matheſi depromtum: in eoque defendendo, ſtudioſæ juventuti, quoties eam vel in argumentando aberrare, vel in percipiendo hæſitare animadvertebat, mira perſpicuitate atque dexteritate expeditiſſimam eluctandi viam quaſi digito commonſtrabat. Quodcunque autem a publicis occupationibus ſupervacuum erat temporis, Geometriæ novis acceſſionibus & inventis locupletandæ impendit: cujus rei fidem faciunt præter illas, quæ in defuncti ſcriniis adhuc ineditæ jacent, lucubrationes, variæ illæ obſervationes, quas cum *Actis Eruditorum Lipſienſibus*, tum & *Diario Gallico* inſertas Orbis eruditus cum admiratione legit.

Hac tam recondita & tot in publicum editis præclari ingenii monumentis declarata eruditione magno omnium doctorum conſenſu inter principes ſuæ ætatis Mathematicos adnumerari meruit, factumque, ut longe jam pervulgata ejus fama magnorum non in literis tantum, ſed etiam in præcipuis Principum miniſteriis Virorum literis fuerit compellatus: quos inter facile primas tenent Viri non natalium magis quam eruditionis dignitate ſpectatiſſimi, Illuſtriſſimus Dominus ROGERUS BRULARTUS *Marchio* DE PUYSIEULX ET SILLERI, &c. &c. Magni *Gallianum* REGIS ad *Helvetios* Legatus Excellentiſſimus: tum & Illuſtr. Dominus GUILIELMUS HOSPITALIUS, Eques & *Marchio* S. MESMII ET MONTELERII, qui in præfatione ejus libri, cui *Analyſeos quantitatum infinite parvarum* titulum fecit, BERNOULLIIS Fratribus omnem ſe mathematicæ ſuæ ſupellectilis ſubſtantiam debere ingenue profitetur. Cum his paria in amore defuncti faciebant Nobiliſſimus NICOLAUS FATIO DUILLIERIUS, Regiæ Anglorum Societati jamdudum aſcriptus: Ampliſ-

Amplissimus item GOTHOFREDUS GULIELMUS LEIBNITIUS, Sereniss. Electoris *Brunsvicensis* Consiliarius Status, Regiæ Societatis Borussicæ Præses, Vir in tantum laudandus, in quantum virtus & eruditio possunt intelligi, ut cujus in omni literarum genere, Jurisprudentia, Historia, & Mathesi, ubique sibi parem, hoc est, excellentem doctrinam nostra hæc ætas prædicat & futura admirabitur. Nec non Celeberrimi Viri, PETRUS VARIGNONIUS, Regiæ Scientiarum Academiæ Socius, Matheseos in Collegio apud *Parisienses* Mazarineo: OTTO item MENKENIUS, & CHRISTOPHORUS PFAUTZIUS, *Lipsienses* Professores meritissimi. Quanquam autem vel una hæc tam illustrium nominum commemoratio abunde demonstrat, quantam in eo doctrinæ amplitudinem repositam fuisse oporteat, qui tantorum Virorum gratiam & amicitiam potuerit promereri, ingens tamen ad ejus dignitatem cumulus accessit, honorificentissimo Parisiensis & Borussicæ Academiæ testimonio, a quibus ille inter primos in Sociorum numerum est relatus. Plerique enim nostis, Auditores, de constituendis Regiis in *Gallia* & *Borussia* Scientiarum Academiis non prius, quam de BERNOULLIO nostro in eas cooptando fuisse cogitatum: cujus rei abunde fidem faciunt ea diplomata *, quibus illi verbis quam fieri potuit honorificentissimis ea dignitas est oblata. Quo loco illud non est prætereundum, quod vel inprimis Parisiensis Academiæ eximiam de hujus Viri doctrina existimationem declarat, quod illa defuncti memoriam solenni ritu in publico Societatis conventu hujus ipsius mensis die XIV, parentali oratione, singulari nec promiscue omnibus tribui solito honoris genere, prosecuta est.

Ad hanc tam eximiam rerum mathematicarum cognitionem indeque consecutam nominis celebritatem quibus ille adminiculis pervenerit, operæ pretium est cognoscere. Fuit autem in illo, quod ad egregios in unaquaque arte faciendos progressus plurimum valet, naturalis quædam ad Matheseos studium inclinatio:

* *Quorum Parisiense exaratum est d.* 1 April. 1699, *Berolinense d.* 11 Julii 1701.

natio: cui suffragabantur eximiæ & plane singulares animi dotes, quæ cum etiam singulæ in uno homine deprehensæ magnam laudem merentur, in eo reperiebantur universæ. Erat enim in illo judicium rectum & solidum, quo vera a falsis, &, quæ adumbratam tantum speciem habebant, a rebus solidis accurate sciebat internoscere. Isti gemina erat vis ingenii peracris, non ea quidem, quæ celeriter res objectas comprehenderet & continuo sine meditatione in rei naturam penetraret; sed qualem Catonis Majoris describit Plutarchus, quem ad percipiendum fuisse tardum, sed ea quæ semel percepisset, nunquam oblivioni tradidisse & egregie in suos usus convertisse scribit. Quanquam illa percipiendi difficultas, non tam naturæ cuidam vitio, quam singulari ejus accurationi videtur tribuenda; ut qui externam rei superficiem nosse non contentus (in quod fere vitium illa in percipiendo, ut sic dicam, tam rapacia ingenia solent incidere) ipsa rei viscera & medullam introspicere, nihilque, quod ad certam atque plenam rei cognitionem quicquam posset conducere, incompertum & inexploratum relinquebat. At postquam ille rerum notiones semel animo impressas habebat, nunquam illas sibi iterum elabi, sed nec otiosas apud se delitescere patiebatur, iisque continuo versandis & inter se comparandis, eas vel perficiebat, vel novas ipse ex se promebat. Accedebat enim ad naturales illas animi dotes studium quoddam singulare, quod amore Matheseos succensum nunquam illum sinebat quiescere, priusquam propositum sibi finem, in quo se postea mirifice oblectabat, esset assecutus. Erat autem in meditatione tam assiduus, ut semper fere cogitabundus conspiceretur, sæpeque ei amicis inter se colloquentibus assistenti accideret, ut post longam illorum dissertationem, quid inter illos actum esset, requireret. Quale quid cum aliis summis viris, tum Archimedi quoque, cujus premebat vestigia, sæpenumero usu venisse traditur, ut figuris suis intentus, quia corporis cultum intermittebat, a ministris ad ungendum abstraheretur, & ne tum quidem ab opere suo quicquam remittens per corporis unguenta, figuras & lineamenta digito describeret. Quanquam autem

id

id studium longa assuetudine jam in mores transierat, alebatur tamen insigniter honesta quadam ambitione, quæ ipsum, ut magnorum illorum ætatis suæ Mathematicorum doctrinam atque celebritatem æmularetur, impellebat, plane ut, quod de tibicinibus tradit PLUTARCHUS, eos cum in Liberalibus olim singuli artis suæ specimen ederent, remisse & oscitanter id fecisse; orta autem cum aliis concertatione, accuratius longe concentum instruxisse: idem de nostro affirmari queat, illum scilicet cum Clarissimis Viris, tandem etiam cum ingeniosissimo *Fratre*, orta studiorum contentione & doctrinæ æmulatione, se ipsum quodammodo superasse. Quare tam excellentibus ingenii dotibus cum indefesso studio & perpetua quadam meditatione conjunctis, non est mirum, si nihil unquam ejus se animo tam intricatum obtulit, quod non istis adminiculis adjutus felicissime superaret. Hoc idem tamen tam versatile ingenium, ne quid dissimulem, si quando ad tractanda quædam impediti operis negotia in vita accederet, sæpenumero hæsitare, nec viam, qua se facile explicaret, invenire deprehendebatur: quod ei cum multis præstantissimis viris fuit commune. Et quid mirum, in hac civili vita, cum pleraque non tam ad rationis normam quam obliquis quibusdam viis ab hominibus gerantur, sæpenumero cespitare eos, qui, prout rationis artem ipsi profitentur, ita ad hujus ductum actiones suas omnes sibi conformandas arbitrantur? His ingenii dotibus ingentem conciliabat elegantiam eximia eloquendi facultas, quam ille præter exercitationem inde a juventute semper continuatam, diligenti præcipue earum rerum, quæ dicendæ erant, meditatione comparavit. Ut vel ejus exemplo verum esse comprobetur illud FLACCI, dicentis, bene sapere & sentire principium esse & fontem bene dicendi.

Quanquam autem ea, quæ adhuc commemoravi, naturæ & industriæ bona magnam in se habent commendationem, tanto tamen illa majoris haberi merentur, quod nimia illorum æstimatio modestiam ejus nunquam potuit expugnare. Enimvero uti negari non potest, illum honesta quadam ambitione, sine qua nemo unquam magnum in doctrina gradum fecit, impulsum, & lau-

dem quæsisse inter doctos, & quæsitam non facile passum sibi eripi: ita rursus, nec de aliis illum contemtim, nec de se nimis liberaliter sensisse aut dixisse, illi quam optime possunt testificari, qui cum eo familiarius consueverunt. Ipse memini, aliquando illum mihi dicere, quo magis in mathematicarum rerum contemplatione proficeret, tanto magis omnis humanæ cognitionis, quantacunque illa esset, imperfectionem a se penitius introspici. Quod cum diceret, idem illud ei videbatur contigisse, quod MENEDEMUS illis dicebat usu venire, qui discendi gratia *Athenas* ventitabant: hos nempe primo quoque tempore fuisse sapientes, deinde studiosos sapientiæ, mox rhetoras, tandem procedente tempore rerum omnium evasisse ignaros. Et huic modestiæ fuit tribuendum, quod ab omni quorundam stolide eruditorum inepta arrogantia remotus, in consuetudine & colloquio non morosum se aut difficilem, sed humanum, atque omnium, qui eum requirerent, usibus expositum præbuit. In primis autem cum Collegis suis amice vixit, & concordiæ, si quis alius, vel colendæ, vel, si qua illam labefactatam crederet, resarciendæ erat studiosus. Sed & cum aliis semel contractam amicitiam religiose servabat; quam tamen non cum omnibus promiscue, sed cum delectis tantum Viris arctiorem sibi contrahendam existimavit. In hoc numero erant præcipui triga Clarissimorum hujus Academiæ procerum, Magnificus Acad. Rector, D. SAMUEL WERENFELSIUS, Theologus; D. JACOBUS BURCARDUS, Jurisconsultus; D. NICOLAUS EGLINGERUS, Medicus. Nec minus ipsi veracitatis & ingenuitatis studium fuit, adeo ut tacere mallet, aut diserte negare, quam id dicere aut promittere, cujus ipsum postea pœnitere ac pudere posset. Inprimis aversabatur illam hominum pestem, qui aliis, & frequentius malis quam bonis, turpiter assentantur. In frequentando Divino cultu, quantum per valetudinem poterat, frequens erat & attentus, & quantum a superstitione, tantum a profano illorum studio, qui de DEO rebusque Divinis contemtim sentiunt aut loquuntur, æque remotus. Possem in hanc rem plura commemorare, quæ defuncti memoriam commendabilem possent red-

reddere. Sed nolo, quod est multorum institutum, vel ea, quæ mediocria in illo fuerunt, verbis extollere, vel etiam falsas laudes ei astruere. Hoc illi faciant, qui in sterili argumento occupati, nihil admodum in eo, cujus vitam in literas mittere instituerunt, laude dignum inveniunt. Mihi satis fuerit, procul amore & odio, ea de defuncto dixisse, quæ bono jure in eum potuisse conferri, cum vos ipsos, *Auditores*, tum universum literatum Orbem testes allegare possum. Tantum certe & ab ingenuitate defuncti & ab instituto meo abest, ut vel in virtutibus ejus exaggerandis, vel vitiis, quibus cum omnis hominum vita tum summa quoque ingenia infestantur, dissimulandis atque oratorio fuco obliniendis multum mihi existimem laborandum, ut imo, secutus autoritatem defuncti, qui peccatorum se, & gravissimorum quidem peccatorum reum ultro agnoscebat & profitebatur, ego hanc ipsam ejus tam infucatam confessionem in præcipuis illius laudibus collocem. Si qui vero sunt, qui morbo quodam animi magis quam judicio impulsi memoriæ defuncti obtrectare, & illius nævos exagitare pertendunt, eorum nos procacitatem tum demum patienter ferre incipiemus, postquam & eruditionem & ceteras illius virtutes suis ipsi studiis moribusque expresserint. Tantisper vero dum ab iis quam longissime sunt remoti, retracta in pectus ea manticæ parte, quæ a tergo est, in suis ipsos vitiis, quibus longe gravioribus urgentur, meditandis atque e vita eluendis potius, quam in alienis exagitandis, curiosos esse jubemus.

Sed vocat me narrationis ordo, ut novissima vitæ illius momenta describam. Corpus obtigerat nostro a natura firmum & compactum, sed quod cum peregrinationibus, quas in juventute molestissimas instituit, tum præcipue lucubrationibus suis & pertinaci meditandi assuetudine debilitatum, jam inde ab aliquot annis labem facere cœpit. Primum hostem expertus est podagram, quæ initio tolerabilis, temporis progressu vehementior extitit, & non doloris tantum exquisitissimi sensu, sed duratione etiam, nec uno tantum, sed sæpius per annum repetito incursu, tanta in eum atrocitate desævit, ut ex ea contracta infirmi-

dem quæsisse inter doctos, & quæsitam non facile passum sibi eripi: ita rursus, nec de aliis illum contemtim, nec de se nimis liberaliter sensisse aut dixisse, illi quam optime possunt testificari, qui cum eo familiarius consueverunt. Ipse memini, aliquando illum mihi dicere, quo magis in mathematicarum rerum contemplatione proficeret, tanto magis omnis humanæ cognitionis, quantacunque illa esset, imperfectionem a se penitius introspici. Quod cum diceret, idem illud ei videbatur contigisse, quod MENEDEMUS illis dicebat usu venire, qui discendi gratia *Athenas* ventitabant: hos nempe primo quoque tempore fuisse sapientes, deinde studiosos sapientiæ, mox rhetoras, tandem procedente tempore rerum omnium evasisse ignaros. Et huic modestiæ fuit tribuendum, quod ab omni quorundam stolide eruditorum inepta arrogantia remotus, in consuetudine & colloquio non morosum se aut difficilem, sed humanum, atque omnium, qui eum requirerent, usibus expositum præbuit. In primis autem cum Collegis suis amice vixit, & concordiæ, si quis alius, vel colendæ, vel, si qua illam labefactatam crederet, resarciendæ erat studiosus. Sed & cum aliis semel contractam amicitiam religiose servabat; quam tamen non cum omnibus promiscue, sed cum delectis tantum Viris arctiorem sibi contrahendam existimavit. In hoc numero erant præcipui triga Clarissimorum hujus Academiæ procerum, Magnificus Acad. Rector, D. SAMUEL WERENFELSIUS, Theologus; D. JACOBUS BURCARDUS, Jurisconsultus; D. NICOLAUS EGLINGERUS, Medicus. Nec minus ipsi veracitatis & ingenuitatis studium fuit, adeo ut tacere mallet, aut diserte negare, quam id dicere aut promittere, cujus ipsum postea pœnitere ac pudere posset. Inprimis aversabatur illam hominum pestem, qui aliis, & frequentius malis quam bonis, turpiter assentantur. In frequentando Divino cultu, quantum per valetudinem poterat, frequens erat & attentus, & quantum a superstitione, tantum a profano illorum studio, qui de DEO rebusque Divinis contemtim sentiunt aut loquuntur, æque remotus. Possem in hanc rem plura commemorare, quæ defuncti memoriam commendabilem possent red-

reddere. Sed nolo, quod est multorum institutum, vel ea, quæ mediocria in illo fuerunt, verbis extollere, vel etiam falsas laudes ei astruere. Hoc illi faciant, qui in sterili argumento occupati, nihil admodum in eo, cujus vitam in literas mittere instituerunt, laude dignum inveniunt. Mihi satis fuerit, procul amore & odio, ea de defuncto dixisse, quæ bono jure in eum potuisse conferri, cum vos ipsos, *Auditores*, tum universum literatum Orbem testes allegare possum. Tantum certe & ab ingenuitate defuncti & ab instituto meo abest, ut vel in virtutibus ejus exaggerandis, vel vitiis, quibus cum omnis hominum vita tum summa quoque ingenia infestantur, dissimulandis atque oratorio fuco obliniendis multum mihi existimem laborandum, ut imo, secutus autoritatem defuncti, qui peccatorum se, & gravissimorum quidem peccatorum reum ultro agnoscebat & profitebatur, ego hanc ipsam ejus tam infucatam confessionem in præcipuis illius laudibus collocem. Si qui vero sunt, qui morbo quodam animi magis quam judicio impulsi memoriæ defuncti obtrectare, & illius nævos exagitare pertendunt, eorum nos procacitatem tum demum patienter ferre incipiemus, postquam & eruditionem & ceteras illius virtutes suis ipsi studiis moribusque expresserint. Tantisper vero dum ab iis quam longissime sunt remoti, retracta in pectus ea manticæ parte, quæ a tergo est, in suis ipsos vitiis, quibus longe gravioribus urgentur, meditandis atque e vita eluendis potius, quam in alienis exagitandis, curiosos esse jubemus.

Sed vocat me narrationis ordo, ut novissima vitæ illius momenta describam. Corpus obtigerat nostro a natura firmum & compactum, sed quod cum peregrinationibus, quas in juventute molestissimas instituit, tum præcipue lucubrationibus suis & pertinaci meditandi assuetudine debilitatum, jam inde ab aliquot annis labem facere cœpit. Primum hostem expertus est podagram, quæ initio tolerabilis, temporis progressu vehementior extitit, & non doloris tantum exquisitissimi sensu, sed duratione etiam, nec uno tantum, sed sæpius per annum repetito incursu, tanta in eum atrocitate desævit, ut ex ea contracta in-

firmitas, pedum illi usum difficilem & impeditum reddiderit. Eadem vero postea ad superiora penetrans manuum quoque ligamenta penitissime insedit, & durabili vexatione fere patientiam ejus expugnavit. Sed erat hæc non nisi velitaris pugna, & per hæc rudimenta DEUS illum gravioribus tanto majore cum patientia subeundis, & per hanc viam æternitati denique præparabat. Etenim ex hoc tam frequenti morborum insultu, qui fere sine cessatione modo hanc, modo illam corporis partem lancinabant, languor quidam & cachexia totius corporis illum invasit, quæ cum nullo medicamentorum aut fomentorum genere, quibus assidue sollicita uxor eum recreare moliebatur, expugnari posset, hectica febris non obscuris signis, tussi præcipue & conspicua corporis emaciatione, cœpit se prodere; qua cum penitus prostratæ essent illius vires, & jam sibi ipsi, nedum aliis functionibus, quas hucusque non segniter obierat, sustinendis, non esset, tandem lecto est affixus. Hic vero ille demum vere se Philosophum, &, quod rei caput est, Christianum exhibuit, ut profecto tanti fuerit tam graviter ægrotasse. ZENONEM memorant, quum nuntium accepisset de navi, quam ille mercibus onustam expectabat, mari submersa, exclamasse: Quam bene, o Fortuna, mecum decidis, quæ me ad pallium atque Philosophiam compellis. Existimate, *Auditores*, BERNOULLIUM vos loquentem audire, non illa quidem ZENONIS, sed DAVIDIS verba: Quam utile mihi est, o DEUS, quod me deprimis, ut discam decreta tua. Habuit profecto postremus illius morbus amplissimum campum, in quo constantiam, fidem, & patientiam suam exerceret. Et constantiam quidem cum dico, non eam intelligo obstinatam animi duritiem atque temeritatem, qua multi, quorum animis callum obduxit peccandi assuetudo, nullo peccatorum sensu, nulla æternitatis cogitatione perculsi, mortem instantem vel contemnunt vel contemnere volunt existimari: a qua tantum abfuit noster, ut, quamprimum lecto affixus decretorium illum diem, & in eo vitæ a se actæ reddendam esse DEO rationem cogitaret, in se ipsum continuo descenderet, &, ut illud Divinum examen suo ipse anteverteret, seque & facta.

facta sua diligenter excuteret. Quæ cogitatio adeo animum ejus dejecit & prostravit, ut hinc præteritorum conscientia, inde futurorum metu, in angustias compulsus, & indignum se profiteretur DEI misericordia, & eandem tamen, ut peccatorum suorum memoriam oblitteraret, enixissimis precibus imploraret. Neque tamen de statu passus se dejici, in memoriam sibi revocavit CHRISTI meritum, in eoque uno posita fiducia certissimum in ærumnis suis solatium reperit, id unum subinde professus se metuere, ne forte sinceritas ac certitudo suæ fidei DEO suo minus satisfaceret. Hac spe & interna Spiritus Sancti testificatione, quæ illum Divinæ gratiæ reddebat securum, erectus, de doloribus suis non admodum conquerebatur, sed quicquid in iis erat durum patientia sibi lene & tolerabile efficiebat. Quoties ergo de imminente morte disserebat, ea id faciebat animi constantia, non ut de vita ad sepulchrum, sed de domo in domum migraturus videretur. Jamdudum enim omnem recuperandæ salutis spem abjecerat, & id unum agebat, ut & familiæ suæ post mortem prospiceret, & animum capessendæ æternitati præpararet. Hoc fine post tutores uxori & filio designatos, quibus etiam, quid de libris & manuscriptis suis fieri vellet, aperuit, totus in precibus & piis meditationibus erat, nec admittebat officiosa quorundam amicorum solatia, qui nonnunquam vitæ ipsi spem facere nitebantur. Hunc ejus animum certamque mortis expectationem illud inter alia declarat, quod a Cl. FAYO nostro, quo ille familiariter est usus, mihi narratum hoc loco commemorare non pigebit. Is jam olim librum aliquem Theologici argumenti a NAUDÆO conscriptum a BERNOULLIO acceperat utendum: quem cum illi post aliquod intervallum, addita scriptoris commendatione, restitueret, affirmavit BERNOULLIUS, certo se ante mortem librum FAYO esse donaturum. Id cum ille per jocum ab eo dictum esse existimaret, quod BERNOULLIUS satis firma tum valetudine utebatur, factum, ut ille triduo ante mortem eum inviseret. Ibi ægrotus, repetita promissionis commemoratione, FAYO nil tale cogitanti: Jam, inquit, instat illud tempus, quod, ut promisso meo

meo exsolvam, monet: & cum dicto librum ei tradidit. Eodem tempore de sepulchro sibi procurando cogitabat, quod cum ab amico ultro oblatum gratanter accepisset, saxo lineam Spiralem Logarithmicam circulo inclusam insculpi jussit, cum hac epigraphe, *EADEM MUTATA RESURGO*: ARCHIMEDIS exemplum imitatus, qui, ut est apud PLUTARCHUM, sepulchro suo cylindrum sphæra comprehensum ab amicis imponi voluit, tanquam id geometricarum vigiliarum & inventionum suarum palmarium esset. Sic & nostrum probabile est ea inscriptione ad insignes ejus curvæ proprietates voluisse alludere; quas in illa comprehendi ipse primus invenerat. Eam namque lineam, ut ipsiusmet defuncti verbis * utar, non modo sui evolutione se ipsam describere, sed & infinitis aliis modis ex se ipsa generari eam posse, primus deprehenderat, & ita quidem, ut perpetuo non tantum similes, vel ejusdem speciei curvæ prodeant, sed prorsus eædem, & positione tantum diversæ, talesque quæ sibi superimpositæ plane congruant. Ob quas causas etiam Spiram illam mirabilem appellare solebat. Præcipue autem ille hoc symbolo certam futuræ resurrectionis fiduciam pari pietate & elegantia expressit. Tandem curis omnibus defunctus, exhaustis corporis viribus, cum dolores alimentum jam nullum reperirent, in una æternitatis cogitatione defixus, die XVI Augusti, paulo post quintam matutinam, animam DEO Creatori reddidit, annum quinquagesimum, mensibus septem & quod excurrit, vivendo prætergressus. Mortem dicerem præmaturam; sed illa quantumvis diu dilata semper ejusmodi appáritura fuerat illis, qui studia literarum earumque antesignanos optarent perennare. Funus tertio ab hoc die elatum est, deducente Academia, & in æde Franciscanorum, in qua sibi sepulchrum delegerat, depositum, funebrem concionem habente Rev. & Clarissimo Viro, Domino JOH. RODOLFO WETSTENIO, Ecclesiæ Leonhardinæ Diacono fidelissimo.

Et hæc quidem mors corporis nobis usuram abstulit. Ne vero

* In *Actis Erud. Lips.* m. Maii 1692.

vero totus nobis nostrisque usibus periret, ipse sibi ætatis spatium ampliavit, atque præclaris ingenii monumentis eam sibi vitam comparavit, quam nulla unquam temporum diuturnitas poterit abolere. Etenim, præter Tabulas Gnomonicas *Burdegalæ* olim ab eo concinnatas, nec nisi typographi operam desiderantes, edidit in Batavica peregrinatione *Conamen novi systematis Cometarum*, & *Dissertationem de gravitate ætheris*: publicis vero Dissertationibus, quas in Academia nostra proposuit, præter alia argumenta justum quoque *De Seriebus infinitis* tractatum edidit. His accesserunt eruditissimæ illæ observationes, quibus *Diarium Parisiense* & *Acta Eruditorum Lipsiensia* illustravit, ex quibus sunt, præter alias complures, Examen modi ponderandi aeris per vesicam, in qua commissum ante se a viris doctis paralogismum ingeniose ostendit, aliam vero aeris ponderandi rationem longe accuratiorem ipse substituit, Societati Anglicanæ summopere probatam: Modus, quo Matheseos scientia cæcis propinari possit: Examen machinæ urinatoriæ Borellianæ, nec non perpetui mobilis Parisiis publicati: Nova ratio metiendi nubium altitudines: Solutio algebraica problematis illustris de quadrisectione trianguli scaleni per duas normales rectas: Animadversio in Geometriam *Cartesianam*, & constructio quorundam problematum hypersolidorum: Ratio inveniendi cujusque plani declinationem ex unica observatione projectæ a stylo umbræ; quod est præcipuum in Gnomonicis inventum: Vera constructio geometricorum problematum solidorum & hypersolidorum per lineas rectas & circulum, quam ante illum tentarunt plures, sed nemo præstare potuit: Analysis problematis de inventione lineæ descensus æquabilis; quod primum inventi a se Calculi differentialis specimen fuisse diximus: Demonstratio oscillationis ex doctrina vectis: De curvatura veli, quam ille primus eruit, & regulas ad nauticam perficiendam utilissimas construxit: Observationes circa lineas cycloidales, evolutas, ant-evolutas, causticas, anti-causticas, pericausticas, deque earum usu & simplice relatione ad se invicem, deque Spira mirabili: Solutio problematis de minimo crepusculo: Explicatio naturæ osculorum, & defini-

definitio celeritatis navium; cui subjungit regulas pro supputandis corporum in fluido motorum resistentiis: De curvatura laminæ elasticæ, ejusque identitate cum curvatura lintei a pondere inclusi fluidi expansi: De curva accessus & recessus æquabilis ad punctum datum, mediante rectificatione curvæ elasticæ; quam lineam magno Leibnitio tantopere desideratam solus reperit: De methodo tangentium inversa: Constructio generalis omnium curvarum transcendentium ope simplicioris tractoriæ & logarithmicæ: Complanatio superficierum conoidalium & sphæroidicarum; & quis omnes fœcundissimi ingenii lucubrationes enumeret? Eidem debemus editionem Geometriæ *Cartesianæ* magna accuratione ab illo procuratam, quam & notis quibusdam tumultuariis in ipsa operis recensione ei subnatis subinde locupletavit. Cœpit etiam aliquot ante obitum annis commentari; quem commentarium etiam ad umbilicum fere perduxit, *De Arte conjectandi*, in qua ratiocinia, ab aleæ ludo translata, ad moralia, civilia, & œconomica negotia applicare docet, soluto eum in finem singulari quodam problemate, quod & utilitatis amplitudine & inventionis difficultate ipsi circuli tetragonismo, ut qui, si vel maxime tandem inveniretur, exigui usus futurus esset, longe anteponit.

Habetis, *Auditores*, brevem, sed fidelem, Cl. BERNOULLII, heu! quondam vestri, vitæ mortisque historiam; Viri, cujus memoriæ universus quacunque patet eruditus Orbis assurgit, & assurget tamdiu, quandiu literis apud condignos rerum æstimatores suus honos constabit, cuique nostra cumprimis Academia veras lacrymas debet. Ea enim sunt merita BERNOULLII nostri, ut, quemadmodum de se prædicabat Augustus, *Romam* se auream relinquere, quam lateritiam accepisset: sic illi ea laus omni jure sit tribuenda, Geometriam, quam pauperculam invenerat, multis ab ipso inventis atque observationibus locupletatam relictam fuisse. Nos inprimis amisimus ejus morte Virum non e multis unum, sed cui inde a condita hac Universitate in re mathematica nominis celebritate & inventorum gloria parem non habuimus, quique ab Academica, quam apud nos sustinuit, digni-

dignitate tantum decoris neutiquam accepit, quantum ipse in eam contulit. Amisimus, inquam, Mathematicum, non *Helvetiæ* nostræ tantum, sed universæ Europæ, unum e præcipuis: in cujus laudibus illa fuit una de minimis, quæ vel sola in aliis aut unica est aut summa, quod disputator fuit subtilis idemque perspicuus, præceptor fidus & industrius, Poeta suavis & ingeniosus, Orator copiosus & eloquens. Hanc tamen tam excellentis ingenii jacturam ut moderatius feramus, id efficit, quod in demortui locum eum jam surrogatum videmus, qui ingenii acumine, eruditionis fama, inventorum gloria, non minus quam natalium communione, genuinus ejus frater esse a cunctis agnoscitur, Virum nempe Celeberrimum, Dominum JOHANNEM BERNOULLIUM, *Groningana* Universitatis per decennium in docenda Mathesi Professorem: quem exornandæ nostræ Universitati peculiari Numinis providentia fuisse destinatum quo minus possemus dubitare, illud accidit memorabile, ut ille, cum graviorem Fratris ægritudinem ignoraret, visendorum Parentum studio iter in patriam instituturus, forte sic ferente, eodem illo die *Groninga* emigraret, quo nos hic *Basileæ* ipsius Fratri exequias celebravimus: plane ut ab ipso DEO Fratri in administrando munere Professorio succenturiatum fuisse appareat. Ad quod etiam, ut primum in civitate nostra appulit, quam fieri potuit honorificentissime vocatus, & ab Amplissimis Urbis nostræ Proceribus luculento salarii auctario cohonestatus, neglectis amplissimis conditionibus, quibus in *Lugduno-Batavam* & *Ultrajectinam* Universitates ad docendam Mathesin invitabatur, Patriæ suæ servire maluit. Macte hac virtute, Vir Clarissime, & ut in locum Fratris, sic & in affectum ejus, quo ad promovendam hujus Universitatis gloriam ferebatur, succede.

TU vero, benignissime DEUS, qui tam luculentis tuis beneficiis usque res nostras tibi curæ esse quotidie demonstras, serva proporro hanc Civitatem tanquam pupillam oculi Tui, eamque Proceribus nostris tutam foris, tranquillam domi, & ex omni parte florentem præsta. Ecclesiam præcipue ejusque seminarium Academiam, ut adhuc fecisti, sic tuere, ut ab omni labe intactæ,

promovendæ nominis Tui gloriæ, & cum suæ tum, aliorum saluti procurandæ sedulo & cum successu laborent. Eoque fine prospera illorum industriam, quos Tibi in utraque delegisti perficiendæ voluntatis Tuæ ministros, iisque, ut tanto utilius Tibi laborent, fac hanc gratiam, ut juventus non magis ex illorum informatione, quam vita, tanquam ex optimo exemplari, suos ipsa mores desumat omni probro defæcatos, hancque illi educent non monitis tantum, sed, quod multo est efficacius, vita. Idque ut diu faciant, vitam, quam aliis docendis tam strenue impendunt, longævam & felicem omnibusque ingenii dotibus ei muneri sufficientibus instructam benigne illis largire. Fac ut nos omnes, veram non simulatam Philosophiam affectantes, intimis cogitationibus votisque nostris Te unum sectemur, & ad hunc finem omnia studia nostra unice colliment: ut studeamus non ostentationi & famæ apud homines captandæ, sed vitæ ad leges Tuas emendandæ: non ut oblectemus nos studiis, sed ut illorum ope verum a falso, bonum a malo secernamus: non ut serviant curiositati nostræ, sed ut extirpent errores, minuant cupiditates, defæcent mores. Inprimis id nobis præsta, o DEUS, ut ne quid unquam sapiamus præter Te, atque identidem cogitemus, in illo decretorio die de nobis ita Te laturum sententiam, non ut quam docti sed quam probi fuerimus dispiciatur. Donec in cœlestem illam lucem translati, & omnibus ignorantiæ peccatique tenebris, quibus adhuc in hac mortalitate circumfundimur, exsoluti Doctores & discipuli, hauriamus lumen de Tuo lumine, & potiamur vero studiorum fructu, beata æternitate. DIXI.

INDEX

INDEX

Numerorum.

Quan-

N°. XXVI.

N°. XXVI.

N°. 43.

Nota 3.

N°. LXXVII.

Finis Indicis.

No. I.

CONAMEN NOVI SYSTEMATIS COMETARUM,

Pro

Motu eorum sub calculum revocando & apparitionibus prædicendis,

ADORNATUM

A

JACOBO BERNOULLI, Basil.

Difficulter eruuntur quæ tam alte jacent.

Editum Primo

AMSTELÆDAMI,

Apud HENRICUM WETSTENIUM.

1682.

Finis Indicis.

No. I.

CONAMEN
NOVI SYSTEMATIS
COMETARUM,

Pro

Motu eorum ſub calculum revocando & apparitionibus prædicendis,

ADORNATUM

A

JACOBO BERNOULLI, Baſil.

Difficulter eruuntur quæ tam alte jacent.

Editum Primo

AMSTELÆDAMI,

Apud HENRICUM WETSTENIUM.

1682.

VIRIS

Magnificis, Nobilissimis, Amplissimis, Consultissimis,

D. JOHANNI HUDDENIO,

Præpotentis Reip. Amstelædamensis Consuli & Senatori gravissimo, nec non Societatis Indiæ Orientalis Præfecto dignissimo:

D. BERNHARDO FULLENIO,

J. U. D. & Inclytæ Reip. Franekeranæ Ex-Consuli meritissimo.

VIRI MAGNIFICI, AMPLISSIMI,



EREGRINANTES non infimum felicitatis suæ momentum in eo ponunt, ut Viros ubique in eminentia constitutos, & quos singularis virtus ac eruditio ultra communem mortalium sortem evexit, de facie nosse, vel limina eorum

etiam ſalutaſſe ſe olim gloriari poſſint. Sufficit eſſe in Belgio, AMPLISSIMI VIRI, ut quis immortalis Veſtri nominis fama allectus, ad hunc felicitatis aſpiret apicem, & ad ſacra Veſtra Capita; non uno nomine in pretio & veneratione habenda, humillimum ſibi acceſſum parare, quoquo modo annitatur. Quis enim divinæ majeſtatis characterem, e ſacratiſſimis Veſtris muniis relucentem, devoto non adorare geſtiat pectore? Quis vigilantiam ac prudentiam, cujus pro ſalute populi tot ſpecimina ediditis, non ſumme admirari cupiat? Sed quis ornamentum ſplendidiſſimum, quod divino Veſtro characteri rariſſimo exemplo addidiſtis, profundiſſimam rerum Mathematicarum ſcientiam non prorſus ſtupeat? Loquuntur Tuæ, AMPLISSIME HUDDENI, Literæ binæ ad *Schootenium* τὸν μακαρίτην exaratæ, & ceu pretioſiſſimi uniones, Geometriæ Carteſianæ inſertæ: quam abſolutiſſimam divinæ artis Analyticæ, qua ſine Matheſis, & ſine Matheſi omnis jejuna eſt Philoſophia, ſpirant cognitionem! quot abſtru-

abstrusissimæ veritates in parum adulta ætate ab Amplitudine Tua erutæ, in profundissimo claustro sine Huddeniana clave æternum latituræ! Parum etiam visum fuit Amplitudini Tuæ, MAGNIFICE FULLENI, summum in his terris majestatis conscendisse apicem, nisi summa juxta summis adderet, & sublimi dignitatis fastigio sublime Uranoscopiæ studium jungeret; idque tanto prosequeretur ardore, ut Gedanum quondam iter suscipere, & cum Celeberrimo HEVELIO de Scientiarum nobilissima conferre Amplitudinem Tuam non piguerit. Tot vero venerationis argumenta, AMPLISSIMI VIRI, propius adoraturo, & ad aras Vestras humillimum mihi paraturo aditum, quamvis nec densis fascibus, nec spissi voluminis hecatombe altaria mihi fument, perinde ut aliis, qui grandiorum uberum pascunt pecora, & ampliorem fœcundioris ingenii & eruditionis messem facere consueverunt; liceat tamen e curtá supellectile & sterili messe par turturum & paucas Vobis spicas adolere. Ac-

quiescite igitur, VIRI AMPLISSIMI, levidensi hoc paucarum pagellarum sacrificio, quod ad pedes vestros submisse oblatum venio, illudque patrocinio Vestro, favore Authorem amplecti dignamini,

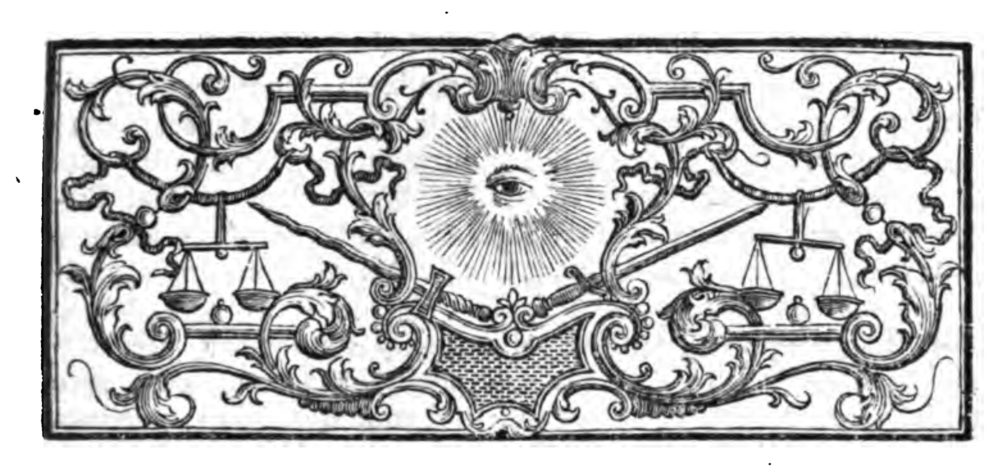
VESTRARUM AMPLITUDINUM

Humillimum & Devotissimum Cultorem

JAC. BERNOULLI.

Amstelædami
11. Augusti
1681.

JA-



JACOBI BERNOULLI

CONAMEN ADORNANDI NOVI SYSTEMATIS COMETARUM,

Pro motu eorum ſub calculum revocando & apparitionibus prædicendis.



UM Cometa noviſſimus, adhuc Orbi noſtro illucens, ad ſui contemplationem ſyderalis ſcientiæ Cultores invitaret, incidebam forte in Scriptum quoddam Gallicum *, in quo Author Ephemeridem Cometæ pandere, ejuſque motum pro ſingulis diebus ſequentibus ad finem uſque apparitionis prædicere tentabat, ſtationem quidem illius ad 6 Martii St. Nov. in baſe Trianguli Borealis figens. Cum vero Cometa jam $\frac{6}{16}$ Fe- Occaſio ſcripti.

* *Explication de la Comète qui a paru ſur la fin de l'année dernière & au com-*

No. I. Februar. novem pene gradibus terminum illum prætergressus, tandem inter Apem & Caput Medusæ expirasset, & sic eventus calculum simul & operam Prophetæ lusisset; in causam hujus erroris inquirere cœpi, & nunquid fieri posset, ut vago Cometarum motui certæ tandem leges & cancelli præscriberentur, integraque adornaretur Theoria, cujus beneficio eorum apparitiones quodammodo calculo subjici, & non secus ac Luminarium Eclipses prædici possent. Hinc pagellas nonnullas vernacula lingua conscripsi; quæ vix sub prælo prodierant, cum ecce fata mea me in Belgium vocarent; ubi cum appulissem, monuerunt Amici, qui Tractatum perlegerant, ut eundem in gratiam eorum, quos titulus ad lectionem invitare posset, Latine redderem; simulque responsiones ad objectiones, quas contra hypothesin meam movebant, interspergerem; etiamque difficultates, quas in Celeberrimi Domini Hevelii, quem longe diversam circa hanc materiam fovere opinionem sciebant, hypothesi deprehensurus essem, indicarem. Equidem Vir iste incomparabilis & quasi alter e Tychonis cineribus Phœnix, tam exactissimis observationibus & prolixissimo calculo, quam Opere Cometographico longe absolutissimo, tam immensum exantlavit laborem, ut post tot lucubrationes jure dubitari queat, an circa hanc materiam dici quid possit, quod non sit ab ipso dictum: facilem tamen sperabo veniam, si post tantam messem exiguum adhuc colligam spicilegium, & hypothesin meam, quamvis non in omnibus ei arrisuram, explicem.

Antequam vero Lectori Astrophilo mentem meam ea de re adaperiam, nonnulla in antecessum præmittenda de Cometarum *Ortu*, *Motu*, *Loco* & *Cauda*.

1. de Cometæ ortu. I. Circa Cometarum *Ortum* vel *Originem*, somniant Peripatetici, eos conflari ex siccis & sulphureis exhalationibus, e Terra in

commencement de celle-ci, 1681; *avec une Table qui marque le jour qu'elle a commencé à paroître, & le jour qu'elle finira, la somme de ses mouvemens, sa longitude, & sa latitude, &c. par* D. Anthelme, Chartreux. A Dijon 1681.

in ſupremam aeris regionem a Sole attractis, ibidemque accenſis. Brevitas, cui ſtudemus, non permittit, ut omnes abſurditates, quibus hæc ſententia implicatur, tangamus; Id tantum notet benignus Lector: Si Cometæ propria gaudent potius luce, quam illam a Sole acceptam reflectunt, ut juxta hypotheſin ſuam fateri coguntur iſti Philoſophi; tum non poteſt dari ratio phyſica, quare hoc lumen non ſe in omnia promiſcue latera diffundat, ſed perpetuo in plagam Soli directe oppoſitam vergat, niſi ridicule inter utrumque arcana quædam colluſio & Sympathia fingatur. Quemadmodum autem Syſtema Ptolemaicum, inter alia, etiam propterea ſuſpectum eſt, quod in illo non poſſit dari ratio phyſica, cur Sol & centrum epicyclorum Mercurii & Veneris cum Terra in eadem perpetuo linea recta inveniantur; ita meo judicio ex hoc ſolo ſufficiens argumentum petitur, mittendi nuncium ſententiæ Ariſtotelicorum, quod in aſſignanda cauſa directionis caudæ Cometicæ aqua ipſis hæreat. Nolo jam inveſtigare, an Terrarum orbis, etiamſi totus in fumum abiret ex mente adverſariorum, ſuffecturus eſſet tam immani caudæ producendæ. No. I. Sententia *Ariſtotelis.*

Sagaciſſimus alias naturæ ſcrutator, * Dn. CARTESIUS ſatis monſtroſam etiam hic opinionem fovet. Juxta illum, maculæ plurimæ denſiores ſidus aliquod, inſtar cruſtæ vel corticis, undiquaque involventes impediunt, ne ſidus globulos ſecundi elementi circa ſe exiſtentes, amplius tanta vi a ſe repellere, aut Vorticem ſuum tanta rapiditate circumagere poſſit, quanta opus eſt ad reſiſtendum violento motui & gyrationi vicinorum Vorticum; hinc fit ut ſenſim ab illis abſorbeatur & quaſi *Carteſii.*

B ſi

* Nobiliſſ. CARTESIUS, judicio præſtantiſſimorum Virorum, cum primis autem judicio *Rever. & Clariſſ. Dn. Joh. Jac.* HOFMANNI, *Prof. Græc. Ling. in Academia patria celeberrimi*, in Lexico ejus univerſali, ſub tit. RENATUS; fuit *Philoſophus hujus ſeculi celeberrimus, qui in Philoſophia & Mathematicis ſtupendos fecit progreſſus, objectionibus omnibus contra meditationes ſuas allatis erudite & ſolide ſatisfecit, & per epiſtolas undique laceſſitus velut Oraculum quoddam reſponſa dedit: uno verbo Vir fuit incomparabilis.* Poſt tot luculenta teſtimonia, eant nunc agoniſantis Stagiritæ mancipia, quos vel *Domini* titulus Viro incomparabili præfixus male habet.

No. I. si depascatur, donec tandem destructo toto Vortice ipsum sidus in peregrinum talem Vorticem abripiatur, ibique nunc in Planetam, nunc in Cometam abeat. Vid. *Princ. Philos. part.* 3. §. 115. Equidem quod in unoquoque horum Vorticum plurimæ mutationes & alterationes contingant, facile damus CARTESIO, ipsum vero Vorticem tam immensum, Omnipotentis Dei opus, posse funditus destrui & dissipari, est quod omnem fidem superat. Sapientissimus mundi Opifex incolas in pulverem redigere, non ipsum domicilium subvertere in more positum habet, teste Terra, quæ *firmiter fundata est super bases suas, ut maneat in seculum seculi. Psal.* 104. 5. quamvis ejus incolæ, Plantæ & Animantia quævis quotidie intereant & nova reproducantur. Quod si exigua hæc Terræ, quasi pilula, tam solido & inconcusso nixa fundamento est, quanto firmiori talo stabit tam vastum, & Terram hanc nostram infinitis pene parasangis exuperans ædificium. Imo si insolens illa sententia locum haberet, metuendum ne & Vortex noster, quo Sol, Luna, Terra ipsa, totumque Planetarum systema clauditur, idem suo tempore subiret fatum; inprimis quia Astronomi, telescopiorum ope, multas sæpe densissimas in Sole detexerunt maculas, quæ nonnunquam totum Solis discum per integros annos obscurasse leguntur. Sed de inaudita hac & periculosa metamorphosi, qua Sol noster in Cometam transformaretur, nobisque Fixa alia Solis vicem obiret, satius est ut taceam, ne multis ad vertiginem pronis terror forte panicus incutiatur.

Id vero cumprimis totam Cometarum doctrinam Cartesianam mihi suspectam reddit, quod qua ratione ea cum rei veritate & cum mente ipsius Philosophi conciliari possit, perspicere omnino nequeo. Agnoscit enim ille, Solem, Terram, Lunam, cæterasque Stellas non eo modo, quem explicat, successive generata, sed initio cum omni sua perfectione creata fuisse, ac in Terra, ex gr. non tantum fuisse semina Plantarum, sed ipsas Plantas; &c: ad naturam tamen eorum omnium melius explicandam sibi principia quædam fuisse excogitanda scribit, ex quibus, tanquam ex

ex ſeminibus quibuſdam, & Sydera, & Terra, & omnia quæ in hoc mundo aſpectabili continentur, ſecundum ordinarium naturæ curſum oriri potuiſſe demonſtraret, quamvis ipſa nunquam ſic orta eſſe probe ſciat. Vid. *Princ. Phil. part.* 3. §. 45. Unde regero; ſi nunquam ſic orta ſint, quare ſoli Cometæ excipiendi, qui revera naſcantur, quoties in conſpectum nobis veniunt? quare non ab initio omnes perfecti creati fuerint, ut Planetæ, quibus tamen & Cometis eundem generationis modum, qui fit per deſtructionem Vorticum, affingit? aut ſi adhuc hodie generentur Cometæ; quæro, cur tot Vorticibus a noſtro Vortice jam conſumptis, & tot ſyderibus ab illo abreptis, omnia hæc ſydera perpetuo in Cometas abierint, & nullum omnino in Planetam? quare item Planetæ perpetuo in noſtro Vortice rotentur, nec Cometarum inſtar ex uno Vortice in alium migrent, ſiquidem utrique eadem incunabula habeant? No. I.

Probabiliſſimum itaque eſt, & forſan ab ipſius CARTESII mente non alienum, Deum jam in initio creationis, juxta alia ἑξαημέρου opera, etiam Cometas produxiſſe, iiſque non ſecus ac reliquis Stellis & Planetis motum perpetuum indidiſſe, certoſque aſſignaſſe limites, quos non tranſgrederentur ad finem uſque ſeculi. Ut omnis vero vitetur æquivocatio, qua ludi in hac materia frequentiſſimum eſt; probe notandum, me, dum Cometas inter creationis opera refero, intelligere ſolum Cometæ corpus aut caput, nequaquam vero caudam; utpote quam diverſiſſimæ exiſtimo eſſe eſſentiæ, & capiti Cometæ ex accidenti ſolum advenire, ut ex infra dicendis patebit; id quod in editione germanica monitum quoque oportuiſſet, ne multis mentem meam ſiniſtre explicandi & cavillandi anſa data fuiſſet.

II. *Motum* porro Cometarum quod ſpectat, ſiquidem perpetuus ſupponitur, rectus eſſe nequit; quia alias ex uno mundi Vortice in alium ſe ſubducere, tandemque limites totius mundi ſuperare, & in ſpatia imaginaria expatiari neceſſum haberent; quod quam a ſana ratione abſonum ſit, quivis judicat. Neceſſarium itaque eſt, ut motu ſuo Cometæ deſcribant lineam in ſe redeuntem, Ellipticam puta, vel Circularem; utpote corpori- 2. De Motu. Eſt circularis.

No. I. bus æternis quam maxime convenientem.

3. De Loco. III. *Locus* & *Sedes* Cometarum, quod sublunaris esse nequeat, infallibilibus & demonstrativis argumentis evincitur; 1°.
Non est sub Luna. ex Parallaxibus, quæ omnium Astronomorum unanimi consensu, ex quo TYCHO in illas primus inquisivit, longe exiliores deprehenduntur in Cometis, quam in Luna; unde illorum multo major, quam hujus distantia concluditur. 2°. sublunares si forent; tum in oppositione Solis, cono umbræ Terræ satis profunde immergerentur, & sic notabilem paterentur eclipsin, privati nimirum tum mutuatitio, quo solo gaudent, lumine: Testatur vero experientia, Cometas in oppositione Solis non eclipsari, sed undiquaque crispum in speciem rosæ de se lumen spargere. 3°. Circa conjunctionem cum Sole, cauda Cometæ nobis appareret brevissima; quoniam enim perpetuo in partem a Sole aversam tendit, hinc in dicto casu propemodum directe in oculum nostrum collimatura esset, & sic pene nullum aut acutissimum effectura visionis angulum; quod novissimæ etiam experientiæ refragatur, ubi cauda post conjunctionem Solis & Cometæ apparuit longissima. 4°. Cæterum, si Cometæ sub Luna hæreant, non immerito quærimus, quid iis motum tam constantem, tam diuturnum, tam regularem, & in ipsa inæqualitate regularissimum imprimat atque conservet; cum probabile sit, vago potius motu ferri, quæcunque sub Luna meteora generantur; motum vero regularem & æquabilem, qualis Cometarum est, non nisi corporibus cælestibus & æternis deberi. Quamvis vero etiam porro causa regularitatis motus in sublunaribus Cometis assignaretur; ille tamen motus in se regularissimus, ex tam propinqua distantia nobis non posset non apparere inæqualissimus; sic ut intra paucas horas Cometæ nobis fierent directi, stationarii, retrogradi, aliasque enormes aspectus diversitates causarentur, quas fuse persequitur Cl. Dn. HEVELIUS, *Lib.* 3. *Cometogr. p.* 140. Si quis forte vero Cometa aliquando Lunam eclipsare conspectus est, qualem apparuisse An. 1450. testatur *Georg.* PHRANZA, *lib.* V. *suæ Histor. cap.* 21. (cujus tamen phænomeni fides sit penes autho-

tho-

thorem) respondemus, hos Pseudo-cometas non magis esse Cometas, quam Stella cadens sit vera Stella; de talibus spuriis Cometis potest iterum consuli Cl. HEVELIUS, *Lib. 7. p.* 387. ubi perperam inquit Cometas vocari, cum sint tantum chasmata & meteora ex impurioribus & crassioribus solum exhalationibus compacta, qualia in singulorum Planetarum Atmosphæris quotidie gignantur. No. I.

Sed nec intra Planetarum Systema sedes Cometarum stabiliri potest; portio enim circuli, quam describunt, dum nobis sunt conspicui, tam exiguæ convexitatis est, ipseque proin circulus tam vastæ capacitatis, ut totum illud spatium Terram, vel potius Solem inter & Saturnum, nimis angustum sit ad recipiendam intra se Cometarum orbitam; quo fieret, ut Cometæ omnes successive Planetarum orbes secarent & trajicerent, imo ipsis nonnunquam Planetarum corporibus illiderentur: quorum vero prius cum Vorticis rotatione, posterius cum sana ratione difficulter conciliabitur. Nec intra Planetarum Systema.

Unde concludimus, nullibi Cometas, quam supra Saturnum aptius locari posse, qua in re etiam Dn. CARTESIO calculum lubens addo. Quod vero sufficiens, imo immensum, intercedat spatium Saturnum inter & Fixas, sic facile demonstro: Clarissimus Dominus HOOKIUS, celebris ille Astronomus Anglus, Parallaxin orbis magni in Fixa tertii honoris ad summum 30 secundorum deprehendit; unde sequitur ejus a Terra distantiam minimum continere 13751 semidiametris orbis magni. Quod si jam Fixa primæ magnitudinis (quam nobis omnium proximam, tantoque propiorem, quanto major e Terra conspicitur, supponimus) ad Fixam tertii honoris in apparente diametro se habeat, ut 8 ad 3; in se vero utraque sit æqualis circiter magnitudinis; tunc sequitur, illius a Sole distantiam ad distantiam hujus fore in ratione reciproca, ut 3 ad 8, adeoque & proximam Fixarum a nobis adhuc distare 5156 semid. orbis magni. Et siquidem Saturnus vix decem talium semidiametrorum spatio a nobis absit*, relinquitur, ut Saturnum inter & proximam Fixam spatium comprehendatur plusquam 5146 semid. orbis magni. Sed supra Saturnum. Immensum spatium Saturnum inter & Fixas.

No. I. Spatium hoc partem constituit Vorticis solaris.

Cum vero dubitari possit, an immensum hoc spatium partem constituat Vorticis nostri Solaris, an vero Vorticis alterius alicujus Fixæ; idcirco id porro calculo investigandum est. Equidem cum Sol probabiliter Fixa non sit minor, oportet, ut juxta placita CARTESII, Vortex Solaris quoque non sit angustior Vortice alicujus Fixæ; atqui vero si Vortex Solaris mutilatur illo spatio, tum 39304 vicibus angustior erit Vortice Fixæ; quod sic probatum damus. Parallaxis Fixæ primi honoris, juxta ipsius HOOKII observationem, 1 min. 20 secund. excedere nequit; quod si ergo Orbis magnus, qui hanc gignit parallaxin, in locum hujus Fixæ attolleretur, ejus visibilis diameter quoque angulum 1 min. 20 sec. sive 80 sec. & proin diameter orbis Saturni, non nisi angulum 13 min. 20 sec. sive 800 sec. in oculo nostro subtenderet; utpote vix decies major diametro orbis magni. Sumamus porro binas Stellas primi honoris, quas inter nullæ deprehenduntur aliæ, quarumque adeo Vortices immediate sese contingere subsumuntur, cujusmodi sunt Capella & Lucida in humero dextro Aurigæ. Earum distantia in circulo maximo est $7\frac{1}{2}$ graduum, quo spatio æqualiter in utramque Fixam distributo, Vortex utriusque radium acquirit 3 gr. 45 min. diametrum vero etiam 7 gr. 30 min. id est, 450 min. aut 27000 sec. Hinc diameter Vorticis Fixæ propemodum excessura esset diametrum Vorticis Solaris tricies quater, cujus numeri cubus est 39304; Unde soliditas illius Vorticis superaret soliditatem hujus 39304 vicibus, quia globi sunt in triplicata ratione suorum dimetientium. Cum ergo immanis hic excessus nullatenus rationi consonus sit, bene tandem concludimus, spatium illud Saturnum inter & Fixas non nisi Vorticis Solaris partem componere posse.

Videtur quidem, spatium hoc ad minimum æqualiter distribuendum esse inter Vorticem Solis & Vorticem Fixæ, nec totum Fixæ adimendum, ut totum Soli tribuatur: sed velim consideres, illud propter geminam rationem in calculo haud dubie longe provenisse angustius, quam reapse est, 1°. Quia cum Dn. HOOKIO parallaxin orbis magni in Fixis nimis forte magnam

gnam assumsimus; cum tamen, valde incertum, an tanta quoque reperiatur; imo nullus Astronomorum hactenus ullam deprehenderit. 2°. Quoniam Fixam primæ magnitudinis æqualem supposuimus Fixæ tertiæ magnitudinis, causam majoris diametri apparentis unice rejicientes in propiorem distantiam; cum incertissimum sit, an hæc unica diversitatis aspectus causa sit, & nunquid potius etiam realis inæqualitas in Fixis reperiatur, qua fieri possit, ut Fixæ primi honoris quantumvis remotiores, tanta magnitudine conspiciantur. No. I.

Unde probabiliter colligimus, longe majus spatium Saturnum inter & Fixas intercedere, quam assignavimus; sic ut non omne demamus Vortici Fixæ primæ magnitudinis, etsi id omne, quod assignavimus, Vortici Solis tribuamus. Sed quicquid tandem sit, totum illud, quod Soli forte nimium tribuimus, nullum omnino sensibilem in calculum errorem postea inducere capax est.

In domicilium cessit Cometis.

Ratum igitur esto, Vorticis Solaris longe maximam adhuc partem restare supra Saturnum. Cum autem valde absonum sit, sapientissimum Numen omnes Planetas in Vortice Solari prope centrum adeo arcte constipare voluisse, & tam immensum ultra Saturnum in eodem Vortice spatium incolis vacuum reliquisse; hinc omnino colligo, probabilissimum esse, spatium hoc Cometis cessisse in domicilium.

Nec obstat ulla, Parallaxis.

Nec me moratur, quæ forte in Cometis observari posset, Parallaxis; per eam quidem demonstrative evincitur, eos non esse sub Luna; quanto vero adhuc intervallo ab illa sursum versus distent, determinari prorsus nequit, Parallaxi jam in Sole propemodum evanescente: In Parallaxi enim tam exili, negotium adeo lubricum est, ut nihil omnino certi inde hauriri possit; nec proinde quicquam obstat, quo minus Cometarum distantiam in infinitum augere nobis integrum sit. Hanc parallactici negotii incertitudinem facile agnovit TYCHO, hinc *Lib.* I. *Progymn. de nova stella* 1572. p. 518. *Non omnia*, inquit, *quæ speculative circa hac rite se habent, propterea in praxim citra aberrationis suspicionem applicantur; præsertim si ex mini-*

mis

No. I. Spatium hoc partem constituit Vorticis solaris.

Cum vero dubitari possit, an immensum hoc spatium partem constituat Vorticis nostri Solaris, an vero Vorticis alterius alicujus Fixæ; idcirco id porro calculo investigandum est. Equidem cum Sol probabiliter Fixa non sit minor, oportet, ut juxta placita CARTESII, Vortex Solaris quoque non sit angustior Vortice alicujus Fixæ; atqui vero si Vortex Solaris mutilatur illo spatio, tum 39304 vicibus angustior erit Vortice Fixæ; quod sic probatum damus. Parallaxis Fixæ primi honoris, juxta ipsius HOOKII observationem, 1 min. 20 secund. excedere nequit; quod si ergo Orbis magnus, qui hanc gignit parallaxin, in locum hujus Fixæ attolleretur, ejus visibilis diameter quoque angulum 1 min. 20 sec. sive 80 sec. & proin diameter orbis Saturni, non nisi angulum 13 min. 20 sec. sive 800 sec. in oculo nostro subtenderet; utpote vix decies major diametro orbis magni. Sumamus porro binas Stellas primi honoris, quas inter nullæ deprehenduntur aliæ, quarumque adeo Vortices immediate sese contingere subsumuntur, cujusmodi sunt Capella & Lucida in humero dextro Aurigæ. Earum distantia in circulo maximo est $7\frac{1}{2}$ graduum, quo spatio æqualiter in utramque Fixam distributo, Vortex utriusque radium acquirit 3 gr. 45 min. diametrum vero etiam 7 gr. 30 min. id est, 450 min. aut 27000 sec. Hinc diameter Vorticis Fixæ propemodum excessura esset diametrum Vorticis Solaris tricies quater, cujus numeri cubus est 39304; Unde soliditas illius Vorticis superaret soliditatem hujus 39304 vicibus, quia globi sunt in triplicata ratione suorum dimetientium. Cum ergo immanis hic excessus nullatenus rationi consonus sit, bene tandem concludimus, spatium illud Saturnum inter & Fixas non nisi Vorticis Solaris partem componere posse.

Videtur quidem, spatium hoc ad minimum æqualiter distribuendum esse inter Vorticem Solis & Vorticem Fixæ, nec totum Fixæ adimendum, ut totum Soli tribuatur: sed velim consideres, illud propter geminam rationem in calculo haud dubie longe provenisse angustius, quam reapse est, 1°. Quia cum Dn. HOOKIO parallaxin orbis magni in Fixis nimis forte magnam

gnam assumsimus; cum tamen, valde incertum, an tanta quoque reperiatur; imo nullus Astronomorum hactenus ullam deprehenderit. 2°. Quoniam Fixam primæ magnitudinis æqualem supposuimus Fixæ tertiæ magnitudinis, causam majoris diametri apparentis unice rejicientes in propiorem distantiam; cum incertissimum sit, an hæc unica diversitatis aspectus causa sit, & nunquid potius etiam realis inæqualitas in Fixis reperiatur, qua fieri possit, ut Fixæ primi honoris quantumvis remotiores, tanta magnitudine conspiciantur. No. I.

Unde probabiliter colligimus, longe majus spatium Saturnum inter & Fixas intercedere, quam assignavimus; sic ut non omne demamus Vortici Fixæ primæ magnitudinis, etsi id omne, quod assignavimus, Vortici Solis tribuamus. Sed quicquid tandem sit, totum illud, quod Soli forte nimium tribuimus, nullum omnino sensibilem in calculum errorem postea inducere capax est.

In domicilium cessit Cometis.

Ratum igitur esto, Vorticis Solaris longe maximam adhuc partem restare supra Saturnum. Cum autem valde absonum sit, sapientissimum Numen omnes Planetas in Vortice Solari prope centrum adeo arcte constipare voluisse, & tam immensum ultra Saturnum in eodem Vortice spatium incolis vacuum reliquisse; hinc omnino colligo, probabilissimum esse, spatium hoc Cometis cessisse in domicilium.

Nec obstat ulla, Parallaxis.

Nec me moratur, quæ forte in Cometis observari posset, Parallaxis; per eam quidem demonstrative evincitur, eos non esse sub Luna; quanto vero adhuc intervallo ab illa sursum versus distent, determinari prorsus nequit, Parallaxi jam in Sole propemodum evanescente: In Parallaxi enim tam exili, negotium adeo lubricum est, ut nihil omnino certi inde hauriri possit; nec proinde quicquam obstat, quo minus Cometarum distantiam in infinitum augere nobis integrum sit. Hanc parallactici negotii incertitudinem facile agnovit TYCHO, hinc *Lib. I. Progymn. de nova stella* 1572. p. 518. *Non omnia*, inquit, *quæ speculative circa hæc rite se habent, propterea in praxim citra aberrationis suspicionem applicantur; præsertim si ex mini-*

mis



No. I. *mis magna struas; operam ut plurimum ludunt.*

Cæterum circa observationes Cl. HEVELII, qui Parallaxes Cometarum plerumque minores quam in Luna, & majores quam in Saturno ponit, animadverto; Viro Celeberrimo non tam propositum fuisse, ut contra CARTESIUM demonstraret, Cometas non esse supra Saturnum, quam contra ARISTOTELEM, eos non esse sublunares; id quod frequentes contra hunc invectivæ testantur, *Quo tandem Peripatetici resipiscant*, *Ut iis larva detrahatur*, *&c. Lib.* 3. *p.* 138, 148. *&c.* Idem quoque animadvertit CARTESIUS in assignatis a TYCHONE, aliisque, parallaxibus; existimat enim, cum disputarent contra Veteres, qui Cometas inter meteora sublunaria numerabant, illos contentos fuisse ostendere Cometas esse in cœlo; nec ausos fuisse omnem, quam calculo deprehendebant, altitudinem iis tribuere, ne minus facile crederetur. Vid. *Princ. Philos. p.* 3. §. 41.

Ne tamen frigidiusculo hoc subterfugio eludere velle videar vere herculeam, quam Clarissimus HEVELIUS navavit in Parallaxium observationibus & calculo, operam; oportet illa accuratius examinare.

Existimat Cl. HOOKIUS in *Conamine suo motum Telluris probandi*, aciem nudi oculi quantumvis acutissimi non posse quantitatem minuto primo minorem discernere, unde concludit, etiamsi Heveliana instrumenta multoties majora fuissent, ita ut singula minuta secunda, imo tertia, distincte recepissent; quia tamen non nisi nudo oculo observationes institutæ, hinc non potuisse præcisius quam in minutis primis haberi: quod tamen in tam subtili Parallaxium negotio nequaquam sufficit. Quemadmodum igitur alibi Dn. HEVELIUS observationum Tychonicarum, quod ligneis duntaxat instrumentis peractæ, certitudinem extenuat; pari ratione & Tychonicas & Hevelianas, hac unica assertione, quod nudo oculo institutæ fuerint, cum Dn. HOOKIO explodere liceret.

Sed demus, etiam accuratissime ad quina vel terna minuta secunda observationes institui potuisse; per tot tamen ambages & anfractus in calculo incedendum, antequam deveniatur ad unicam

cam Parallaxin, ut quamvis error in singulis observationibus sit insensibilis, in connexione tamen & combinatione tot causarum supra modum foecundus evadat. Ut memorem saltem, quam difficile sit, Gedani, sub sphæra satis obliqua; vel solum tempus observationis genuinum ex reperta altitudine & azimutho Fixæ alicujus venari. Norunt enim, qui vel a primo limine Astronomiam salutarunt, quod quo obliquior sphæra est, eo quoque obliquius paralleli æquatoris & circuli almucantarath sese secant, & punctum intersectionis, a quo solo temporis exacta determinatio pendet, eo minus quoque præcise haberi potest. Sed si porro ad Refractionem attendamus, jam totum negotium parallacticum de novo desperatum corruit; eo quod refractiones, cum a physicis & mutabilibus dependeant causis, sub calculum & certas regulas revocari omnino nequeant. Exhibet quidem Vir Cl. *Lib.* 4. *p.* 357. Tabellam Refractionum Cometicarum; sed quam ipse non ex certo fundamento, verum pro arbitrio suo adornavit, tribuendo Cometis refractiones paulo minores quam Lunæ, & paulo majores quam Fixis; cujus rei hanc allegat causam, quod Cometæ plerique in Planetarum regione, id est, supra Lunam & infra Fixas ferantur; ubi manifestum committit circulum, dum supponit tanquam indubitatum, Cometas versari in Planetarum regione; quod demum, subducta refractione, & cognita Parallaxi, determinandum fuisset. No. I.

Negotium parallacticum in praxi incertissimum esse, certissimo nobis porro argumento est, quod etiam accuratissimi Observatores, TYCHO nempe & ipse HEVELIUS, in assignandis distantiis Planetarum, quos tamen non rarissime, uti Cometas, sed quotidie fere, observare contingit, immane quantum adhuc a seipsis dissideant; dum TYCHO Solis ex. gr. parallaxin 2 min. 53 sec. Cl. HEVELIUS autem non nisi 39 sec. 17 tert. reperiit, & sic in cæteris; unde HEVELIUS plerumque quinquies majorem distantiam cuique Planetæ tribuere cogitur, quam fecit TYCHO. Quare ubi Astronomi aliquot minutorum in Cometis Parallaxin observasse sibi nonnunquam videntur; eam omnem differentiam existimo potius inevitabili errori,

No. I. in calculo ex insensibilibus minutiis insuper habitis semper oborienti, adscribendam esse.

4 De Cauda. IV. Restat, ut de Cometarum *Cauda* aliquid adjiciamus. Eam perpetuo in plagam Soli oppositam vergere, *Petrus* APPIANUS primus deprehendit in Cometa anni 1531, uti liquet ex ejus *Mathematico Caesareo*; post quem idem observarunt *Hieron.* FRACASTORIUS, GEMMA & *Cornelius* FRISIUS, Astronomique ad unum omnes in singulis ab illo tempore Cometis; quo ipso, ceu individua proprietate, Cometæ nullo proprio se lucere lumine, sed omne Solis radiis acceptum ferre, manifesto utique argumento produnt. Quam caudæ dependentiam & affinitatem cum Sole etiam prædicti Authores agnoverunt. Quamvis enim cauda non subinde adeo accurate diametralem oppositionem observet, quin ab illa nonnunquam tres & amplius gradus boream versus deflectat; ea tamen declinatio ex sententia Authoris Gallici initio nominati, per refractionem in Atmosphæra nostra versus utrumque polum densiore quam sub æquatore, commode satis excusari potest.

Difficultas tantum in eo restat, ut explicetur, quare cauda perpetuo in Solis opposito conspiciatur, & qua ratione lumen solare illi communicetur? cujus rei causam redditurus Author modo dictus, corpus aut caput Cometæ sibi fingit diaphanum, globi vitrei instar, subscribens in hoc sententiæ APPIANI, CARDANI, ipsiusque TYCHONIS; alii vero simili ratione illud hiatibus & foraminibus patere sunt persuasi, per quæ transeuntes radii solares in æthere post Cometam in formam caudæ sese pingant. Sed absurde & ridicule. Nam 1°. si per globum vitreum negotium expediendum sit; tum crines cometici, dioptrica id demonstrante, semper in conum acuminatum coibunt, atque exinde non nisi caudis cuspidatis lucerent; quod tamen experientiæ Cometæ nuperi repugnat, qui coma calathoide fulsit. 2°. In purissima & pellucidissima aura ætherea, radii solares liberum inveniunt transitum, nec proinde in illa conspici possunt, quemadmodum in corpore opaco, a quo sistuntur, inque oculum nostrum repercutiuntur. Id quotidie testatur lu-

men

men per foramen vel lentem vitream in conclave incidens, id enim non pingitur in pellucido aëre, quem permeat, ſed in adverſo duntaxat pariete vel pavimento. Verum quidem eſt, pulviſculos per aerem volitantes, & radiis ſolaribus percuſſos, debile quoddam lumen in oculos noſtros reflectere; an vero in puriſſimo & defæcatiſſimo æthere tales dentur, quales in aere noſtro, pulviſculi; & ſi darentur, an hæ minutiſſimæ atomi e tanta diſtantia tam inſignem in terram ſplendorem vibrare queant, valde dubito; & ſi poſſent, quæ quæſo ratio foret, cur coma præciſe tantum a parte Cometæ averſa, nec ab omni ejus latere continenter ſpargeretur; imo quare non ſingulis noctibus totus aer Cometæ in modum colluceret, ſiquidem perpetuo totus, excepto ſolo, qui cono umbræ Planetarum involutus eſt, a Sole illuminetur. Si vero ſæpe dictus Author Gallicus regerat, ſpiſſiorem eſſe materiam, quæ radios ſolares excipiat; ejus ſane eſt explicare, quid illa ſit; necdum ſoluta foret quæſtio, quare hæc materia ſubinde averſam a Sole plagam peteret. No. I.

Quibus argumentis ſequens omni exceptione majus adjungo: Poſito, Cometas Sole (imo forte Saturno) altiores, uti ſupra laudatus Author mecum concedit; tum ſi cauda generatur ex radiis Solis per foramina vel pellucidam nuclei materiam tranſeuntibus, neceſſario ſequitur illam fore breviſſimam circa tempus conjunctionis cum Sole, longiſſimam autem in quadraturis; cui tamen hodierna experientia e diametro repugnat. Id ſibi quiſque facile perſuadebit, conſiderans, caudam, in conjunctione, radio viſivo parallelam excurrere debere: quod ex ſchemate, Terra exiſtente in *b*, Sole in *a*, & Cometa in *c*, liquido patet. Tab. I.
In quadraturis autem, cauda quidem ſitum parumper acquireret Fig. I.
tranſverſum, nec tamen angulum 5 gradibus 42 min. majorem in oculo ſubtendere poſſet, etiamſi reapſe in infinitam excurreret longitudinem; quod ut calculo experiamur, Sole exiſtente in *a*, Terra in *d*, & Cometa prope Saturnum in *c*, ita colligendum eſt: ut Radius orbis magni *a d*, ad diſtantiam Saturni a Sole *a c*, (i. e. ut 1 ad 10) ſic ſinus totus *a d* (100000) ad rectam *a c* (1000000), Tangentem anguli *c d a*, 84 gr.



No. I. 18 min. cujus complementum ad quadrantem est ang. *c d e*. 5 gr. 42 min. atque ita cauda Cometæ infinitæ longitudinis vix angulum 5 gr. 42 min. in oculo efficeret.

Quæ sit CARTESII de cauda Cometarum mens, & quo pacto rem per pressionem inæqualium globulorum explicet, hauriri potest ex ejus *Principiis*, *Part.* 3. §. 133. *&c.*

Cæterum, quia Barba vel Cauda Cometarum physicæ duntaxat considerationis, & ad motum Cometarum, quem solum nobis enucleandum proposuimus, parum facit; hinc non mihi vitio verti posset, si ea de re omnino tacerem. Ne tamen & hac in parte Lectori benevolo deesse videar, infra mentem meam de illa explicabo.

Systema Authoris. Itaque ut tandem aliquando ad rem ipsam descendam; juxta allatas hypotheses, tale mihi mundi systema formo. Ante omnia cum Excell. CARTESIO suppono, sapientissimum mundi Opificem materiam totius universi in plurimos divisisse Vortices, inque centro cujusque Vorticis Fixam posuisse, quam circa totus Vortex, non secus ac circa axem rota, ab occasu in ortum gyretur. Fixam Vorticis nostri appellamus Solem; Ipse vero Vortex, quem inde *Vorticem primarium* vel *Solarem* nuncupare lubet, in plures orbes ceu totidem concamerationes subdivisus, Planetis in domicilium cessit: Infima quidem & Soli proxima concameratio Mercurium excepit, altera Venerem, tertia Tellurem, Martem quarta, Jovem quinta, sexta Saturnum, extima denique & suprema Cometas. Isti vero Planetæ omnes in eo conveniunt, quod non sint corpora diaphana vel pellucida, sed solida, opaca & radiis solaribus impervia; dein, quod non propria luce fulgeant, sed illam omnem a Sole ceu Fixa sua mutuentur: In schemate adjecto littera *a* Solem exhibet: *b d*, Orbem magnum seu annuam orbitam Terræ: *m n*, orbitam Saturni: *f g*, partem orbitæ cometicæ.

Tab. I. Fig. I.

In hac ultima orbita punctum assumo *f*, super quo plures describo peripherias concentricas, ut *h r*, *x l*, *o p*, &c. & unicuique illarum peculiarem Cometam insero, quapropter totam peripheriphe-

ripheriarum compagem *Cometarum Verticem* nuncupabimus. Unde liquet, duplici Cometas moveri motu, partimque rotari in proprio Vortice circa punctum *f*, partim, una cum *f*, a Vortice solari abripi circa Solem *a*, plane ut Jovis Satellites, non modo in epicyclo circa Jovem, sed & totus epicyclus, una cum Jove & Satellitibus, a Vortice solari, tanquam a deferente suo, circa Solem ipsum abripiuntur. Itaque Cometæ nil aliud sunt, quam Planetæ secundarii puncti *f*, quod punctum haud dubie ab alio Planeta primario occupatur, qui vero tum ob corporis exiguitatem, tum ob immensam distantiam, conspectum nostrum perpetuo fugit; quæ causa quoque est, quare Cometæ tum demum videri incipiant, cum ad perigæum se demittunt, nobisque proximi evadunt. No. I.

Quod vero punctum *f*, seu centrum Vorticis Cometici, mobile quoque sit circa Solem *a*, in dubium amplius revocari nequit, postquam probatum fuit, spatium quod occupat, constituere partem Vorticis solaris, & consequenter cum toto reliquo Vortice ab occasu in ortum abripi: quod si enim immotum persisteret, Fixa potius esset quam Planeta, nec pars foret Vorticis solaris, sed peculiarem constitueret Vorticem. Porro si punctum *f* quiesceret immotum, sequeretur necessario, nullum Cometam motu suo sex integra signa absoluturum: Concipe enim portionem circuli *r h*, quam Cometa ab una statione ad alteram describit, tam parum habere convexitatis, ut lineæ rectæ quam simillima sit: imo ipsam rectam concipe utrinque infinite extensam; tum quidem angulus *r b h* vel *r i h* (qui ab utroque ejus termino in oculum nostrum incurrit) duobus rectis seu 180 gradibus magis magisque appropinquat, nunquam vero eos omnino attingit, eo quod tangentes anguli recti oportet utrinque in infinitum excurrant.

Et hæc ratio est, quare sæpe laudatus Author Gallicus sibi persuadeat, Cometam nunquam sex integra signa emetiri posse; quoniam haud dubie centrum Vorticis Cometici immobile concepit; unde quoque factum, ut stationem Cometæ nuperi perigæo suo nimis propinquam, nempe in basi Trianguli bo-

No.I. realis fixerit, quem tamen terminum novem gradibus ortum versus fuit prætergressus. Verum enim vero si punctum *f* mobile faciam, causam erroris ei pulcre monstrabo: Pone enim, dum Cometa in orbita sua arcum *c h* percurrit, punctum *f* interea in *g* usque prorepere, manifestum erit, motum Cometæ proprium in orbita *c h*, per motum puncti *f*, additamentum nancisci, quo fit, ut prior motus quoad visum nostrum tantumdem acceleretur, quantum prorepserit punctum *f*, oculusque noster in *i* constitutus stationem Cometæ non amplius in *h* (uti alias fieret, si punctum *f* omni motu foret destitutum) sed ulterius & in *q* deprehendat.

Enimvero, si porro consideremus, orbitarum cometicarum *hr*, *xl*, *op*, &c. nonnullas, centro *f* propiores & minores, nonnullas ab illo remotiores & majores esse; nonnullas velocius, alias tardius incedere debere; hinc rationem perspiciemus, cur nonnulli Cometæ majorem cœli arcum, alii minorem describant, & cur alii aliis in motu suo plus insumant temporis. Si perpendamus quoque, non necesse esse, ut diversæ hæ orbitæ Cometicæ in eodem cum Ecliptica plano existant; sed fieri posse, ut illam ad angulos nunc minores, nunc majores, imo nonnullæ ad angulos omnino rectos decussent, non secus ac duo orbes orthogonaliter sibi impacti, quales in sphæra armillari sunt ambo coluri; jam patebit ratio, cur Cometæ alii aliis plus minusve ab Ecliptica declinent, imo nonnulli ab uno polo ad alterum recta tendere necessum habeant. Insuper quia nulla necessitas cogit, ut planum orbitæ Cometæ alicujus oculum quoque nostrum implicet; hinc manifesta deducitur ratio, cur Cometa non semper in circulo maximo incedere, aut rectam subinde lineam, sed aliquando curvam describere videatur. Denique quia non impossibile est, ut orbita unius Cometæ ab occasu in ortum, alia ab ortu in occasum rapiatur; quid mirum est, quod Cometa novissimus secundum signorum seriem, Cometa vero anni 1664 contra eandem incesserit. Quia tandem centrum Vorticis cometici probabiliter aut in plano eclipticæ aut æquatoris existit, aut certe non longe ab utroque distat; hinc ratio reddi

reddi poteſt, cur nullus unquam viſus fuerit Cometa; qui non aut eclipticam, aut æquatorem, aut utrumque trajecerit. No. I.

Mens Authoris de Cometarum Cauda. *Tab. I. Fig. 2.*

His præmiſſis, antequam ulterius pergam, de formatione caudæ Cometarum, quæ mentem meam ſubierunt, hic interſpergam: Solem *a* in medio Vorticis ſui, tanquam ignem in foco accenſum, concipio, cujus calore circumfuſi Planetæ omnes aſſidue quaſi coquuntur; unde perpetuo magna ſubtiliſſimarum exhalationum copia 1. 2. 3. 4. &c. undiquaque ex Planetis, ut & ex ipſo Sole egreditur, & a motu rapidiſſimo Vorticis ſolaris ſurſum verſus circumferentiam propellitur; quo cum pervenerunt hæc effluvia, a renitentia vicinorum Vorticum *bc*, *de*, *&c.* repelluntur & impediuntur, quo minus ulterius ire queant; hinc quia ſubinde nova materia affluit, paulatim condenſantur, & Planetis ſupra-Saturninis *m*, *n*, (tum vero nondum exiſtentibus Cometis) dum per ſummam apſidem vel aphelium *g* rotantur, & circumferentiæ Vorticis ſolaris proximi ſunt, adhærent; non ſecus ac cum ſuper igne focario ſuſpenſa eſt olla carnibus repleta, fumus, e ligno carnibuſque aſcendens, camino, trabibus, &c. & quicquid ſolidi & compacti offendit, agglutinatur, unde fuligo gignitur; ſic, inquam, in modum fuliginis exhalationes viſcoſæ Planetis accreſcunt, illoſque undique ſatis denſiuſcule ambiunt ac cingunt; unde fit, ut nuclei Cometæ extremitas ſeu limbus plerunque male terminatus, & quaſi diffluens aut criſpus videatur, fuliginis inſtar. Tum vero in progreſſu, dum Planeta in ſuo epicyclo vel orbita circa centrum *f* volvitur, ſubinde novæ exhalationes (verum longe tenuiores, quam quæ ipſum immediate ambiunt, quod ob defectum ſolidi fundamenti nequeant tam arcte conſtipari) ei adhæreſcunt, longe lateque, omni ex parte, circa illum ſeſe extendentes; non quidem in modum globi, ſed lati diſci, ea lege, ut dum in circumferentia orbitæ ſuæ circa *f* movetur, nihilominus perpetuo alterutra diſci planities Soli obverſa maneat, radiique ſolares in nucleum incidentes cum diſco perpendiculares angulos efforment; plane ut nubes circa Terram normaliter expanſæ feruntur: cujus ratio peti poteſt ab æquali preſ-

No. I. pressione globulorum materiæ cœlestis, qua materia hæc disciformis, ceu ad bilancem appensa, in perpetuo conservatur æquilibrio, ut neutra ex parte Solem versus magis inclinare possit, quam ex altera. Qua quidem directione ad Solem fit, ut planities disci, non nisi in perihelio *P*, parallela sit circumferentiæ orbitæ suæ *RH*; in cæteris autem locis angulo subinde variabili, nunc minori, nunc majori eam secet, &c. Quo motu libratorio non male adumbrat motum inclinationis Telluris, quo perpetuum servat cum axe mundi parallelismum.

Cur vergat in Solis oppositum? Posita hac disci directione ad Solem, manifesta redditur ratio, cur cauda perpetuo in plagam Soli oppositam vergat; nam quamvis totus simul a Sole illuminetur discus, non tamen nisi pars illa disci, quæ nostri respectu, cis nucleum, & quidem in eodem nobiscum & cum Sole plano existit, radios ad oculum nostrum reflectit; reliquis ex adverso & a latere Cometæ alio repercussis; ita si Sol existat in *S*, Terra in *T*, discus Cometæ autem sit *lo*, nucleus *c*; recta *Sc* radius Solis nucleum normaliter feriens; manifestum est, non nisi radios in partem disci *cl* incidentes in partem Solis citeriorem, adeoque in Terram *T*, reflecti posse; dum illi, quos excipit pars disci *co*, alio, ultra Solem, in *p* repercutiuntur. *Tab. I. Fig.* 3.

Notandum interim, cum exhalationes omni ex parte nucleo adhærescere diximus; id non adeo præcise intelligendum, quasi nucleus undiquaque æquali semper exhalationum cingi copia, centrumque disci occupare debeat: potest enim fieri, ut ab altera parte, plus aut minus materiæ illi accrescat, prout ex hac vel illa plaga plus aut minus materiæ affluit: Ita quamvis cauda novissimi Cometæ 70 plus minus gr. subtenderat, non tamen sequitur, eam circum circa tot graduum spatium occupasse; fieri potuit, ut a parte opposita, vel a latere, modicum saltem materiæ, vel plane nulla adhæserit. Et hinc petitur ratio, cur non necesse sit, ut idem Cometa, visus mane ante Solis ortum, & vesperi post ejus occasum, eadem semper comæ longitudine sit conspicuus.

Tandem vero, ut ad specialem novissimi Cometæ enucleatio-

tionem descendamus, oportet duo puncta cardinalia ante omnia data sint, nimirum ejus *Perigæum*, & *Statio*. No. I. Cometæ nuperi consideratio.

Perigæum Cometæ ita reperio: Quoniam universi Cometæ a perigæo (vel potius perihelio suo) ante & retro æquali tempore æquales arcus describant necesse est; tria nobis considerandа Cometæ nostri loca, æquali ab invicem spatio remota, ea conditione, ut tantum præcise temporis a primo ad medium, quantum a medio ad ultimum, transeundo impenderit. Eorum locorum invenio unum in 10 gr. ♏ long. & 2 gr. latit. austral. quem locum Cometa occupavit 24 Novemb. 1680. Alterum in 0 gr. 20 min. ♒ long. & 21 gr. lat. bor. in quem Cometa incidit 20 Decembr. Tertium in 28 gr. 20 min. ♈. long. & 20 gr. 30 min. lat. bor. quem Sol pertransiit 15 Januar. 1681. Absolvit enim Cometa utrobique spatio 26 dierum, $81\frac{1}{2}$ gr. Quocirca Perigæum ejus extitisse æstimandum est loco medio, nempe 20 Decemb. in 0 gr. 20 min. ♒. Isto quidem die Cometa, non tam procera cauda ac splendida luce fulsit, quam biduo ante, 18 Decemb. cujus vero apparentiæ ratio est haud dubie, quod tum partim a Sole longius distaret, partim lumen ejus splendore crescentis Lunæ jam hebetari & infringi inciperet. Quod vero Perigæum ab Authore Gallico in locum adhuc novenis gradibus orientaliorem, nempe in 8 gr. 45 min. ♒ long. rejiciatur, quo Cometa non nisi $\frac{22}{1}$ $\frac{Dec.}{Jan.}$ & sic biduo tardius appulit, excusari omnino nequit; quare autem id facere coactus fuerit, facile divinare licet; quippe si Perigæum mecum fixisset in 20 Dec. tum ei concedendum foret, Cometam a Perigæo ad stationem plus quam quadrantem emensum fuisse; id quod Galli hypothesibus adversatur. Perigæum Cometæ.

Ad *Stationem* porro Cometæ quod attinet, eam deprehendi 7 Februar. S. V. medio loco inter Apem & Algol; sic ut a Perigæo ad stationem suam, spatio vid. 49 dierum, 99 gr. 51 min. in circulo maximo percurrerit. Statio.

Motus vero iste (uti ex supra dictis proclive est colligere) ex duobus vel tribus potius motibus conflatus est; scil. primo e Motus apparens Cometæ compositus.

No. I. Tab. I. Fig. I. motu Cometæ proprio in orbe ſuo *r h*, a *t* in *h*; dein e motu Vorticis ſolaris deferentis Vorticem Cometicum ab *f* verſus *g*; tandemque e motu Telluris ab *ſ* in *i*. Quando igitur motus proprius Cometæ in orbe *r h* ſeparatim explorandus venit, tum additamentum, quod illi a reliquis binis motibus ſpatio 49 dierum ſuperaccedere poteſt, ſubducendum eſt a 99 gr. 51 min.

Ex motu Terræ annuo. Augmentum quidem, quod motui huic accedit a tranſlatione Telluris in orbe magno *ſ b i*, oppido exiguum eſt, propter immenſam diſtantiam puncti *f*, quod ſic accipe: Terra exiſtens in *ſ* Perigæum Cometæ habet in *t*, ipſumque Cometam in Ecliptica obſervat tanquam in *y*. Interim dum Cometa arcum *t h* percurrit, transfertur Terra ab *ſ* in *i*, emetiens ſpatio 49 dierum, arcum totidem circiter graduum, atque ita ſtationem Cometæ animadvertit in *h*; ipſum vero perigæum hoc in ſitu haberet quidem citius quam in *t*, nempe in *u*; in hoc tamen perigæo Cometa illi appareret orientalior tanquam in *z*. Quare angulus *z f y* a 99 gr. 51 min. ſubducendus eſt ad habendum verum Cometæ motum, quatenus e quieſcente alias in *i* Terra obſervaretur.

Aſſumto ergo ſpatio, quod Saturnum inter & Fixas interjacet, 5146 ſemid. orbis magni, pro diametro Vorticis Cometici; ejus ſemidiameter, ſive diſtantia centri Vorticis *f* ab orbita Saturni, erit 2573 ſemid. orbis magni, ejuſque proinde a Sole *a* remotio, 2583 & a Terra *ſ*, *b*, aut *i*, 2584 ſemid. orbis magni. Quocirca in Triangulo *ſ f i*, ita colligo:

Ut diſtantia *f s*, aut *f i*, 2584 ſem. orbis magni, ad rectam *ſ i*, ſubtenſam anguli *ſ a i*, 49 circiter graduum, nempe 82938: ita *a s*, aut *a i*, 1 ſemid. orbis magni, ad 32, ſubtenſam anguli *s f i*, aut *z f y*, unius tantum ſcil. circiter minuti. Quare Perigæum e ſtatione Terræ *i* conſpectum, unico duntaxat minuto orientalius appareret, quam conſpectum e ſtatione *s*.

Calculo hoc Trigonometrico reperitur porro angulus *t s u*; trium circiter graduum, ad quos abſolvendos Cometa non plane integrum inſumſit diem; quapropter Cometa Terræ exiſtentis

tis in *i* unico die citius, quam existentis in *s*, perigæum subit. No. I.

Ut ergo inæqualitas, quæ e motu Terræ annuo propullulat, reducatur; addendus dies unus diebus 49; contra subducendum 1 minutum prim. a 99 gr. 51 min. sic restabunt 99 gr. 50 min. quem arcum Cometa 50 dierum spatio descripsisse censendus est.

E motu deferentis Vorticem Cometicum.

Hinc vero porro subtrahendus motus puncti *f*, quod ita intelligendum: E schemate manifestum est, omnium orbitarum cometicarum perigæa, vel potius perihelia, existere debere necessario in linea recta a Sole ad commune centrum orbitarum *f* ducta: Unde concludere proclive est; si Cometæ omnes eodem tempore perigæa vel perihelia sua subirent, eodem Zodiaci loco omnes reperti, mutuam ibi inter se conjunctionem efficerent. Cum itaque ex. gr. Cometæ anni 1664 Perigæum contigerit 20 Decemb. in 20 gr. ♊. nuperi vero Cometæ Perigæum anno 1680, etiam 20 Decemb. in 0 gr. 20 min. ♒, perinde est ac si dicerem, Lineam Perigæi *fa*, adeoque & ipsum punctum *f*, interea temporis, nimirum, sedecim annorum Julianorum, aut dierum 5844 spatio, a 20 gr. ♊ ad 0 gr. 20 min. ♒, id est, per arcum 220 gr. 20 min. prorepsisse.

Notandum vero, fieri bene potuisse, ut punctum *f*, intra dictum tempus, Zodiacum semel vel aliquoties integrum emensum fuerit; an vero & quoties id factum, sic indagabo: Siquidem certum sit, a 99 gr. 50 min. motu nimirum composito e motu proprio Cometæ & motu puncti *f*, tantum adhuc arcum subducendum esse, ut residuum, quod motum Cometæ proprium exhibebit, quadrantem non excedat; hoc posito, animadverto, puncto *f*, intra dictos 16 annos, non pauciores quam tres revolutiones integras tribuendas; si enim duas tantum ei largiaris, & præterea arcum supra dictum 220 gr. 20 min., id est, in universum 940 gr. 20 min., tam 50 dierum spatio, quos impendit Cometa a Perigæo ad stationem suam, punctum *f* non nisi 8 gr. 3 min. proreptasset, quibus a 99 gr. 50 min. subductis, plus quam quadrantem habebis in residuo. Si vicissim ponamus, punctum *f*, interea temporis, quater aut pluribus vicibus integrum Zo-

No.I. diacum permeasse; tum arcus subducendus, qui 50 diebus respondet, nimis evaderet magnus, quo fieret, ut Cometarum apparitiones non tam raræ, ut sunt, verum longe frequentiores essent, ut ex infra dicendis patebit.

Ratum itaque maneat, punctum *f*, 16 annorum spatio, 220 gr. 20 min. & insuper integrum Zodiacum ter peragrare; atque adeo annis 4, diebus 157, unam absolvere revolutionem; 50 vero dierum spatio, arcum 11 gr. 7 min. describere. His ergo subductis a 99 gr. 50 min., in residuo manebunt 88. gr, 43 min. pro motu Cometæ proprio in orbita sua *u h*, id est, pro angulo *f i h*.

Et hoc cum principiis subtilissimi CARTESII apprime convenit; is enim demonstrat in *Princ. Phil. part.* 3. §. 82. velocitatem gyrationis Vorticis a Sole subinde languescere ad certum usque terminum, nempe orbitam usque Saturni; ultra quam iterum incrementum sumat, ut antea decreverat; sic ut nil absurdi sit, centrum Vorticis Cometarum *f*, intra annos 4 & dies 157, unam circa Solem revolutionem absolvere; etiamsi Saturnus nobis ducenties quinquagies octies propior, id non nisi 30 annorum spatio præstet.

Tabella motus Perigæi. Quocirca super hanc hypothesin construxi, quam pag. 27. adjectam conspicis, *Tabellam motus Perigæi*; e qua motus ejus diurni quantitas pro singulis diebus patescit. Ejus usus in eo consistit, ut dato tempore apparitionis Cometæ, prædici possit, quo loco Zodiaci tempore Perigæi sui appariturus sit; quod sic investigabitur: Sume numerum dierum ab Epocha Tabellæ, nempe a 10 Decemb. 1680, ad datum tempus elapsorum; iisque in articulos dissectis, pro millenariis, centenariis, denariis & monadicis, gradus & minutias competentes e Tabula deprome, eosque in unam summam collige, indeque integrum circulum, quoties fieri poterit, abjice; residuum tibi patefaciet, quantum arcum Zodiaci linea Perigæi emensa sit, incipiendo a 0 gr. 20 min. ♒ & secundum signorum seriem progrediendo.

E motu Proprio. Postquam itaque subducto arcu 11 gr. 7 min. (quem centrum

trum Vorticis Cometici intra 50 dies, indice Tabella; descripsit) comperio, pro Cometæ motu proprio relinqui angulum *f i h*, 88 gr. 43 min. inde porro ratio iniri poterit, quantum arcum dicto tempore Cometa super centro *f*, & in proprio suo orbe *u h*, descripserit. Eum in finem considero triangulum *f h i*, ejusque angulum datum *f i h*, 88 gr. 43 min. Triangulum hoc, cum sit orthogonium ad *h*, oportet ut angulus obliquus *h f i* sit dati obliqui *h i f* complementum, nimirum 1 gr. 17 min. Quare Cometa a Perigæo ad stationem suam super proprio centro arcum 1 gr. 17 min. descripsit; unde sic colligo: Si 1 gr. 17 min. Cometa spatio 50 dierum absolvit; quantum insumet temporis ad absolvendam integram periodum? Facit, annos 38, dies 147. *Cometam igitur hunc ipsum in Perigæo suo denuo videbimus* (Deo volente, nobisque viventibus) *anno Christi* 1719, *die* 27 *Maii, S. V. & quidem in* 1 *gr.* 12. *min.* ♎. *

No. I. Tab. I. Fig. I.

Futura apparitio Cometæ nostri An. 1719.

Præterea, quia admodum probabile, imo necessarium est, ut Cometæ in propria sua orbita perpetuo æqualiter incedant (cur enim motui corporum cœlestium & æternorum, qualia supponimus esse Cometas, sine sontica causa inæqualitatem & irregularitatem affingeremus?) ideo motus Cometæ diurnus nobis innotescet, dummodo arcum *u h*, 1. gr. 17 min. in 50 æquales partes dividamus (NB. in schemate arcus *u h*, ob spatii angustiam, in quinas duntaxat partes distributus) sic provenient pro singulis diebus 1 min. 32 sec. Unde porro in Triangulis *α i u*, *β i u*, *γ i u*, *δ i u*, &c. arcus vel anguli, quos Cometa quotidie, penes *i*, in oculo nostro format, calculo trigonometrico eliciendi; quos quidem aliis supputandos relinquo, id solum advertens, ut pro quolibet die additamentum, e motu puncti *f* resultans (quod e Tabella motus perigæi depromi poterit) adjiciatur.

Non quidem mihi adeo sum Suffenus, quia circa has meas

* *Authoris prædictionem eventu confirmatam non fuisse nemo nescit. Videatur tamen Responsio ad Object. I. pag.* 28. [Nota Editor.]

No. I. allatas hypotheses, multas adhuc & magnas difficultates ab Astronomis detectum iri persuasissimus sim; sed confido tamen, eos facilem Authori daturos veniam, si perpendant, omne, ut vulgo aiunt, principium grave esse; nec omnibus numeris absolutum Cometarum systema ita ex abrupto, & manibus, quod aiunt, illotis, sed post accuratissimas demum observationes & post longam earum seriem expectandum: Sufficiat mihi, hoc qualicunque conamine aliis majori instrumentorum apparatu instructis, & in hac arena versatioribus ansam dedisse, ut in rem ipsi inquirerent, & systema mancum adhuc & mutilum, si fieri posset, ad perfectionem deducerent. Quod si eventus prædictioni meæ suo tempore respondere deprehendatur, tum meæ hypothesi tuto insisti poterit; sin minus, unicuique integrum erit addere, demere, mutare, corrigere pro lubitu. Quoniam vero magnum adhuc eousque restat temporis intervallum; optandum esset, ut aliorum Cometarum (quorum apparitiones jam dudum elapsæ, veluti Cometarum an. 1652 & 1664) motus periodici calculo subjicerentur; quod fecissem ipse, si sufficientes eorum observationes ad manus habuissem.

Systematis cum apparentiis convenientia. Sed quicquid tandem sit de hypothesi mea, certum est, plerasque inæqualitatum & irregularitatum apparentias, in Cometis deprehensas, exinde sic satis commode deduci posse. Hinc enim evidens ratio redditur;

1. Cur Cometæ nonnunquam plus 6 signis, vel semicirculo perlustrent?

2. Cur nullus detur Cometa, qui non trajiciat aut Eclipticam, aut Æquatorem, aut utrumque.

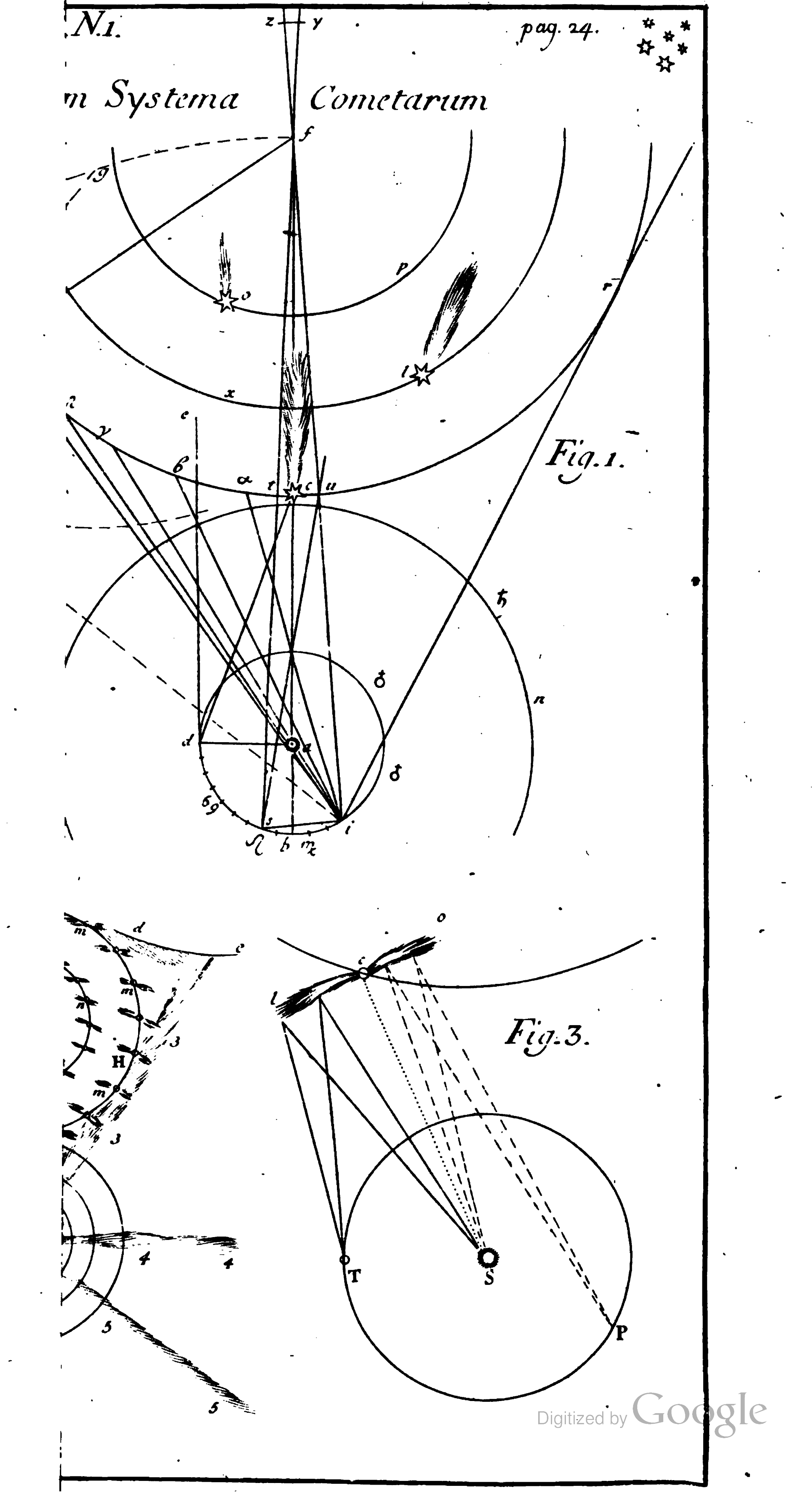
3. Cur Æquatorem aut Eclipticam tam diversis secent angulis, aliqui obliquius, alii rectius, nonnulli etiam ad angulos omnino rectos.

4. Cur nodus Eclipticæ & Orbitæ Cometicæ sit mutabilis?

5. Cur oculorum nostrorum judicio non semper lineam rectam vel arcum circuli maximi describant?

6. Quare nonnulli seriem 12 signorum observent, alii contra illam incedant,

7. Cur


N.1.
pag. 24.
m Systema Cometarum
Fig. 1.
Fig. 3.
T
S
P

7. Cur Perigæa non eodem omnes Zodiaci loco fixa habeant? No. I.

8. Quare aliqui plures, aliqui pauciores gradus motu diurno emetiantur?

9. Cur nonnulli, a primo apparitionis tempore ad stationem usque suam vel disparitionem, arcum majorem, alii minorem describant?

10. Cur cauda perpetuo in partem a Sole aversam tendat?

11. Posse fieri, quamvis rarissime fiat, ut duo, tres, pluresve Cometæ simul appareant.

12. Posse prædici, quando quisque Cometa denuo sit appariturus.

13. Et quo in loco Perigæum suum habiturus sit? &c.

Exhibentur nunc in Tabula diurnæ observationes Cometæ novissimi, quas cœlo quidem sereno mihi depromere licuit; & quamvis ob instrumentorum necessariorum defectum nudis tantum oculis & per filares extensiones factæ, satis tamen accurate observationibus sæpe laudati Authoris Gallici respondent: Non necessarium visum fuit, eas schemate depictas hic exhibere, quia tales iconismos vulgus, non secus ac lyram asinus, intueri solet; astronomiæ vero vel leviter periti, ex solis longitudinibus & latitudinibus hic annotatis, lineæ a Cometa descriptæ vestigia globo suo cœlesti ipsimet imprimere facillimo negotio possunt.

Obser-

Observationes Cometæ annorum 1680. & 1681.

1680. Mens. & Dies.		Long.	Latit.	Motus diurnus.		Motus à Perigæo in summam collectus.		
St. N.	St. V	S: o. ʹ.	o. ʹ.	o.	ʹ.	o.	ʹ.	
Dec. 4	Nov. 24	♏ 10. 0.	2. 0. A.	76.	40.	81.	30.	Observatio est Cl. D. D. *Petri Megerlini.*
29	Dec. 19	♑ 25.30.	18.40. B.	4.	50.	4.	50.	Sub pectore Ganymedis.
30	20	♒ 0.20.	21. 0. B.	0.	0.	0.	0.	Cometa in perigæo, & æquatorem transilit.
31	21	5.20.	22.30. B.	4.	50.	4.	50.	
1681.								
Jan. 2	23	15. 0.	24.30. B.	9.	5.	13.	55.	
8	29	♓ 12.30.	28. 0. B.	25.	25.	39.	20.	
9	30	17. 0.	28. 5. B.	3.	30.	42.	50.	In pectorali Pegasi.
11	Jan. 1	25.30.	27.50. B.	7.	25.	50.	15.	
15	5	♈ 8.50.	26. 0. B.	12.	0.	62.	15.	Prope caput Andromedæ.
17	7	14. 0.	25.30. B.	4.	30.	66.	45.	
18	8	16.40.	25. 0. B.	2.	40.	69.	25.	Prope humerum ejus australem.
24	14	26.50.	20.25. B.	10.	30.	79.	55.	Ex orbita sua in meridiem paululum
25	15	28.20.	20.30. B.	1.	35.	81.	30.	deviat; sed binis diebus sequenti-
26	16	29.40.	20.50. B.	1.	25.	82.	55.	bus boream subito repetit.
Febr. 4	25	♉ 9.40.	17.25. B.	10.	0.	92.	55.	In basi trianguli borealis.
5	26	10.20.	17. 5. B.	1.	0.	93.	55.	
6	27	11. 0.	17. 0. B.	0.	55.	94.	50.	
7	28	11.35.	17. 0. B.	0.	52.	95.	42.	
16	Febr. 6	16.40.	15.30. B.	5.	15.	100.	57.	Inter apem & algol.
17	7	16.40.	15.30. B.	0.	0.	100.	57.	Statio & disparitio.

Sic motus Cometæ a Perigæo ad stationem usque, in unam summam collectus, est graduum 100, min. 57. Quoniam vero Cometa ex orbita sua nonnihil deviaverat, toto suo illo motu in circulo maximo non nisi 99 gr. 51 min. absolvisse censendus est.

Maxima ejus ab Æquatore declinatio est 32 gr. Ascensio recta

-ta sectionis eorum, non saltem est 292 gr. ut habet Authoris Gallici Ephemeris, sphalmate haud dubie typographico; sed 208 gr. quanta quoque est ascensio sectionis obliqua in omni sphæra, Gallo ridicule hic distinguente ascensionem, quoniam recta & obliqua in puncto sectionis necessario quantitate coincidunt. No. I.

Angulus Orbitæ Cometicæ & Eclipticæ est 28 gr. 5 min. Coma cum maxima & splendidissima erat, spatium 70 circiter graduum in cœlo occupavit.

Idem Cometa perigæum suum & aspectum nostrum denuo subibit anno 1719. *d.* 27 *Maii, in* 1 *gr.* 12 *min.* ♎. Sequitur

Tabella Motus Perigæi Cometarum, incedentis secundum signorum seriem. Epocha seu Radix ejus fixa est $\frac{20}{30}$ *Decemb.* 1680, *in* 0 *gr.* 20 *min.* ♒.

Dies.	gr. m.	Dies.	gr. m.	Dies.	gr. m.
1	0..13.	20	4..27.	200	44..30.
2	0..27.	30	6..40.	300	66..45.
3	0..40.	40	8..54.	400	89.. 0.
4	0..53.	50	11.. 7.	500	111..15.
5	1.. 7.	60	13..21.	600	133..30.
6	1..20.	70	15..34.	700	155..45.
7	1..33.	80	17..48.	800	178.. 0.
8	1..46.	90	20.. 1.	900	200..15.
9	2.. 0.	100	22..15.	1000	222..30.
10	2..13.				

Dies.	gr. m.	Dies.	gr. m.
2000	445.. 0.	20000	4450.. 8.
3000	667..31.	30000	6675..13.
4000	890.. 1.	40000	8900..17.
5000	1112..32.	50000	11125..22.
6000	1335.. 2.	60000	13350..26.
7000	1557..32.	70000	15575..30.
8000	1780.. 2.	80000	17800..35.
9000	2002..33.	90000	20025..39.
10000	2225.. 4.	100000	22250..44.

No. I. Solutio objectionum.

Duæ hic, contra hypothesin meam, formari solent objectiones, quibus, antequam ulterius progrediar, satisfaciendum est.

Objectio I. Si Cometa nuperus, singulis 38 annis, revolutionem absolvit & mortalibus de novo conspicuus redditur; tum sequitur eum ante 38 annos quoque apparuisse, quod tamen factum fuisse nemo meminerit. Ad hoc duo respondeo: 1°. non omnes, quoties Perigæum pertranseunt Cometæ, semper in Terra conspiciuntur; imo quam plurimos pertransire, qui ob cœlum diutissime nubibus obsitum & ob alias rationes, nunquam sub aspectum nostrum veniant, ipse Cl. HEVELIUS firmiter sibi persuasum habet. Exemplum habemus, ut reliqua silentio prætercam, in Cometa 1672, a Celeb. Dn. CASSINIO Astronomo Regio Parisiensi observato. Is enim initio diutissime sub Solis radiis hypaugus latuit, dein crescentis Lunæ splendore quoque imminutus, & postremo ob cœlum continue nubibus tectum, ultra mensem inconspectus latuit, ita ut non nisi paucis diebus, qui restabant ad omnimodam ejus disparitionem, observari potuerit, referente *Diario eruditorum* (Journal des Savans) *anni* 1672, *ad d.* 11 *Aprilis*. Quod si triduum vel quatriduum adhuc Cometa hic latitasset inconspicuus, ejus certe perpetuo obliterata mansisset inter nos memoria. 2°. Præcipue vero respondeo, distinguendo inter nucleum Cometæ ejusque caudam; nucleus potest regulariter & statis temporibus redire; cauda vero, cum probabiliter ad essentiam Cometæ non pertineat, & tantum ex accidenti nucleo accedat, potest, ut antea circa apogæum nucleo adhæserat, circa perigæum calore Solis & continua gyratione Vorticis Cometici sensim iterum dissipari & dissolvi; sic ut idem nucleus quandoque redire possit cum longiore, nonnunquam cum breviore, aliquando cum nulla vel saltem tenuissima cauda (astipulante HEVELIO *Lib.* 7. *Cometogr. p.* 405.) & ubi sic redit, facile fit, ut inter agmen Fixarum Cometo-Planetæ hujus nulla habeatur ratio, & ut sic inobservatus transeat. Imo, si nucleus ab omni etiam materia fuliginosa, qua antea dense erat involutus, liberetur; potest esse tam exilis, ut vigilantissimi quoque observatoris visum perpetuo fugiat.

Ob-

Objectio II. Si Cometæ corpora sunt perpetua & mundo concreata, motumque possident regularem, & statas suas habent apocatastases; tum nequeunt esse signa & omina imminentium malorum. *Resp.* An Cometæ irati Numinis signa & malorum præsagia sint, magna adhuc inter omnis generis Doctos controversia est; negotium si quod est, id totum ad Theologos pertinet, quorum est determinare, quid ea de re Scriptura nobis revelaverit: Astronomus eam quæstionem, nisi extra oleas vagari velit, omnino intactam relinquere tenetur. Quocirca, in foro cum sim astronomico, nec assero Cometas esse malorum præsagia, nec illud manifeste nego; verum nec me negare ex hypothesi mea jure colligitur; nam 1°. qui sic objiciunt, non animadvertunt, Caput & Caudam posse esse res toto cœlo diversas; meque scopum meum, qui fuit, ut motum Cometarum sub perpetuas leges reducerem, obtinere posse, dummodo id circa Cometæ caput præstitero, (nec enim, ut crasso simili utar, in cursu equi, bovis aut alterius animantis caudam respicimus, sed solum caput, quod cauda sponte insequi solet.) Accedat ergo capiti cauda, undecunque velit; generetur & corrumpatur toties quoties conspicitur; sit opus naturæ, vel irati Dei indicium; per me licet; dummodo nucleus sit originis perpetuæ, ingenerabilis & incorruptibilis, statasque suas habeat revolutiones. Dicamus igitur, caput Cometæ ordinarie omni cauda destitutum ad perigæum appellere, & non nisi tum, cum Deus generi humano iram suam annunciare vult, cauda instructum apparere; cum non nisi cauda sit, quæ terrorem mortalibus incutere solet. 2°. Sed nec eo me responsionis devenire necessitas cogit: Quamvis enim Caudam Capiti essentialem & coævam esse existimarem, nondum, quæ mihi improperatur, irreligiositatis convincerer: nunquid enim fieri potuit, ut sapientissimus Creator, qui omnia prævidit ab æterno, imo per cujus decretum & ordinationem est quicquid est, Cometarum motum ita ordinaverit, ut tum demum conspicui fieri debeant, cum pœnas mundo annunciare constituit; & vicissim ut pœnas suas per hæc fatalia sidera non nisi tum annunciare velit, cum Cometa se- No. I.

E 2 cun-

No. I. cundum regularem suum & sibi a creatione inditum motum incedens, ad perigæum descendere & mundo conspicuus fieri; etiam citra rationem intentionis hujus divinæ, tenetur. Multi egregii Viri trium superiorum Planetarum conjunctiones pro præsagiis habuerunt universalis alicujus catastrophes; quin & eclipses credidere mundo fatales; quamvis hæc omnia juxta ordinarium naturæ cursum eveniant, statasque suas habeant vicissitudines. Quis unquam inficias ivit, Irides esse gratiæ, & Terræ-motus iræ Divinæ signa? num vero credamus, Deo semper miracula patranda esse ad istiusmodi res producendas; & necessum esse, ex. gr. ut Deus nubem roscidam, contra naturalem ordinem & impulsum aliarum nubium, super limbo horizontis circumrotet, usque dum in oppositionem Solis perveniat, Iridem ibi pictura? aut vero ut ventos (halitus sulphureos) e longinquo, modo plane supernaturali, & instar Judæorum גלגל המתים, per terræ cavernas violenter huc adducat, ut terram sub pedibus nostris contremiscere faciat? Nunquid credibilius est, Deum suo naturæ cursu relicto, ad talia producenda effecta adhibere proximas quasque nubes & vapores, eorumque naturalem & constantem motum; adeo ut & hæc effecta prædicere possemus, si Physica ad eum jam perfectionis gradum exculta esset, ut causæ horum effectorum mutabiles & variabiles in certas leges reduci possent. Sed, instas, si præsciri potest a nobis, Cometam novissimum rediturum elapsis 38 annis, sequitur, mundum tum temporis, inevitabili fato, in perverso jacere debere, & non posse non Deum per crimina sua invitare ad iræ suæ facem accendendam. *Resp.* Nisi ergo nos quid præsciamus infallibiliter, illud nec credis esse ratum & fixum ratione decreti & præscientiæ divinæ? absit! Si itaque Deus mundi peccata præscit infallibiliter, sic tamen ut ejus præscientia non necessitet aut vim inferat voluntatibus mortalium; multo minus nostra, si qua detur, præscientia malorum necessitabit; eo quod non a nobis, perinde atque a Deo, voluntates hominum peccatorum dependeant. Aut si præscientia futurorum malorum prophetica, hausta ex immediata revelatione divina,

non

non necessitavit; quare, quæso, necessitaret præscientia nostra naturali lumine acquisita? No. I.

Ut verbo tantum adhuc addam, quid tenendum de particularibus Astrologorum, ex Astris, & cumprimis ex Cometis, prædictionibus; eas non tantum a Theologis, sed quibusvis Christianis recte sentientibus merito rejici existimo. Præstantissimi modernorum Astronomorum ipsi vanitatem Astrologiæ judiciariæ abunde satis agnoscunt; GASSENDUS eam ludibrio excipit, HEVELIUS nauci facit, CARTESIUS omnino tacet; &c. Imo vix adduci possum ut credam, quemquam Astrologorum eo usque rationem exuisse, ut suis ipse prædictionibus fidem adhibeat; quamvis, vel spe turpis lucelli, vel gloriolæ apud superstitiosam plebeculam consequendæ, vel Principum, quibus bona præsagiunt, favorem aucupandi gratia, eas utplurimum pro delphicis oraculis obtrudere soleant. Et sane quis a cachinno sibi temperare valeat, cum arenosum vanissimæ Pseudo-scientiæ fundamentum, prædictiones vere e Delphica tripode petitas & manifestis æquivocationibus laborantes, ut & in terminis generalissimis conceptas, ac variis conditionibus, limitationibus, vanisque subterfugiis circumvallatas Astrologorum locutiones, tandemque absurdissimas eorum consequentias, a baculo ad angulum concludentes, æqua trutina perpendit.

De Astrologia judiciaria.

Post tam ingenuam confessionem, satis mirari nequeo, quosdam adhuc reperiri, qui Astrologiæ me addictum absurde suspicantur, propter ludicrum prognosticon in calce editionis germanicæ adjectum; quod propterea, ne infirmo eorum judicio porro offendiculo sim, studio hic omitto. Quilibet, nisi admodum obesæ naris homo, facile subolfacere potuit, prognostici scopum alium nullum fuisse, quam ut ineptissimas Astrologorum ratiocinationes, eorumque ex quolibet quidlibet eliciendi artificium facete traducerem, & ostenderem me, ex iisdem fundamentis, Principibus male ominari posse, e quibus parasiti bona iis præsagire solent.

Sequitur Examen ſententiæ Hevelianæ de Cometis.

No. I. Syſtema Hevelianum.

FInem tandem ut imponam Tractatui huic, videndum reſtat, an incomparabilis Viri Dn. HEVELII opinio, quam in pretioſo ſuo Opere Cometographico, ex profundiſſimis Matheſeos penetralibus erutam nobis pandit, omni difficultate careat. Ejus enim ſi ſententia obtineat, jam totum meum Conamen de Cometarum prædictionibus irritum corruet. Ut vero ordine eam, ante omnia ejus mentem de Cometarum ortu, ſeu generatione, ac motu, explicabo.

Clariſſimi Viri mens eſt, Planetas omnes habere ſuas circa ſe Atmoſphæras, quod de ſingulis prolixe probat, *Lib. 7. p.* 352--374: in qualibet atmoſphæra, a corporibus ipſis Planetarum indeſinenter multas exhalationes expirari & emitti, quarum craſſiores in atmoſphæra permaneant, ſubtiliores autem ultra illam aſcendant, & in univerſum ætherem ſe diffundant; dum autem ſic vagantur, facile fieri poſſe, ut & aliarum atmoſphærarum effluvia ſeſe iis jungant, pinguiores & tenaciores craſſeſcant & coagulentur; hinc varios generari nucleos, intercedente tamen ſubinde materia rariore, ut ſuo tempore iterum diſſipari & in tenuiſſimos halitus diſſolvi queant, *p.* 383. Hanc autem variorum nucleorum congeriem, non globoſam, ſed diſciformem eſſe, planitiemque alterutram perpetuo ad Solem convertere; hinc fieri, ut radii ſolares per diſcum Cometæ tranſeuntes, partim refracti, partim reflexi, in plaga Soli oppoſita caudam efforment; quoniam vero, in puriſſima & ſubtiliſſima aura ætherea, radii hi terminari neutiquam poſſent, niſi materia aliqua reliquo æthere denſior poſt Cometam lateret; hinc exiſtimat, materiam cometicam non omnem in nucleum coagulatam fuiſſe, ſed pleramque manſiſſe dilutiorem, quæ totum Cometæ corpus undiquaque quaſi ſepiat, & atmoſphæram etiam quandam circa illum gignat; hanc vero materiam tenuio-

nuiorem vi caloris Solis rarefieri, extenuari; & a parte antica, ac ab utroque latere propelli in partem a Sole aversam, *p.* 476-478. No. I.

De Cometarum Motu sic statuit Author: Cum primum Cometa *m n*, in atmosphæra Planetæ alicujus, v. gr. Saturni primordia cœpit, coagulatis scilicet, quantum satis est ad motum concipiendum, exhalationibus; moveri incipit recta versus systematis vel vorticis sui extremitatem; qui motus cum motu atmosphæræ gyratorio concurrens, lineam spiralem *a b c d* efficit, quam dum describit Cometa, continuo alteram faciem disci sui corpori Planetæ, cui ortum debet, obvertit. Tandem vero, cum ad extremos orbis vaporosi terminos pervenit, a concitatissima circumrotatione Vorticis in vastissimum ætherem expellitur, & retento hoc pristino impetu, motum suum continuat per lineam rectam *e f*, quæ tangit Vorticem in puncto separationis *e*, ut solent omnia corpora in gyrum acta, exemplo lapidis e funda projecti, *p.* 648: ubi notandum, quamprimum Cometa a Vortice suo avulsus ætherem subintravit, subito planitiem disci sui a Planeta ad Solem convertit, & eodem postea situ Solem perpetuo aspicit; quo fit, ut Cometæ discus *m n* lineam directionis *e f* subinde sub alio & alio inclinationis angulo secet. Unde porro probare nititur Cl. Vir, ejus Trajectoriam, quam vocat, debere esse non omnino rectam, sed parabolicam, quæ a recto tramite *e f* in eam semper partem deflectat, quæ Soli vicinior est, qualis est *u y*; id quod per motum Velificationis ingeniosissime illustrat. Postquam enim, a *pag.* 576. &c. egregie & prolixe disseruisset de gubernaculi natura, illud vecti comparans, & astruens, contra Aristotelem aliosque Mechanicos recentiores, potentiam moventem navigii non esse in nauclero ad clavum sedente, sed in aqua ad temonem alluente; tandem asserit, *pag.* 585. omne corpus oblongum & planiforme habere suum quasi temonem naturalem. Tab. IX. Fig. 1.

Sciendum autem, ita comparatum esse cum Nave, ut quamdiu temo secundum flaminis, aut fluminis, tum etiam longitudinis navigii ductum parallelum directus & constitutus est, haud

possit

No. I. possit aliter quam perpetuo in directum propelli; quamprimum vero temo in alterutram partem flectitur, sic ut aqua illum oblique alluat, navis pedetentim a recto tramite declinabit, & quidem in illud latus proram obvertet, in quod temo collimat: quod porro variis schematibus, ut *pag.* 572. 670, inprimis autem *p.* 680, illustrat.

Tab. II. Fig. 2. Sit enim Cymba vel Scapha *m n*, oblongorum laterum & absque gubernaculo, cum ipsa sibi temo sit naturalis; ejus latera primo exponantur, ut in *o*, parallela cursui fluminis descendentis ab *a* versus *b*; sit in ripa Director *c*, qui ita dirigat navigium *m n*, duobus funiculis *c m* & *c n*, in prora *m* & puppi *n* appensis, nullam tamen motui ejus vim inferendo, ut navigium semper sub angulo normali aspiciat. Igitur quando sic navigium ab *a*, secundum fluminis ductum, versus *b* moveri incipit; statim se cuspis navigii, a ductu parallelo alvei *a b*, versus directorem inflectit, ut in *u*; & quo longius descendit, eo rectius se cursui fluminis *a b* obvertit, ut in *x*, *t*, *y*. Hac autem deviatione a directionis linea *a b*, existimat Vir Cl. fore, ut navigium tum, non solum ad cursum aquarum *a b* deferatur, sed simul aliquanto propius ad ripam, cui director insistit, accedat; siquidem prora navigii *m* illuc vergit; ita ut, loco rectæ *a o b*, describat lineam paulisper inflexam *o u x t y*.

Eodem porro schemate retento, si *c* sit Sol, *m n* discus Cometæ Soli perpetuo orthogonaliter expositus; *a b* linea, secundum quam Cometa impulsus est: Rationem putat reddere Vir Cl. quare Trajectoria Cometæ non omnino sit recta juxta impulsum *a o b*, sed parumper inflexa & parabolica, qualis est linea *o u x t y*.

Talia felicissime inventa & subtilissime applicata fusius deducta invenies, *Lib.* 9. *Cometogr.* Clariss. Viri. Difficultates, quas librum hunc raptim perlustrando, in hypothesi ejus deprehendisse mihi videor, paucis exponam. Earum quædam sunt Astronomicæ, vel Opticæ, & apparentias concernunt; aliæ Physicæ, & rei ipsius veritatem spectant.

Difficultates Systematis Heveliani.

Quod ad Apparentias attinet, an calculus Clariss. Viri omni ex

ex parte iis satisfaciat; ob tædiosam prolixitatem examinare non vacavit; credo tamen facile, perspicacissimi Authoris tantam fuisse vigilantiam, ut in negotio licet prolixissimo, falli haudquaquam potuerit. Sequentes interim scrupuli mihi negotium facessunt. No. I.

1. Si Trajectoria Cometæ est linea propemodum recta, Vorticem e quo egressus est, in puncto separationis tangens; tum possibile est, hanc Trajectoriam nonnunquam Terræ alicubi adeo propinquam esse, ut cum Cometa illac transit, Terram radat, quin ab illa omnino perforetur; quod quamvis Viro Clar. non absurdum videatur, ideo tamen, meo judicio, admitti non potest, quod alias Cometa in perigæo existens, ubi majori plerumque lumine ob vicinitatem oculos nostros ferire solet, contra subito dispariturus, atque eclipsin passurus esset, ob umbram Terræ, cui involveretur; quod tamen nunquam animadversum.

2. Præterea Cometa, eadem ratione, reliquorum Planetarum, qua Terræ, atmosphæras ingredi, trajicere, & ipsorum corporibus allidi posset. Sed hoc casu rogarem Virum Clariss. an dum Cometa ingreditur Planetæ atmosphæram, recta illam trajiciat, quod tamen, supposita & concessa a Cl. Viro atmosphæræ in orbem gyratione, concipi nequit; an vero ab illa abripiatur, & sic participans de utroque motu, recto nimirum sibi proprio & circulari Vorticis, spiras describat a circumferentia ad centrum Vorticis, contrarias illis, quas descripserat a centro Vorticis Planetæ (in quo incunabula sumsit) ad ejus peripheriam: Et si sic abripiatur; num planities nuclei cometici semper maneat Soli obversa; num vero ad illum Planetam convertatur, a quo abripitur. Si prius dicat, rogarem, cur spiræ illæ nobis e Terra aspicientibus non observarentur? Si posterius, qui fieri possit, ut Sol, per planitiem nuclei, ad quam obliquus esset, radios suos transmittere & caudam illuminare queat?

3. Si Cometa ejicitur ex atmosphæra, vi rapidissimæ ejus gyrationis, modo quo vult Cl. HEVELIUS; tum, aut ex æquatore Vorticis, aut ex aliquo ejus parallelo necessario ejiceretur:

No. I. Utrumvis dicatur, Trajectoria oportet sit in plano, vel ipsius æquatoris Planetæ, vel ad minimum in plano aliquo ei parallelo: atqui omnium Planetarum æquator propemodum coincidit cum æquatore aut ecliptica nostra; quocirca Trajectoria Cometæ nunquam posset ab æquatore vel ecliptica nostra enormiter declinare, tantum abest, ut alterutram unquam normaliter secaret, & Cometa recta ab austro in boream trajiceret; contra manifestam experientiam Cometæ 1652.

4. Si Cauda Soli est diametraliter opposita; tum si Cometa vel minimum altior aut depressior Sole existeret, non posset non ejus coma circa conjunctionem cum Sole apparere brevior, quam in quadraturis: Apparere vero major in illa quam in his nequiret, nisi hoc solo casu, cum in eadem præcise cum Sole est distantia, fatente Cl. HEVELIO *Lib.* 8. *p.* 526. Sit
Tab. II. Fig. 3. enim *a*, Terra; *b*, Sol; *cd*, Cometa altior Sole, sed in & prope conjunctionem; *ef*, idem in quadratura; *gh*, Cometa Sole humilior in conjunctione, vel prope; *il*, idem in quadratura; *mn*, Cometa prope conjunctionem in eadem cum Sole distantia; *op*, idem in quadratura. Ex hoc schemate manifestum est, angulos visionis *cad*, & *gah*, esse acutiores angulis *eaf*, & *ial*: contra angulum *man* esse majorem angulo *oap*, quamvis vera caudæ longitudo in omnibus sex locis eadem sit. Cum itaque nuperus Cometa caudam possederit longissimam circa conjunctionem Solis; hoc ipso demonstrative colligeretur, eum nec altiorem nec depressiorem Sole extitisse; & sic tædiosissimo parallaxium calculo bene supersederi posset, si tam facile eorum distantia hoc medio posset investigari.

Sed demus porro, omnia Cometarum phænomena hypothesi Heveliana accurate salvari posse; certum tamen est, id nondum sufficere ad veritatem ipsius hypotheseos astruendam, nisi simul probetur, eam amice conspirare cum natura totius universi, & cum legibus motus a summo ejus Opifice ab initio ei præscriptis; quemadmodum Copernicanos parum juvaret, si duntaxat laborarent in demonstrandis per suum systema apparentiis cœlestibus, nec simul solliciti essent de ostendenda ejus congruitate cum

cum natura totius universi. Quocirca, ut transeam ad physicam considerationem hypothesis Hevelianæ; examinandum mihi est, an satis conveniat cum vero mundi systemate. No. I.

1. Vir Clar. ad mentem quidem CARTESII (ut videre est ex ejus *Princ. Phil. part.* 2. §. 37.) pro principio assumit, quod adeo incertum est, ac quod incertissimum; nempe unumquodque corpus motum, habere naturaliter vim ad perseverandum in suo motu, eo quod quælibet res tendat quantum in se est, ad permanendum in eo statu, in quo est; *Lib.* 9. *Cometogr. p.* 644. Certe plerique nunc Philosophi, & inter alios Author, quisquis ille sit, libri, cui titulus, Inquisitio Veritatis (*Recherche de la Vérité*) profundissimarum reflexionum & speculationum refertissimi; qui cæteroquin in omnibus, etiam circa materiam Cometicam, satis alias monstrosam & absonam, CARTESII insistunt vestigiis; in hoc solo & paucis aliis generalibus motus legibus, ab eo dissentiunt. Et sane, si verum fateri licet, contrarium longe videtur probabilius, nimirum unumquodque a motu cessaturum, quamprimum movens movere cessat; nisi aliquid sit, quod motum in mobili conservet & continuo quasi reproducat. Ad axioma illud, *Unumquodque tendit ad permanendum in eo statu, in quo est*, respondeo, longe aliam hic esse rationem motus, quam quietis. Hæc mera illius privatio est, non vero ille hujus; nam, ad quietem inducendam corpori moto, non opus est, ut Deus velit, voluntate positiva, corpus quiescere, ad hoc ut quiescat; sed sufficit, ut cesset velle ejus motum. Sed ponamus vicissim, Deum cessare velle quietem corporis quiescentis; nondum video corpus moveri; aut si qui motum iri corpus existiment, dicant quam in plagam movebitur, aut quo gradu celeritatis feretur: cum enim motus sit infinitæ varietatis, & magis ac minus recipiat, secus ac quies; non poterit assignari causa, quare corpus sibi relictum in hanc potius partem quam illam, aut tali potius celeritatis gradu quam alio moveri incipiat; nisi Deus insuper, voluntate positiva, velit & determinet corporis motum: sicuti

No. I. elegantissime hæc deduxit præfatus Author *Tom. II. Lib. 6. cap. 9.*

Nisi ergo Cl. Dn. HEVELIUS possit assignare, quid sit id, quod corpus Cometæ, a Planetæ atmosphera semel avulsum, in motu suo conservet, tota ejus hypothesis de Trajectoria corruet: nam si virtutem nominat a gyratione atmosphæræ Cometæ impressam, chimæram nobis fingit, cujus clarus & distinctus conceptus haberi nequit.

2. Concedamus autem Cometæ virtutem hanc continuandi motum suum secundum lineam rectam, postquam ab atmosphæra sua avulsus & spatiosissimum illum campum vel Oceanum, quem vocat, æthereum ingressus est; & quæramus porro ex Viro Clar. an hic cœlestis Oceanus omni motu destitutus sit, an vero ipse quoque circa Solem una cum toto Planetarum systemate rotetur: si prius supponit, quod supponere probabiliter videtur Celeberr. Vir, dum vastum illum Ætherem ceu mare quoddam pacificum concipit, in quo libere velificetur Cometa, tum totum Philosophiæ Cartesianæ ædificium, tam artificiose ab Authore constructum, unica hac suppositione subversum it; quod an consultum sit, ipse videat; cum præsertim, hoc supposito, non videatur posse concipi, qua ratione Terra per se duos pene contrarios motus exerceat; juxta Cartesio-Copernicanam autem hypothesin illud facillime possit; utpote, juxta quam, non nisi diurnus Terræ per se & immediate competit, annuus vero materiæ cœlesti Terræ circumfusæ; quæ in Vorticem circa Solem acta, Terram secum & omnes reliquos Planetas abripit.

3. Si vero Vir Cl. Ætheri concedit motum illum vorticosum circa Solem, qui secum rapiat totum Planetarum systema ipsosque Cometas; tum utique Cometarum motus non amplius erit simplex, sed compositus ex recto in Trajectoria & circulari Vorticis; unde fieret, ut quamvis motus Cometæ proprius in Trajectoria reapse esset æqualissimus & regularissimus, tamen, propter alterum supervenientem motum, spiralis & irregularissimus appa-

appareret; eoque irregularior, quod materia Vorticis Cometam non ubique æquali velocitate, sed existentem prope Solem velocius, alibi lentius circumduceret. Cum autem hic motus Vorticis in calculo a Viro Cl. neglectus fuerit, non videtur ejus hypothesis de Trajectoria Cometæ posse cum rei veritate conciliari. No. I.

Tandem examinandum est, an Vir Clar. motum parabolicum Cometæ ab inclinatione disci in Trajectoria proficiscentem bene probet exemplo scaphæ vel lintris. Ubi probe considerandum, Ætherem iterum considerari posse ut motum, vel ut immotum: Si illum ut immotum & tranquillum spectemus; rursum animadvertendum, an impulsum Cometæ ab atmosphæra impressum ad instar cursus torrentis alicujus, ut facit Author, considerare velimus; an vero ut impetum venti vela inflantis; quod quidem longe convenientius est, eo quod Æther, cui Cometa innatat, rationem aquarum habere possit. Magna autem inter effectum fluminis & venti hac in parte differentia est: Quod fluminis cursum spectat, cui scapha oblique est exposita; fallitur Vir Cl. dum credit, scapham non solum ad fluminis cursum deorsum ferri, sed & pedetentim ad illam ripam accedere debere, cui obvertit proram: imo haud dubie recta descenderet, nec ad unam ripam magis accederet, quam ad alteram; tum quod fluctus *d m*, *f t*, *e n*, æquali angulo & impetu alluant proram, medium, & puppim navigii *m t n*; tum quod fluctus retro navigium *m l*, *t r*, & *n i*, in spatio Rhomboïde A, eodem quoque tempore & æquali celeritate recedant; sic ut nihil impediat, quo minus prora *m* directe eat in *l*, medium *t* in *r*, & puppis *n* in *i*; atque sic navigium, intra eosdem fluctus parallelos *d l*, & *e i*, perpetuo contineatur. Tab. II. Fig. 2.

Longe vero alia ratio esset motus navigii tranquillo mari expositi & a solo vento agitati: Esto enim in eodem schemate scapha *m n*, cujus lintea oblique impellat ventus *a b*, manifesta est ratio, cur *m n* non possit secundum venti ductum ire in *l i*, nimirum ob renitentiam aquæ post scapham, in spatio

 Rhom-

No. I. Rhomboide A contentæ. Hinc in illam solum partem tendere cogitur linter, quam respicit prora ejus *m*, quæ cuspide sua faciliorem sibi parat transitum. Cum vero prora *m* semper respicere debeat circulum, circa directorem *c* descriptum, propterea quia situm navigii ad directorem supposuimus esse perpetuo normalem; hinc navigium cursu suo, nec lineam rectam, nec etiam parabolicam, sed omnino perfectum circulum *o p* describeret. Nec est quod dicas, venti impulsu, lintrem *m n*, non tantum in partem, in quam prora tendit, sed & secundum ipsius venti ductum versus *l i*, latum iri, & sic parabolam descripturum; quia non potest dari ratio, quare vel minimum ad *l i* accedat, ubi semper multum resistentiæ invenit, cum totam ventus vim possit exerere pellendo lintrem in partem, quam prora *m* aspicit. Verum quidem est in praxi, navem ventum oblique excipientem, nunquam in tam perfectum circulum agi posse, quin simul a centro subinde longius recedat, eam in partem abrepta, qua venti impetus fert: Verum id inde esse existimo, quod nunquam ventus sit, qui non aquam simul multum agitet, fluctusque anteriores impellat in scapham, dum posteriores ab illa propellit; in quorum adeo locum scapham succedere nil mirum est; sic ut motus ille scaphæ, secundum ductum venti, non tam ipsi vento, utcunque validissimo, quam aquæ post illam recedenti ascribendus sit. Id quod ad materiam præsentem accommodari nequit, ubi virtus Cometæ impressa ætherem agitare, ut ventus aquam, concipi nequit. Sive igitur virtus hæc Cometæ ab atmosphæra impressa flumini, sive vento, comparetur; neutro modo elicies motum Cometæ parabolicum; cum, priori modo, Trajectoria futura esset omnino recta; posteriori, omnino circularis.

Et sic quidem Ætherem consideravimus, ceu immotum & tranquillum; sed si porro illum, ut rei natura poscit, concipiamus instar magni Vorticis, qui, in modum rapidissimi Torrentis aut Euripi, secum, non recta, sed in gyrum circa Solem, deferat Cometam, quem præterea virtus ab atmosphæra impres-

sa,

sa, ceu ventus validissimus, in eam partem impellat, in quam inclinatus est discus; omnino evincemus, ex hoc ipso simili, quod nobis subministravit Cl. HEVELIUS, Cometam, nec rectam, nec etiam parabolicam, sed omnino circularem lineam descripturum; cum & gyratio Vorticis & propria inclinatio disci eo colliment. No. I.

APPENDIX.

Epimetri loco, propino Lectori solutionem duorum Problematum, quorum unum Dn. COMIERS, Præfectus Ecclesiæ Collegialis de Ternant, proposuit Authori Diarii Eruditorum (*Journal des Savans*) vid. *Tom. Anni* 1676. *p.* 222. *

PROBLEMA TALE EST:

Dato puncto c, *in circumferentia circuli, cujus diameter* oe; *reperire, in radio ejus* oi, *punctum* m, *per quod ducta recta* cr *segmentum* mr *sit æquale radio* oi.

1. SOLUTIO ALGEBRAICA.

Angulus $oic = mic = A$.

$rci = mci = Z$.

$rmi = mci + mic = A + Z$,

exterior duobus interioribus, per I. 32.

rim,

* *pag.* 215. *Editionis Batavæ.*

No. I. $rim = rmi = A + Z$. per I. 5.
latera enim ri, & rm, supponuntur æqualia.
$irm = mci = Z$, per I. 5.
Triang. enim ric est Isosceles.
Hinc $rmi + rim + irm = \Delta\ rmi = 2A + 3Z$
$= 180$ gr. per I. 32.
Ergo $3Z = 180$ gr. $- 2A$.
Et $Z = 60$ gr. $- \frac{2}{3}A$.

Quocirca cognito arcu oc, vel angulo $oic = A$, ejus subtrahantur duæ tertiæ partes a 60 gr. residuum erit $Z = rci$, vel mci; cui si addas mic, habebis rmi; cui æqualis alter rim, vel rio; adeoque & arcus ro. Hinc nata est sequens Tabella:

Posito A, sive ang. *oic*.	erit Z, sive ang. *rci*.		arcus *or*, sive ang. *rio*.	
gr. 0 —	60.	0.	60.	0.
10 —	53.	20.	63.	20.
20 —	46.	40.	66.	40.
30 —	40.	0.	70.	0.
40 —	33.	20.	73.	20.
50 —	26.	40.	76.	40.
60 —	20.	0.	80.	0.
70 —	13.	20.	83.	20.
80 —	6.	40.	86.	40.
90 —	0.	0.	90.	0.

2. Solutio Geometrica.

E puncto dato c, ducatur diameter cg.
Arcus oh fiat æqualis arcui dato oc.
Abscindatur ex h tertia pars arcus hg, quæ sit hr.

Jun-

Jungantur *c* & *r*, recta *cr*: No. I.

Dico lineam *cr* habere partem *mr* æqualem radio *io*.

DEMONSTR. Ang. *rcg* subduplus est angulo *rig*, per III. 20.

Ang. *rih*, eidem quoque subduplus est, per constructionem.

Igitur anguli *rih*, & *rci*, æquantur, per axiom. 6.

Iterum ang. *hio* æquatur angulo *oic*, per constructionem.

Totus igitur ang. *rio* æquatur duobus *rci*, & *mic*, simul sumptis.

Angulus autem *rmi* æquatur iisdem duobus *rci*, & *mic*, per I. 32.

Itaque anguli *rmi*, & *rim*, æquantur inter se, per ax. 1. adeoque recta *rm* æqualis radio *ri*, vel *oi*: sunt enim crura Isoscelis *rmi*, per I. 6. quod erat demonstrandum. *

Alterum PROBLEMA *in plateis hujus Urbis affixum legitur & propositum est a quodam Nic.* VOOGHT, *Geometra Amstel. Est autem tale*:

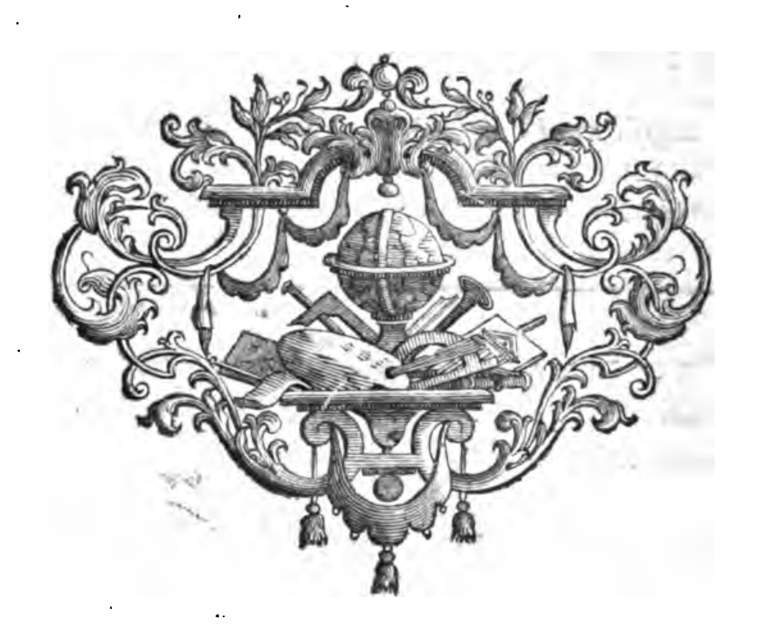
OBservatur alicubi, post meridiem hora sexta, Solis altitudo 12 gr. elapsis autem, post momentum observationis, hora una & 12 minutis occidit Sol; quæritur, sub qua Latitudine, & quo anni tempore instituta fuerit observatio?

Resp. Observatio instituta fuit sub latitudine 45 gr. $16\frac{1}{2}$ min. Sole existente in ♉. 17 gr. 15 min. aut ♌. 12 gr. 47 min. & declinationem habente 17 gr. 1 min.

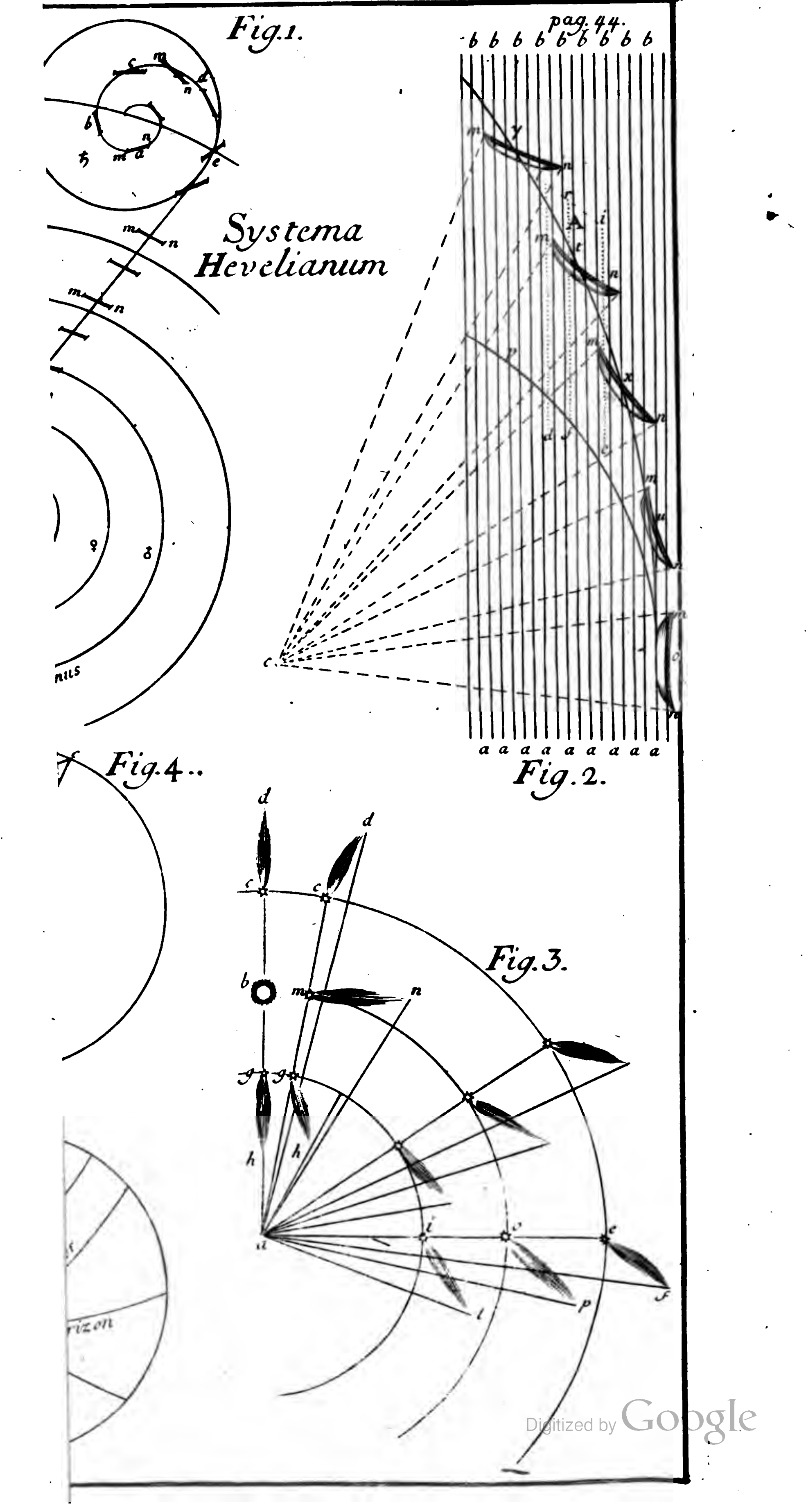
* *Videatur Num. II. sub finem.*

No. I. Calculum vitandæ prolixitatis causa non addo. Attente inspicias schema, & ex resolutione duorum triangulorum *a b c*,
Tab. II. Fig. 5. & *c d e*, veritas solutionis tibi innotescet. *

* *Videatur Num. II. sub finem.*



JACOBI


Fig.1.
Systema
Hevelianum
Fig.2.
Fig.3.
Fig.4..

Nº. II.

JACOBI BERNOULLI DISSERTATIO DE GRAVITATE ÆTHERIS.

Edita primo
AMSTELÆDAMI;
Apud HENRICUM WETSTENIUM,
1683.

PERILLUSTRI

VIRORUM QUADRIGÆ,

SCHOLARCHIS

Inclytæ Reip. Basil. Spectatissimis,

D. JOH. BALTH. BURCKHARDO,

D. THEODORO BURCKHARDO,

Seni duo-de-nonagenario,

D. ANDREÆ MITZIO,

SENATORIBUS & TREDECIM-VIRIS MERITISSIMIS:

D. JOH. CONRADO HARDERO,

IBIDEM ARCHIGRAMMATÆO, RERUM AGENDARUM PRUDENTIA MAXIME CONSPICUO.

VIRI AMPLISSIMI, GRAVISSIMI:



OGMA propono, non odiosæ, ut videri quidem posset, reum novitatis, sed quod antiquitate cum vetustissimæ Philosophiæ certet placitis, coætaneum non *Aristoteli*, non *Platoni*, sed prisco *Atlanti*, ex quo

Ovid. l. 4. Metam. Fab. 17.

——————— *omne*

Cum tot ſyderibus cœlum requievit in illo.

Quorſum enim, nobis fingere Senem facie incurva, vultu cernuo, titubante genu, & tanquam ſub magna fatiſcentem mole, ſi quod portavit cœlum, leve credidere Veteres? Ne tamen a fabulis Antiquitatis laudem fœnerer, illud hoc Veterum didiciſſe ſufficiat exemplo, Ætherem, qualem præſenti molior opuſculo, gravem & ponderoſum Atlantum ſuffulciendum eſſe humeris, ne mole ruat ſua.

Onus ut cœleſte, ſic nobile, AMPLISSIMI VIRI, cui ferendo quos digniores ſeligerem humeros, quam Veſtros, qui non niſi magna, non niſi eximia ferre ſunt aſſueti? Veſtri ſunt humeri, qui arduum regiminis in ſe ſuſcepere onus, ſuſceptum tanta cum laude & prudentia portavere hactenus. Veſtri ſunt humeri, quos cura Eccleſiæ, cœlique illius myſtici premit pondus. Vos eſtis, quos Academiæ Scho-

larum-

larumque noſtrarum oneroſa fatigat ἐπισκοπὴ. Neve hoc reticeam, Vos eſtis, quorum curis, conſiliis, & auſpiciis, Clariſſ. Dnn. Profeſſores Academiam noſtram nunc demum heroico plane auſu, nec infelici cum ſucceſſu, priſtino reſtituere nitori allaborant. Ne itaque gravemini, AMPLISSIMI VIRI, poſt tot exantlatas curas, tantaque ſuſcepta onera, etiam cœleſtis iſtius, quod ſtruxi, ponderis curam & patrocinium in Vos ſuſcipere; patiaminique, ut *Ætheris Gravitas* illuſtrium Veſtrorum nominum auctoritate præmuniatur? Iſtis enim ſuffulta ſtylobatis ſtabit ſalva & inconcuſſa, nec erit, cur vel ab apertis hoſtium arietibus, vel clandeſtinis malevolorum cuniculis, vel tormentis invidiæ, vel canum latratibus, aut dentibus Momorum, aliiſque inſultibus ullam ruinam metuat. Firmet autem Deus O. M. humeros Veſtros, AMPLISSIMI VIRI, ut glorioſa illa onera, quibus Eccleſiæ Patriæque bono obruimini quotidie, alacriter

ter & constanter feratis, donec præmia laborum, utinam sero tamen, reportetis in cœlis. Ita vovet

AMPLITUDINUM VESTRARUM

Humillimus & Devotissimus Servus ac Cliens

Dabam Lugd. Batav. 11 Julii 1682.

JAC. BERNOULLI.

MO-

MONITUM
AD
LECTOREM.

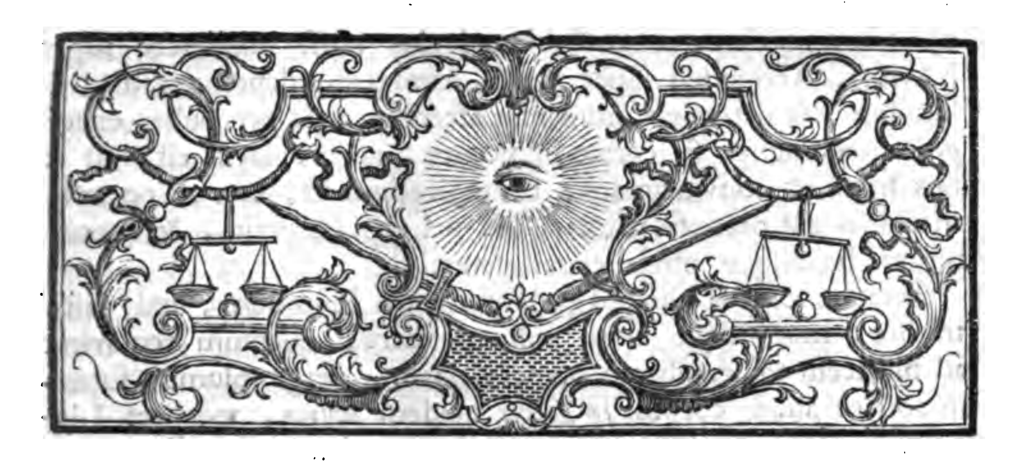


UM bona pars hujus Dissertationis sub prælo prodiisset, ferebat occasio, ut inter confabulandum cum Amico, varii præcipue de præsentibus, ut fit, studiis miscerentur sermones; interque alia mentio incideret Causæ Firmitudinis Corporum Durorum; *ubi monuit Amicus, eam a* MALEBRANCIO Compressioni Ætheris ambientis *ascribi. Ego illum per jocum hæc dixisse, postquam in Adversaria mea, vel impressa Dissertationis folia forte casu quodam incidisset, suspicatus; Sesquiannus est, regessi, ex quo Auctoris istius Scrutinium veritatis* (Recherche de la vérité) *fugitivo quidem, fateor, oculo perlustravi; sed non observavi, saltem non memini, illum, circa Cohæsionem partium duri corporis, ultra* CARTESII *quietem penetrasse: Amicus vero asseverare dicta sua, & ne dubitem, commodare librum, ac monstrare locum, qui fidem dictis faceret. Quo sane perlecto mirabar, non tam quod dictus Auctor in Cohæsione partium duri corporis jam ante me Pressionem Ætheris repererit, sed præcipue quod in cognitionem hujus veritatis eodem filo Ariadnæo deductus, eique comprobandæ iisdem rationibus, iisdemque adeo exemplis mecum usus sit; uti e Scrutinii veritatis & Dissertationis nostræ collatione patere poterit.* Recherche de la vérité Lib. 6. cap. 9. *Isthæc autem Lectorem moneo, non quod veritatis alicujus inventionem admodum mihi vendicare, aut de ea multum gloriari animus sit (sic enim dissimulasse opportuisset, quæ modo propalavi); verum ut fortuitus noster consensus evidenti argumento sit (quod persuadere mea interest) nec contradicendi prurigine, nec novaturiendi studio, sed solo veritatis amore inductum me isthæc scripsisse. Ea enim vivimus tempora, quibus non satis de-*

clinare possumus sinistra multorum judicia, qui de Scripto aliquo ex opinione, quam de persona Scribentis concepere, sæpe quidem illa fallaci & iniqua, aliisque suis affectibus, quam ex rebus ipsis, judicare malunt. Tales ergo rogo, ut quæ hic reperient de Causa Cohæsionis partium duri corporis, *non ut mea tractent, sed ut opinionem* MALEBRANCII, *unius e sagacissimis nostri seculi Philosophis.*

Alterum est, quod Benignum Lectorem monitum velim, ut observet, me repræsentare in tota fere Dissertatione hominem, qui suo usus ratiocinio gradatim in cognitionem rei, quam quærit, devenit, quique assumit quandoque talia, quæ majore accedente luce talia non reperiuntur; Exempli causa, ad reddendam rationem, cur corpus motum non possit impellere quodlibet corpus quiescens, pag. 69. supposui initio, cum CARTESIO, *in ipsa quiete quandam resistendi vim, porportionatam magnitudini corporis quiescentis, antequam exploratum haberem, omnem corporum resistentiam provenire ab ambientis materiæ pressione. Ita p.* 107. (*ex eo, quod pondus ferramenti quandoque majus est pondere similis cylindri atmosphærici, conclusi ipsum quoque Ætherem sua gravitate debere esse instructum, qua adjuvet pondus Atmosphæræ in connectendis ferramenti partibus; sed ista conclusio mox vacillare deprehenditur ex iis, quæ sequuntur pag.* 112. *ubi demonstratur, ferramentum licet ponderosissimum in suspensione vel attractione omne suum amittere pondus; hinc enim quid aliud consequitur, quam ad sustentandum vel propellendum ferramentum minimam sufficere Atmosphæræ vim, nec opus esse, ut Ætheri propterea pondus affingatur? Interim ne hoc* Gravitati Ætheris *fraudi sit, observabit Lector, quamvis id, quod prima mihi de illa cogitandi extitit occasio, non fundat pro ea argumentum valde necessarium, alia tamen postea adduci argumenta, quibus hanc Gravitatem omnino apodictice & infallibiliter confirmari putem.*

N°. II.



N°. II.

DISSERTATIO
DE
GRAVITATE ÆTHERIS.



RECEPTA jam est ubique Aeris nostri atmosphærici Gravitas. Ea a primis Scriptoribus Hydrostatices indefessa solertia pervestigata, non solum rationi consona, sed infinitis quoque satisfacere deprehensa fuit experimentis; ut multis contradicentibus ad assensum a se impetrandum satis etiam ponderis habere visa fuerit. Et quamvis reliqui, in quorum animis Aeris Levitas profundiores egit radices, manus dare hactenus impediti fuerint; quod sibi persuaderent fore, ut sentiremus supra nos ejus, si quod haberet, pondus; quodque

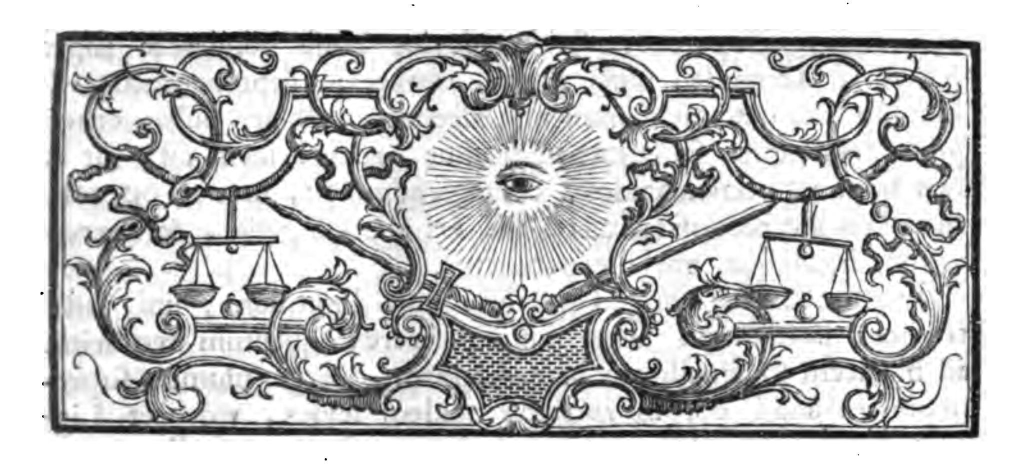
Gravitas Aeris.

H 2 absur-

clinare possumus sinistra multorum judicia, qui de Scripto aliquo ex opinione, quam de persona Scribentis concepere, sæpe quidem illa fallaci & iniqua, aliisque suis affectibus, quam ex rebus ipsis, judicare malunt. Tales ergo rogo, ut quæ hic reperient de Causa Cohæsionis partium duri corporis, *non ut mea tractent, sed ut opinionem* MALEBRANCII, *unius e sagacissimis nostri seculi Philosophis.*

Alterum est, quod Benignum Lectorem monitum velim, ut observet, me repræsentare in tota fere Dissertatione hominem, qui suo usus ratiocinio gradatim in cognitionem rei, quam quærit, devenit, quique assumit quandoque talia, quæ majore accedente luce talia non reperiuntur; Exempli causa, ad reddendam rationem, cur corpus motum non possit impellere quodlibet corpus quiescens, pag. 69. supposui initio, cum CARTESIO, *in ipsa quiete quandam resistendi vim, porportionatam magnitudini corporis quiescentis, antequam exploratum haberem, omnem corporum resistentiam provenire ab ambientis materiæ pressione. Ita p.* 107. (*ex eo, quod pondus ferramenti quandoque majus est pondere similis cylindri atmosphærici, conclusi ipsum quoque Ætherem sua gravitate debere esse instructum, qua adjuvet pondus Atmosphæræ in connectendis ferramenti partibus; sed ista conclusio mox vacillare deprehenditur ex iis, quæ sequuntur pag.* 112. *ubi demonstratur, ferramentum licet ponderosissimum in suspensione vel attractione omne suum amittere pondus; hinc enim quid aliud consequitur, quam ad sustentandum vel propellendum ferramentum minimam sufficere Atmosphæræ vim, nec opus esse, ut Ætheri propterea pondus affingatur? Interim ne hoc* Gravitati Ætheris *fraudi sit, observabit Lector, quamvis id, quod prima mihi de illa cogitandi extitit occasio, non fundat pro ea argumentum valde necessarium, alia tamen postea adduci argumenta, quibus hanc Gravitatem omnino apodictice & infallibiliter confirmari putem.*

N°. II.



No. II.

DISSERTATIO
DE
GRAVITATE
ÆTHERIS.



ECEPTA jam est ubique Aeris nostri atmosphærici Gravitas. Ea a primis Scriptoribus Hydrostatices indefessa solertia pervestigata, non solum rationi consona, sed infinitis quoque satisfacere deprehensa fuit experimentis; ut multis contradicentibus ad assensum a se impetrandum satis etiam ponderis habere visa fuerit. Et quamvis reliqui, in quorum animis Aeris Levitas profundiores egit radices, manus dare hactenus impediti fuerint; quod sibi persuaderent fore, ut sentiremus supra nos ejus, si quod haberet, pondus; quodque absur- Gravitas Aeris.

No. II. absurdum existimarent, fluidum levius posse ponderare super graviori, Aerem scil. super Aqua, cum potius deprehendatur, illum sub hac detentum omni nisu ascendere, & per bullas emergere; res tamen si curate inspiciatur, adeo evidens est, ut ad hos homines convincendos, confugiendum sit, non ad operosas machinas aut pretiosas antlias, sed vel e trivio petita, & mercatoribus bajulisque obvia experimenta.

Fluidum levius ponderat super graviori.

Impone corpus aliquod gravius, puta Plumbum, uni lanci trutinæ; immissoque alteri tanto pondere, quantum requiritur ad bilancem in æquilibrio conservandam, perge plumbo superimponere aliud corpus *in specie* quidem levius, videlicet Lignum. Quid manifestius, quam lancem hanc quæ Plumbum cum Ligno continet, alteri præponderaturam; ita ut tantum ponderis isti addendum ad trutinam æquilibrio suo restituendam, quantum alias deprimeret lignum, si seorsim appenderetur? Nemo autem concipiet, istud lancis præpondium aliunde provenire, quam ex eo, quod lignum, licet plumbo *in specie* levius, tota sua mole super illo gravitet, ambo vero junctis viribus premant lancem. Et ne rationi, sed sensui quoque hæc probetur gravitatio, quotusquisque est, qui onus in capite gestans non experiatur, magno sæpe suo incommodo, oneris supra se gravitationem & tendentiam deorsum, quam, scalam postea ascendens, nihilo imminutam sentiet, quamvis inter ascendendum istud onus speciem levitatis præ se ferat. Unde manifestum est, ascensum alicujus corporis non statim arguere, id esse absolute leve, vel nullam habuisse, aut sublatam esse pressionem conatumve ejus tendendi deorsum; sed pressionem hanc irritam tantum reddi per aliam pressionem vehementiorem sursum, impedirique, ne in actualem descensum abeat. Quemadmodum si duo Luctatores manus inter se conserunt, & alter alterum impellit robore inæquali; solus fortioris impulsus sortitur effectum, dum debiliorem retroagit: propterea vero non concludimus, impulsionem debilioris sublatam esse; pergit enim hic impendere omnes suos nervos, ut resistat alteri, & fortior revera resistentiam debilioris sentit, & nisi debilior resisteret, for-

fortior eodem temporis spatio, pro ratione roboris sui, duplo vel triplo longius eum propelleret, quam nunc resistentem & prementem se propellere potis est. No. II.

Verum, inquiunt, non sentitur pressio vel pondus Aeris supra nos: sed quid tum postea? Nec sentitur ab urinatoribus pondus aquæ incumbentis; ergone minus gravis est? Audio regerentes, Elementa in locis propriis non gravitare. Itane vero sibi ipsis respondent incauti? posito enim verum esse, quod non est; nunquid Aer est in loco suo nativo? cur solus ergo, si sit gravis, hoc in loco ponderaret?

Gravia quandoque ascendunt.

Et ne ullum dubium relinquatur circa Aerem sub aqua contentum, quem per bullas sponte erumpere videmus; nonne idem contingit in ligno sub aquam vi depresso, quod sibi relictum, in superficiem aquæ sponte (ut quidem videtur) emergere solet? an ovum ovo poterit esse similius? Quod si ergo Aer absolute levis dicendus, quod sub aqua contentus sursum erumpere nititur; cur veremur ligno, cui idem accidit, absolutam levitatem ascribere? Non nescio, quid errori ansam dederit: Ligno propterea gravitatem concessere Veteres, quod quamvis in aqua ascenderet, præsto tamen esse viderent aliud Fluidum, nempe Aerem, in quo descendit: Cum vero deprehenderent, Aerem in omni fluido ascendere, in nullo descendere; hinc factum, ut absolutam ei levitatem imprudentius ascripserint: cum tamen ipsis cogitandum fuisset, si sensibus nostris obviam forsan esset aliquod fluidum Aere adhuc levius, fore ut Aer in illo non minus fundum petere conspiceretur, quam lignum in Aere; adeoque eum non tam absolute levem pronunciandum, quod in reliquis fluidis ascendit, quam vero magis minusque gravem respectu horum aut illorum fluidorum; uti lignum Aere gravius esse dicimus, quamvis interea aqua minus grave sit.

Sed piget, in re Sole meridiano clariore prolixiorem esse. Gravitas hujus nostri, quem haurimus, Aeris apud plerosque jam est in confesso: De ipsius vero quoque *Ætheris Gravitate*, quam hac Dissertatione ostendendam suscepi, apud Scriptores Hydrostaticos, quorum experimenta ad solius Atmosphæræ pressio-

 nem

No. II. nem demonstrandam tendunt, altum hactenus fuit silentium: adeo tamen evidens est, aut ego pessime fallor, ejus rei argumentum, ut, illo intellecto, a nemine in dubium vocari amplius posse, firmiter mihi persuadeam.

Occasio scripti. Quia vero maximi momenti esse & ad majorem intelligentiam quamplurimum conducere judico, si qua primum occasione quave via in cogitationes tuas incideris, enarres; quod alias per modum præfationis fieri solet; non abs re erit, si tribus id verbis hic innuam.

Incidi nuper in Scriptum aliquod *de Gravitate Aeris*, * Auctore Cl. VOLDERO, Professore in Academia Lugduno-Batava Celeberrimo. Id cum secunda vice evolverem, cœpi attentius ruminare, quæ *sect. 37. seqq.* de receptis duobus Motus generibus, docte & solide scripsit. Quæ quia sequenti Tractatui ortum dedere, non possum, quin totidem pene Auctoris verbis, quantum ad propositum meum faciunt, huc transferam; quod citra Plagii notam interpretabitur benignus Lector.

Duo motus genera, Pulsio & Attractio. Dicit ibi, omnem Motum ad duo vulgo revocari genera; *Pulsionem* & *Attractionem*; utramque duplicem esse. *Pulsionem* vocari, ubi corpus, quod tanquam causa motus in alio corpore spectatur, vel *quiescit*, dum alterum, quod ab illo impelli dicitur, ab eo recedit; vel *movetur*, & ad motum concitat id corpus, cui suo in itinere occurrit. *Attractionem* vero dici, ubi movens vel *quiescit*, mobili ad ipsum accedente, vel *præcedit*, mobili illud insequente. Prioris *Pulsionis* exemplum proponit in Magnete; qui licet ad sensum quiescat, alium tamen magnetem similibus polis se spectantem a se abigit; uti cum ferrum ad se attrahere dicitur, prioris *Attractionis* specimen nobis exhibere potest. Posteriorem *Pulsionis* speciem spectari monet infinitis in casibus; *Attractiones* vero primario patere in Antliis, in quibus embolo adducto, qui motus aquæ censetur causa, sequitur pone ipsa aqua.

His

* Burchardi de Volder *Quæstiones Academicæ de Aeris Gravitate.* Medioburgi, 1681.

His præmissis, quid de utraque specie censendum sit, inquirit; ostendendo primo, in nullius corporis natura motum involvi, adeoque nullum corpus moveri posse a seipso, sed quodcunque movetur, moveri ab alio. Unde porro infert, id quod movet, necessario quoque moveri; cum nemo comprehendat, quo pacto corpus quiescens ad motum concitet aliud; in quod sua quiete agere non potest. Quibus stabilitis, priores species; tum *Attractionis*, tum *Pulsionis*, ubi corpus quiescens aliud vel ad se allicit, vel a se propellit, sponte ruere manifestum est. Posteriorem *Attractionis* speciem agnoscit quidem, sicubi movens & mobile vinculo quodam inter se connexa sunt; sed eam a Pulsione non differre simul monet. Alteram vero, quam *Suctionem* vulgo dicunt, qua corpus motum insequitur corpus movens, quicum nullo vinculo conjunctum est, omnino rejicit; hac demonstrationum serie usus: Nullum corpus aliud movere potis est, nisi ei partem sui motus communicet; non potest autem communicare partem, quin tantundem illi decedat; decedere vero nequit, quin id quod movetur, moventis, aut motui, aut determinationi impedimento sit; impedimento denique illud esse nequit, nisi situm sit in eadem linea per quam, & easdem partes, versus quas fertur corpus movens. Si quis enim crederet, corpus, quod vel pone est, & extra viam ejus quod movetur, impedimento huic esse posse; eadem facilitate sibi quis persuaderet, (quod ejus non inficetum est simile) tormenti globum, orientem versus explosum, sisti in motu posse a moenibus, quæ ad occidentem sunt. Unde concludit, corpus quod a tergo est, ab eo quod præcedit, nulla ratione motum iri: cunctaque tandem eo dirigit, ut omnem Attractionem, Suctionem, atque his affinem vacui Fugam e rerum natura eliminaret. No. II. Non datur Attractio distincta a Pulsione.

Huc cum perrexissem, Attractioni terra marique sollicitus quæsivi patrocinium; & quamvis omnia rite demonstrata esse evidenter perciperem, tamdiu ab assensu me cohibui, donec plures motus, qui Attractionis speciem præ se ferre poterant, in specie examinassem, & tentassem, utrum per Pulsionem explicari commode possent.

Ad-

No. II. Natura Pulsionis. Advertebam autem primo illud in Pulsione; non necessum esse, ut movens semper mobile in directum a se abigat; sed in diversas illud partes impellere posse, pro diversa obliquitate sui appulsus. Experientia enim compertum est, sphæram, ab alia sphæra tactam & impulsam, secundum eam lineam propelli, quæ per punctum contactus & per centra utriusque sphæræ ducitur; nulla habita ratione lineæ, quam sphæra impellens ante contactum descripserat: quam naturæ legem in emolumentum suum apprime vertere norunt illi, qui ludo delectantur tudiculario (*jeu de billard*).

Quocirca, ut determinetur, quam in partem quælibet Pulsio fieri debeat, descriptus sit circulus *abcd*; eoque per lineas *ac*, & *bd*, in quatuor quadrantes diviso, ponatur in ejus centro *e*, sphærula per lineam *ae* delata; quæ, in puncto *i*, aliam sphærulam *g* offendat, sic ut linea *ei*, punctum contactus cum centro *e* jungens, (quæ producta etiam per centrum sphæræ impulsæ *g* transibit) in directum sita sit cum recta *ae*; quo quidem casu nullum est dubium, sphæram *g* in directum propulsum iri secundum lineam *gc*. Si vero nunc sphærula *e*, ad alteram *g* ita appellere supponatur, ut punctum contactus *i*, in alterutro quadrante *ceb*, vel *ced* reperiatur, adeoque recta *eg*, per centra sphærularum transiens, cum recta *ae* non in directum jaceat, sed quemcunque angulum obtusum constituat; tum sphærula *g* non amplius feretur in directum per lineam *ec*, aut huic parallelam *gf*, sed per rectam *gh*; ita ut linea mobilis *gh*, rectæ *eg* in directum existens, eundem, quem ista, cum linea moventis *ae* constituat angulum. Ubi denique sphærula *e* alteram *g* ita offendit, ut punctum contactus utriusque *i* incidat in lineam *eb*, vel *ed*, quadrantetenus distantem a recta *ae* descripta per motum sphæræ *e*, cessabit omnis pulsio, eo quod jam tota sphæra *e*, sine obstaculo, inter parallelas *mn* & *op*, iter suum prosequi possit. E quibus haud difficulter constabit, fieri non posse, ut contactus sphærularum fiat in quadrantibus *aeb*, vel *aed*: defluens enim pila ex *a* versus *e*, necessario prius aliquo sui puncto offendet pilam immotam *g*, in *f*, eamque propellet per lineam

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

neam $g\,t$, obtusum cum recta $a\,e$ constituentem angulum. Adde, quod etiamsi per impossibile supponamus, pilam e, penetratis dimensionibus pilæ g, in punctum e defluxisse; nulla tamen ratio est, quare altera pila g, post contactum i, debeat impelli per lineam $g\,u$; cum nullum afferat impedimentum pilæ e, quin libere ista moveri pergat ex e in c. Quibus perpensis, concludebam, in omni *Pulsione*, lineam moventis ante contactum descriptam, & lineam mobilis describendam post contactum, obtusum perpetuo angulum inter sese constituere debere; & si quando deprehendantur formare acutum, dubitabam, an ille motus aliter quam per *Attractionem* explicari possit. No. II. In omni Pulsione linea moventis & linea mobilis obtusum angulum constituunt.

Talem vero motum reperiri primo suspicabar in Re nautica, ubi Nautæ, vento etiam adverso, spatia conficere norunt. Quoniam enim hoc in casu plaga, e qua ingruit ventus, ab illa, in quam cursus navis directus est, minus quadrante abest; ventus, prima fronte, videri cui posset attrahere potius navem, quam a se repellere. Verum brevi deprehendi, & hunc navium motum cum Pulsionis legibus modo allatis optime conspirare. An ventus adversus attrahat navem.

Esto igitur $a\,b$, longitudo navigii cujusdam (cujus prora a, puppis b,) eamque in transversum secet recta normalis $c\,d$. Ventus, quem mihi imaginabar ut congeriem infinitorum globulorum ad vela allidentium, repræsentetur per parallelas $g\,h$, cum anteriore navis parte $h\,a$ angulum quemcunque acutum $g\,h\,a$ constituentes. Velum $l\,m$ medio loco sit expansum inter lineas $g\,h$, & $a\,h$: quandoquidem nostro in casu vela ita dirigi solent, ut eorum planum inter plagam, e qua irruit ventus, & eam quam respicit prora, intermedium jaceat, ut hac ratione ventus a velis obliquius, quam ab ipsa nave excipiatur. Quo facto, ut pateat, in quam partem motus navis determinandus sit; consideremus solum venti globulum e, (quia reliquorum par est ratio.) Is propellere conabitur navem secundum rectam $i\,n$, ductam per globuli centrum & globuli velique contactum. Sed quoniam iste motus magnam partem infringitur per resistentiam aquæ post navem in spatio $a\,d\,b$ contentæ; intelligamus illum compositum esse ex duobus aliis, quorum unus Fig. 5.

No. II. pellit navem in transversum juxta rectam *i d*, seu *o n*, alter in directum secundum lineam *d n*, vel *i o*: statimque patebit, motum in transversum, si non omnino, saltem maxima ex parte, sublatum iri a tota illa globulorum aqueorum serie, quorum quia totidem, vel plures, navis longitudini obicem ponunt, quam globuli venti vela impellunt, mirum non est, quod huic determinationi sufficienti impedimento esse possint. Eadem vero opera redditur hinc ratio, cur alter motus in directum debeat, vel nullum, vel exiguum detrimentum pati: cum enim paucissimi sint globuli aquei, qui proræ cuspidem excipiunt, eorum vires globulis venti resistendo nequaquam pares erunt; unde navis a vento impulsa nullo negotio eos sulcabit, atque ita perpetuo secundum rectam *i a*, incedere perget, nunquam valde notabiliter ad latus deflectendo. Quæ explicatio nos docebit, ad nullam hic Attractionem confugiendum, sed motum hunc navigii, quanquam venti impulsui, ut videtur, contrarium, non minus per Pulsionem effici, quam si prora obversa puncto *n*, cum plano veli *l m* perpendiculares constitueret angulos; hoc tantum cum discrimine, quod navis *i a* longe tardius incedere debeat nave *i n*; quia quo tempore hæc spatium *i n* percurrit, illa viam multo breviorem, nempe non nisi lineam *i o* emetitur. Horum vero motuum (ut hoc in transitu moneam) scietur proportio; si assumto radio *i n*, atque sinu anguli *a i l*, hoc est, *n i d*, nempe recta *d n*, sive *i o*; fiat, Ut sinus obliquitatis veli cum nave, ad sinum totum; ita via navis *a b*, ad viam, quam percurreret eodem temporis spatio, si vela haberet ad angulos rectos expansa. Eruntque in universum velocitates navium ad invicem, ut sinus obliquitatis velorum ad naves; supponendo vela eodem angulo ventos excipientia, æqualique ab iis impetu impulsa.

Clavus non tantum agit per modum vectis.

Antequam ulterius progrediar, non possum sub silentio præterire (quod nihil tale cogitanti inciderat) posse nimirum per hanc explicationem, genuinam reddi causam virtutis Clavi seu Gubernaculi; nimis enim evidentia sunt, quam ut dissimulari mereantur, nec Lectorem, spero, digressionis tædebit. Creditum

tum fuit tam a Veteribus, quam a plerisque Modernis, Clavum unice agere per modum vectis, cujus hypomochlium, seu fulcimentum, sit vel in centro gravitatis ipsius navigii, vel in puppis cardine, cui clavus inseritur; potentia vero motrix in resistentia ipsius aquæ stagnantis, ad quam allidit clavus. Sed bene observatum est a * quodam e Recentioribus, virtutem istam, qua clavus navim sibi adhærentem circumagit, non unice naturæ vectis tribui posse; sed præterea aliud aliquid agnoscendum, in quo præcipuum ejus rei momentum consistat. Nam si per modum vectis solum operaretur clavus; tum in quavis sui inclinatione proram navis in eam partem flectere deberet, in quam ipse inclinatus est, & quidem eo efficacius, quo rectiores cum longitudine navis lineisve directionis constitueret angulos; quod tamen non omnino veritati consonum deprehenditur: si enim clavus eousque inflectatur, ut ejus latitudo perpendicularis sit cum navigio, multo languidiorem factam compeiere ejus virtutem; quod si illum adhuc ultra perpendiculum ad navem, seu lineas directionis, inflectas, ut angulos acutos cum illis efformet, tunc non solum prora non convertetur amplius ad clavum, sed in contrarium potius latus impelletur. No. II.

Quam bene autem hæc observavit prædictus Auctor, tam abstractam & obscuram effecti rationem assignat; recurrens ad nescio quem fomitem in corporibus motis latitantem, qui ad tempus otiosus, mox actuosus eorum lationem, pro re nata, nunc accelerare, nunc retardare possit. Uter vero intelligibilius rem expediat, mox judicabit Lector.

Sit ergo *a*, prora alicujus navigii; *b*, puppis; *b c*, gubernaculum ad sinistram inflexum, ea ratione, ut primo cum longitudine navis *a b* constituat angulum obtusum, dehinc rectum, tandem acutum: *d e*, sit linea directionis, secundum quam fit impulsus aquæ ad gubernaculum; perinde autem est, sive nave immota, aqua deorsum labens allidat ad gubernaculum, *Fig.* 6. 7. 8.

I 2 sive,

* Stephanus Gradius *in prima Dissertationum quatuor*, Amstel. 1680. *impressarum*.

No. II. ſive, nave a vento ſurſum impulſa, gubernaculum allidat ad aquam ſtagnantem: utroque enim caſu concipiemus, quo pacto gubernaculum *bc* per occurſum globulorum aqueorum *e*, (juxta ea, quæ ſupra diximus de determinatione motus duarum pilarum ſibi occurrentium) debeat impelli per lineam *ef* ipſi gubernaculo perpendicularem, atque per centra globulorum, punctumque contactus tranſeuntem. Quia vero interim venti impetus, vel remorum efficacia, navem alio propellit, nempe ex *b* in *a*; poterimus priorem impulſum, ex *e* in *f*, conſiderare, ut compoſitum ex duobus aliis, quorum unus navem directe ex *e* verſus *g*, alter in tranſverſum ex *e* in *h*, protrudere conatur; notabimuſque, per lationem navigii ex *b* in *a*, tolli quidem illum motum, qui fieret in contrariam partem ex *e* in *g*, minime vero alterum, quo idem navigium ad latus, ex *e* in *h*, impelli debet. Ex his enim manifeſtum eſt, ſi gubernaculum ſiniſtrorſum flexum obtuſum cum longitudine navis angulum conſtituit, debere puppim dextrorſum impelli, (unde prora viciſſim ſiniſtrorſum ad gubernaculum converti videtur) eo validius, quod motus iſte gubernaculi lateralis cum illa vi, qua agit per modum vectis, in eandem partem nunc conſpirat: ubi vero gubernaculum ad navem perpendiculare exiſtit, eo languidiorem liquet fore converſionem proræ ad ſiniſtram; eo quod, evaneſcente motu laterali, gubernaculo illa tantum virtus relinquitur, qua per modum vectis operari poteſt: ubi tandem clavus angulum cum nave conſtituit recto minorem; perſpicuum utique eſſe puto, impulſum lateralem & illum, qui fit per modum vectis, in diverſa tendere, proinde navem obtemperare debere prævalenti. Unde quoniam conſtat, hoc in caſu proram in aliam quam prius partem, dextram videlicet, converti, vecte nequicquam contrarium ſuadente; ſequitur, potiſſimam rationem virtutis, quam gubernaculo ad gubernandos navium curſus ineſſe videmus, conſiſtere in motu iſto laterali a nobis modo explicato, non autem in illo, qui fit per modum vectis.

Attractiones Magneticæ & Sed ſatis diu pelago ratem commiſimus; elementum noſtrum Terram repetamus, viſuri, ſi qua, in illa Attractionis ſeſe nobis offe-

offerant vestigia. Accedendum autem primo fuisset ad Virtutem attractivam Magnetis, (eique cognatas attractiones electricas) nisi existimassem vel sublimioris hæc esse speculationis, vel nimis præclara ea de re *Philosophi* inventa, quam ut in iis non sit acquiescendum: quamvis enim, quoad ipsam rei veritatem, multis forte non satisfaciunt; possibilitatem tamen hoc Naturæ miraculum per *Pulsionem* explicandi, abunde comprobant: vid. *Princ. Phil. part.* IV. §. 133. *seqq.* No. II. Electricæ fiunt per Pulsionem.

Nec magis immorandum esse duxi Vaporum & Exhalationum e Terra Attractioni: nam quanquam invenirem CARTESIUM in ejus explicatione satis jejunum, *Cap.* II. *Meteor.* de commoda tamen solutione non desperavi, considerans fieri posse, ut materia subtilis, calore Solis multum agitata, minutissimas quasque particulas a corporibus terrestribus abradat, quæ avulsæ, cum possint esse minores particulis atmosphæricis, vehementiorem istis concipiant motum, atque adeo fortiorem a centro Terræ recedendi conatum, & majorem in specie levitatem acquirant, qua fiat, ut in altum evolare necessum habeant, donec, superata ponderosiore atmosphæræ parte, in ea regione subsistant, quam ejusdem specificæ levitatis particulæ occupant. Quod Experimenta Boyliana de effluviis & fumis, in recipiente pleno, ascendentibus, exantlato, subsidentibus, non parum confirmant, vid. *Libr. de nov. experim. num.* 29. *&* 30. Attractio Effluviorum a Sole fit per Pulsionem.

Quo pacto porro, oleum attrahatur e vasculo a flamma lampadis; res erat explicatu non difficilis, si supponatur, pressionem Aeris flammæ imminentis maximam partem impediri agitatione primi elementi flammam constituentis; huic enim consequens est, aerem incumbentem oleo restagnanti in vase, illud per ellychnium sursum impellere debere. Hinc est, quod Matronæ parsimoniæ studentes solent operculo vasculum occludere; ut debilitata, hac ratione, aeris pressione, oleum flammæ non tanta copia affluat, nec tam cito consumatur. Attractio olei in lampade fit per Pulsionem.

Suctionis vero, & huic affine *Respirationis*, negotium parumper videbatur obscurius: nec enim sufficiebat dicere, liquorem ideo per tubum in os sugentis attolli, quod, post attractionem acris, liquor Suctio & Respiratio fiunt per Pulsionem.

No. II. liquor in tubo nullum amplius ſupra ſe pondus ſentiat, quo deprimatur; unde obſecundare neceſſum habeat preſſioni aeris externi, & ab illa ſurſum in os impelli. Quippe idem quæri poterat de aere in tubo, per quamnam pulſionem illi hæc aſcendendi vis adveniat. Quare ut totum hoc negotium per Pulſionem expediatur, Microcoſmi ſtructura conſulenda erit; qua inſpecta, deprehendimus, per Suctionem nec attrahi aerem in tubo, nec liquorem poſt aerem, ſed dilatari tantum beneficio certorum muſculorum, vel ſecundum alios diaphragmatis motu, cavitatem abdominis, atque ita rarefieri aerem huic cavitati incluſum, qui hactenus compreſſos tenuit pulmones, aeremque, in ore & aſpera arteria ſtabulantem ab ingreſſu in illos arcuit. Iſte enim aer, ſic rarefactus & ad majus jam ſpatium expanſus, non amplius tanta vi comprimere poteſt, ut antea, pulmones; unde fit, ut, hac preſſione ſublata, externus Atmoſphæræ cylindrus liquorem ſurſum per tubum in os, aeremque, ex ore, aſperaque arteria, in pulmones impellat. Advertebam autem ſimul, fieri non poſſe, ut cavitas abdominis in tantam amplitudinem diſtendatur, aerque illi incluſus eouſque debilitetur, ut omni prorſus exuatur robore; cum præſertim per inflatos pulmones ſubinde ad priſtinam reducatur anguſtiam, vireſque ſuas reſumat. Unde concluſi, ſuctione orali liquorem neutiquam in tantam altitudinem elevatum iri, in quantam elevaretur, ſi, applicata antlia, preſſio illa aeris tubo imminentis embolo perfecte interciperetur: quod ipſum quoque teſtatur experientia; quippe Mercurius etiam maximo adhibito conatu vix ad altitudinem paucorum digitorum ſolo ore inſugi poteſt; nec credo quenquam eſſe, qui ſibi perſuadeat, ſe ſola halitus ſui attractione imitaturum Antliam, quæ aquam ad 34 pedum altitudinem in tubum attollere ſolet.

Attractio catenæ & Tractio currus fiunt per Pulſionem.

Cum hac ratione mihi ſatisfactum eſſet circa Reſpirationem & Suctionem; reliquas quoque Attractionis ſpecies perluſtrare ſuſtinui. In Attractione quidem Catenæ pulſio unicuique obvia eſſe poteſt; utpote qua attracta, præcedens annulus ſubinde propellit ſequentem in flexura. Cui ſimile quid conſpicitur in Tractione Currus, quæ nihil aliud eſt, quam plures pulſiones ſibi mutuo con-

concatenatæ. Equus enim pellit ante se helcium seu collare, collare funem, funis clavum, clavus currum, currusque pellit axibus suis rotas. No. II.

Attractio baculi fit per Pulsionem.

Cum manus attrahit baculum, pulsio partium baculi non adeo quidem sensibus manifesta est; eam tamen facile sibi quis persuadeat, cum consideraverit, nullius baculi superficiem adeo exquisite tornatam & lævigatam esse posse, quin infinitis adhuc dehiscat hiatibus & poris, inter quos innumeræ protuberent asperitates, velut totidem ansulæ seu manubria, quibus propelli manu possit baculus: cujus rei indicio est, quod ad movendum baculum non sufficiat, cum immediate, sed superficiarie tantum tetigisse; verum requiratur insuper firma & arcta manus compressio, qua molles ejus partes baculi poris sufficienter intrudi, & ansulis istis applicari possint.

Examinatis ita præcipuis *Attractionum* generibus, credebam me in iis omnibus *Pulsionem* satis planam reddidisse, nec posse dari aliud exemplum, in quo non pari modo ostendi posset *Pulsio*. Sed expecta paulum, & videbis, longe maximas adhuc difficultates restare superandas. Quem in finem, ultimo exemplo de baculi Attractione manu facta pertinacius inhærebo.

An partes baculi cohæreant cæmento?

Intelligo ex antedictis, quænam *Pulsionis* partes sint in *Attractione* baculi: nunquid vero totius baculi? minime; sed supremæ tantum ejus partis cui manum immediate applicuisti. Quare itaque moventur reliquæ? An pelluntur? nullum apparet Pulsionis vestigium. Forsan pellit præcedens sequentem, sequens tertiam, hæc quartam, usque ad alteram baculi extremitatem. Id capiat qui volet, attrahi reliquas video, pelli (cum sint extra viam partis motæ, imo pone ipsam) non capio. Verum, ne desponde animum; datur forte occultum quoddam vinculum, cæmentum, sive gluten, quod partes baculi ita firmiter connectit, ut nulla possit moveri absque altera. Itane vero? Quale cæmentum? miror quo pacto cæmentum a parte baculi præcedente, & sequens a cæmento impellatur. Impellantur autem; habet suas quoque cæmentum partes: dic, sodes! qua ratione prior impellit posteriorem: dabitur fortean cæmenti cæmentum? Nugæ!

No. II. gæ! Bona verba, quæso! nondum cane receptui; omnia prius tentanda; meministin, te quondam legisse, corpora dura constare particulis ramosis, figuram hamorum vel uncinulorum præ se ferentibus, quibus se mutuo instar annulorum catenæ amplexentur. En reperisti tandem mysterium, habes cui tuto insistas; nempe capis, quo pacto partis superioris *a b* flexura inferior *b* pellat ante se superiorem inferioris *c*, hujusque flexura inferior *d* superiorem sequentis *e*, idque continua serie ad alterum usque baculi extremum. Speciose! interim ne præcipites tuum εὕρημα: clare ni fallor percipis, hamulos istos non esse puncta mathematica, neque in loco indivisibili; secus enim tota baculi longitudo redigeretur ad punctum. Quid ergo? adhuc erunt extensi; habebunt adhuc partes extra partes; effare quo cæmento hæ particulæ cohæreant. Confugere hic ad Funiculum nescio quem, partes corporis tam pertinaciter connectentem (quod *Francisci* LINI Angli fuit somnium) strenue nugari est, non philosophari. Nemo enim, ut opinor, concipiet, LINI Restiarium adeo fuisse subtilem, ut quemadmodum APELLES duxisse olim fertur lineam absque latitudine, iste fabricare potuerit funiculum omnis quoque longitudinis expertem. Si vero habet longitudinem, id est, extensionem; id est, partes extra partes; liquet, rationem nondum esse redditam, cur ipsius quoque funiculi partes non dissolvantur; nec reddi posse, nisi funiculos funiculis in infinitum addere, id est, in infinitum insanire velis. Alia ergo via elabi studebo; dicam, in baculo non unam tantum esse seriem hamorum vel uncinulorum (qualis conspicitur in *Fig.* 9.) Sed innumeras tales esse catenulas juxta se positas, sibique densissime implexas (quales adumbrantur in *Fig.* 10.); quo fiat, ut quamvis una altera catenula rumpatur in medio alicujus uncinuli, ea tamen sustentetur ab aliis catenis lateralibus, in quibus nulla talis potuit fieri ruptura, quod forte e regione rupturæ correspondeant flexuræ uncinulorum: Ita quamvis, attracto baculo, uncinulus *i m* rumpatur in medio sui *o*, manebunt tamen reliqui a latere *p n*, *n l*, & sequentes integri, quia sunt in flexuris, quæ separationem impediunt. Sed nequicquam

Fig. 9.

An Funiculo?

An solis hamulis sibi densissime implexis? *Fig.* 10.

te Cteris TAB. I.

Fig. 8

Fig. 2

Fig. 7

Fig. 4

Fig. 6

Fig. 5

quam hæc affulsit respirandi rima: nonne prævides, quæ jugulum tuum repetit, instantiam? Si una rumpi conceditur catenula, rumpentur omnes, non quidem in flexuris uncinulorum, sed in illorum medio. Ita quamvis flexuræ uncinulorum *p-n*, *n-l*, & sequentes, prohiberent, ne rumperetur baculus in directum secundum planum *o n r*, ad modum ligni serra fissi; non possunt tamen impedire, quin singulæ catenulæ aliis in locis rumpantur, una altius, altera humilius, in punctis *o*, *o*, *o*, instar ligni manu confracti; atque ita omnium partium baculi divulsio sequatur. No. II.

An quies sit causa cohæsionis partium duri corporis?

Cum dubius ita fluctuarem, succurrit CARTESII sententia, de causa istius cohæsionis partium duri corporis, quam in earumdem *quiete* constituit, *Parte secunda Princip. Philos.* §. 55. ubi ait: *Neque profecto ullum glutinum possumus excogitare, quod particulas durorum corporum firmius inter se conjungat, quam ipsarum quies.* Sed ut verum fatear, non possum a me obtinere, ut ista acutissimi Philosophi decisione hac vice acquiescam; cujus dissensus rationes, salvo aliorum judicio, fusius exponam; (utinam vero etiam hoc ipso gratiam inirem aliquam apud Antiquæ Scholæ Doctores!)

Statim autem animadvertimus, explicationem cohæsionis corporum per quietem involvere meram, quam vocant, principii petitionem, atque explicationem ejusdem rei per eandem; quod omnibus a partium studio alienis patebit, si modo considerent, se non aliam habere posse notionem cohæsionis corporum, & quietis eorumdem. Quid enim, obsecro, aliud est cohærere duo corpora, quam non separari ab invicem? & quid non separari, nisi non transferri unum ex vicinia alterius? non transferri autem ex hac vicinia, nonne idem est quod non moveri? Cum ergo cohæsionis conceptus nihil involvat præter negationem motus, enunciatio hæc, Cohæret, quia quiescit, resolvetur in istam, Non movetur, quia quiescit. Nescio vero quid sit ταυτολογεῖν, si hoc non sit.

Observandum vero præterea, dictionis istius, Cohæret, seu non movetur, quia quiescit, duplicem esse posse sensum, vel enim significat, corpora, eo ipso quo quiescunt, vel dum quiescunt, mo-

No. II. veri non posse: vel innuere vult, illa quæ primo minuto juxta se quieverunt, hac sua quiete, causam esse, non tam quod eodem illo minuto cohæserint, quam quod secundo, tertio, & sequentibus minutis, cohærere pergant. Si prior sensus obtineret, tum, præter inanem ταυτολογίαν, compositionis quoque luderetur sophismate: Nam si quis ad probandum, nunquam motum iri corpora, rationem sufficientem dari credat ex eo quod, dum quiescunt, moveri non possunt; ille non minus impertinens esset, ac si quis probaturus se nunquam moriturum, diceret se, dum vivit, mori non posse. Neque posterior sensus valde approbandus: Quia enim cohæsio nihil aliud dicit præter meram negationem motus, atque adeo ipsissimam quietem; mirum nobis videbitur, quo pacto quies efficere possit, ut corpus perpetuo quiescat, cum nihil sit causa, vel efficiens, vel conservans, sui ipsius. Facile equidem concipimus, corpus quiescens, quamdiu a nullo alio impellitur, perseveraturum in hac sua quiete, eo quod nihil possit moveri a seipso: habere vero vim nonnullam positivam ad impediendum ne moveatur, etiam tum cum ab alio ad motum sollicitatur, intellectu valde difficile est. Quid enim esset illa vis? an consistit in hoc, quod corpus quiescens alii corpori tam pertinaciter adhæreat, mediante funiculo quodam, qui separationem eorum prohibeat? an potius quod vim & conatum moventis, æquali vi & conatu, a se repellat, per quandam reactionis speciem? Verum quod quiescit, qui agere hac sua quiete poterit in aliud corpus? Sed pone agere; quæ ratio, cur hæc quietis actio, in uno corpore minima vi, in altero vix maxima, tolli potest? an ergo in uno corpore efficacior, in alio minus efficax est? absurde; cum quies non recipiat magis & minus, instar motus. Fatendum sane est, per impulsum moventis non semper tolli quietem corporis quiescentis; unde hoc *resistere* dicitur; verum quis scit, an hæc resistentia positivam quandam supponat vim, in ipso corpore quiescente latitantem; an aliquid aliud potius, quod adhuc investigandum est. Antequam igitur cognoscamus, quid hoc sit, suspendamus tantisper judicium; & credamus, hanc esse Dei voluntatem, ut corpus, cum, tali, vel

tali

tali mole, aut celeritatis gradu, ad aliud corpus quiescens appellens, illius quietem nunc superare, nunc non superare debeat, idque juxta æternas quasdam leges, quas primus Motor naturæ in creatione indidisse censendus. No. II.

Quanta autem virtute & mole debeat instructum esse unumquodque corpus, ut movendo alii corpori quiescenti aptum sit, determinabimus ex generalibus illis motus regulis ab ipso CARTESIO allatis; ut si forte nobis corpus occurrat quod moveri nequit, cum juxta regulam moveri deberet, concludamus ejus resistentiam necessario aliunde quam a quiete derivandam esse. Harum regularum quinta est: *Si corpus quiescens C esset minus quam B, tunc quantumvis tarde B versus C moveretur, illud secum moveret; partem scilicet sui motus ei talem transferendo, ut ambo postea æque celeriter moverentur.* Hujus recordatus Auctor, postea §. 63. recte sibi objecerat exemplum clavi ferrei, cujus ambæ medietates, quarum singulæ pro uno corpore numerari poterunt, quamvis manibus nostris longe minores, tam firmiter tamen sibi mutuo adhærent, ut nulla manuum vi ab invicem divelli possint, uti juxta citatam regulam divelli deberent, si nullo alio glutino sibi invicem adhærerent, quam quod juxta se quiescunt. Ad hanc autem objectionem sibi respondet ibidem *Philosophus*, rationem, cur clavus sola manuum vi frangi nequeat, hanc esse; quod manus nostræ, quæ ob mollitiem suam ad fluidorum corporum naturam accedunt, non totæ simul agere possint in clavum, sed ea tantum ipsarum pars, quæ clavum proxime tangit; unde cum hæc pars minor sit parte clavi, cui incumbit, mirum non esse, cur facilius a reliqua manu separetur, quam pars clavi a reliquo clavo.

An per quietem sufficienter explicetur, cur clavus manu frangi nequeat?

Ut vero precariam hanc esse responsionem ostendamus, varia nobis observanda venient: Primo, si quies partium clavi illum manu frangi impediat, eademque sit causa, cur uno ejus extremo attracto sequatur pone alterum; quid dicendum de bacillo ligneo æqualis crassitiei & molis, cujus si unam extremitatem attrahas, prompte sequi videbis reliquam, priorique cohærere?

No. II. rere? An quia quiescunt ejus partes juxta se mutuo? Si sic, quidni hac quiete fiet, ut eadem difficultate rumpatur bacillus, qua flectitur clavus? nunquid enim pars manus minor est parte bacilli, cui incumbit? nam tametsi lignum habeat plures ferro poros, cogitandum habere vicissim quoque pauciores manus partes sibi incumbentes, quæ in illud agere possint.

Præterea, si eadem est quietis ratio in attrahendo, atque in frangendo clavo; nulla sufficiens ratio reddi poterit, cur in attractione clavi pene nullum, in ejus inflexione maximum conatum adhibere soleamus; siquidem æque, per utramque, partes clavi ad motum & ad separationem mutuam invitantur.

Fig. 11. Non parum etiam gestio audire rationem, ob quam lignum satis crassum, applicato genu, vel etiam sola manu (pollice ad latus ligni innixo) facile disrumpi queat, conatu frangendi facto juxta lineam *a b*, vel *a c*, perpendicularem longitudini baculi *d e*; cum tamen tenuis bacillus, aut corpus adhuc fragilius, nullis humanis viribus diffringi possit, ubi conatus adhibetur in directum secundum lineas *e f*, & *d g*: tametsi enim obtendi posset, id fieri ob naturæ a vacuo abhorrentiam, eo quod, facta hoc ultimo casu separatione, aer non posset eodem momento a lateribus bacilli ad ejus medium irruere; non tamen ita respondebunt Vacuistæ, nec inter Plenistas illi, qui quietem cohæsionis causam statuunt.

Iterum miretur forte aliquis, quare eadem manuum vis, quæ separat alia quiescentia multo majora clavo, quæ librum de tabula separat juxta quam quievit, ingentia pondera in terra quiescentia in altum elevat, non possit tollere quietem particularum clavi. Dicis, superficies libri & tabulæ, ponderis & terræ, non immediate se contingere, sed intercedere utrinque aerem, vel fluidum aliud subtilius. Verum ipse hic aer, qui intermediat, ejusve particulæ, aut quiescunt etiam juxta superficiem libri vel ponderis, aut moventur: si quiescunt; iterum redibit quæstio, cur hanc quietem superare valeat vis manus, cum non valuerit superare illam particularum clavi longe minoris: si moventur; etiam liber in mensa jacens, & pondus in

terra

terra quiescens movebuntur, cum particulæ aeris nequeant transferri ex vicinia libri & ponderis, quin hæc transferantur simul ex vicinia illarum: sic nihil demum sola manu moveri poterit, quod prius non motum fuerit; sic omnia corpora aeri exposita, etiamsi non impulsa, movebuntur; sic movebuntur ædificia, turres, montes, &c. Scio, quamvis hæc a communi loquendi usu alienissima, in Auctoris tamen hypothesi non adeo absurda esse. Sed illud potissimum hic observandum; quod proprie hic quæstio non sit, an corpus aere undiquaque ambitum recte dicatur moveri, necne, respectu habito ad aerem ambientem; hæc enim relatio, pure extrinseca, nullam realem mutationem vel modum addit corpori: sed quæritur, an corpus istud absolute per se, & tanquam in vacuo spectatum, possideat illam vim, quæ agitat corpora, quæque essentiam motus constituit; an vero hæc vis insit soli aeri ambienti, an denique utrique, ita ut aer allidens ad corpus, ei partem harum virium communicet? Neutrum dicere poterit CARTESIUS, quin regulæ suæ quartæ contradicat: si omnis movendi vis sit penes aerem, nulla penes corpus crassum aere circumdatum; quo pacto illi a manu toties minore ista vis imprimetur? sin illam communicatam supponat ab aere, meminisse debuisset, fluidissimi corporis illas tantum particulas in corpus agere posse, quæ illud proxime ambiunt; sed hæ omnes simul sumtæ forte sexcenties minores sunt mole commovenda; quo pacto ergo huic partem motus sui juxta regulam communicabunt? Sed sensibili aliquo exemplo forsan evidentius insufficientia explicationis Cartesianæ demonstrabitur. No. II.

Quem in finem repetamus idem, quod nobis Auctor subministravit, exemplum clavi: Sumatur clavus ferreus, intrudatur mediotenus arcto foramini parietis, altera medietate extra parietem prominente; hanc desuper malleo pete, & comperiere, illam sat validos sustinere ictus, antequam vel curvetur semel, nedum frangatur. Si nullum aliud glutinum esset, quod partes clavi connecteret, quam ipsarum quies; sequeretur juxta citatam regulam, ad impulsum mallei, utpote corporis clavo longe majoris, partem clavi prominentem a reliqua non tantum avulsum, sed ea

No. II. quoque celeritate latum iri, quæ æqualis fere eſt velocitati mallei, antequam clavum attigiſſet. Supponamus enim malleum non niſi nonagies novies quantitate excedere clavum, & uno pulſu arteriæ ſpatium unius perticæ in aere emenſum fuiſſe; communicabit igitur, juxta regulam, clavo in occurſu centeſimam partem ſui motus, nonaginta novem pro ſe retentis; ut ſic malleus & clavus æquali celeritate ferantur: nempe quia malleus centeſimam tantum partem motus ſui amiſit, uterque pulſu arteriæ $\frac{99}{100}$ unius perticæ emetiri debet; quod ſane fieri nequit, niſi pars iſta clavi ab altera quieſcente ſeparetur. Nec valet hic *Philoſophi* exceptio: malleus enim, cum corpus ſit, non inſtar manuum molle, ſed duriſſimum, hinc non tantum ſuperficie illa, qua clavum immediate contingit, imo nec illa ſua craſſitie tantum, quæ clavo directe incumbit, ſed tota ſua mole & ſoliditate in clavum agere cenſendus eſt. Hanc quippe eſſe corporum durorum naturam experitur quivis, qui magnum onus in capite geſtans, non tantum ſentit pondus illius cylindri, qui capiti directe incumbit, ſed & totius molis reliquæ, quæ extra caput prominet.

Ut vero rem magis illuſtremus, ſuſpendatur ex hoc clavo parieti infixo malleus; evidens eſt, non tantum malleum, ſed præterea magnum pondus eidem clavo appenſum ab ipſo ſuſtentatum iri. Pari ratione axiculus bilancis utramque lancem, una cum multis centumpondiis, & uncus ferreus ſatis exiguus immenſæ molis campanas ſuſtinet. Idem autem uſu venit in his exemplis, quod in præcedenti: ſi enim ibi clavus per mallei ex alto ruentis impetum ad ſeparationem invitatur, non minus hic clavus, axiculus, & uncus a tam vaſtis ponderibus ſibi appenſis, ad quorum molem nullam pene habent proportionem, ſollicitantur ad motum: de quo facile conveniemus, ſi perpenderimus, non poſſe appendi hæc pondera, quin tota ſua mole ſuper clavo, axiculo, vel unco gravitent, illoſque premant; premere autem non poſſe abſque conatu illos loco movendi, adeoque partem a parte ſeparandi. Quæ cauſa ergo, cur nulla actualis ſeparatio ſequatur? anne quies particularum clavi, axiculi, unci? Fabulam nobis

nobis narras, CARTESI: annon hæc tolli deberet vi regulæ tuæ quintæ per pressionem vastorum corporum ipsis appensorum, ad quorum molem nullam imaginabilem proportionem habent illæ particulæ? No. II.

Postquam itaque certo certius cognovissem, neque catenas, nec hamulos, nec funiculum, nec ipsam quietem, nec quodvis aliud cæmentum, quod inter particulas durorum corporum intercedere forte posset, earum cohæsionem sufficienter explicare; judicavi longe aliud hic latitare mysterium. Et quum perspicerem, duo corpora perinde cohæsura, sive ab interno vinculo connectantur, sive ab externa vi comprimantur; non dubitavi tandem concludere, cohæsionem partium duri corporis necessario acceptam ferendam extrinseco alicui corpori comprimenti, quodcunque demum illud fuerit. Tali enim, si quod detur, glutino longe sane firmius conjungi intelligemus particulas durorum corporum, quam ipsarum quiete, aut alio quovis cæmento, modo indicibili illas connectenti.

Firmitas corporum tribuenda compressioni corporis alicujus externi.

Cui si animum advertisset CARTESIUS, non difficulter agnovisset infirmitatem illius sui dilemmatis, quo usus fuit ad quietem hujus cohæsionis causam asserendam, quando pergit loco allegato; *Quid enim esse posset glutinum istud? non substantia, quia cum particulæ istæ sint substantiæ, nulla ratio est, cur per aliam substantiam potius, quam per se ipsas jungerentur: non etiam est modus ullus diversus a quiete; &c.* Quid si enim subsumtionem invertam: *Atqui non est modus* (proinde nec quies); modi enim non conjungunt, quia modorum non est agere, sed substantiarum per modos. *Ergo substantiam esse oportet:* Sed si sit substantia, an illa nulla poterit esse alia, quam ipsæ cohærentes particulæ? imo quævis alia potius, quam ista; cum uti nihil a seipso moveri, ita nihil per seipsum alteri jungi possit: Notandum autem, non obscure hic prodere *Philosophum*, se per illam aliam substantiam nullam aliam intellexisse, quam intermediam inter duas particulas intercedentem; cum hac ratione verum sit, ad vitandum progressum in infinitum, subsistendum necessario esse in duabus tandem particulis, quæ per se cohæreant, absque interventu alia-

rum

No. II. rum mediarum. Sed dum ita ratiocinatur, non advertendo ad aliam ſubſtantiam externam & ambientem, qua particulæ connecti poſſint; perinde facere videtur, ac ſi quis librum ſub compactoris prelo videns, & ad prelum non attendens, inferre vellet, cohæſionem foliorum quieti illorum aſcribendam eſſe, ex eo quod nequeat attribui vel ipſis foliis, vel ulli ſubſtantiæ interceptæ inter folia, utpote quæ nulla eſt. Imo mirari merito ſubit, cur acutiſſimus Philoſophus, qui primus claros in Philoſophiam conceptus intulit, quique corporum gravitatem, non indicibili cuidam principio interno, ſed ambientis materiæ preſſioni aſcripſit; cohæſionem tamen illorum intrinſecæ quieti, cujus quæ ſint connectendi vires, intelligere mens noſtra nequit, quam vero externæ preſſioni tribuere maluerit.

Et quidem Gravitati Atmoſphæræ. Poſtquam itaque ſatis, ut opinor, conſtiterit, cohæſionem durorum corporum nulli alii cauſæ, quam compreſſioni alicujus corporis externi deberi; non multum porro illi determinando inſudabimus, cum præter Aerem nullum detur, quod corpus durum immediate tangat & ambiat. Illud tantum inquirendum, an cum verbi gr. manu attraho baculum, ille duntaxat aer, qui per motum brachii mei expellitur, & per circulum ad alterum baculi extremum defertur, baculum poſt manum pellat, ejuſque partes ita cohærere faciat. Id namque videtur ſuaderi ex eo, quia quo ponderoſius corpus quod attrahitur, eo major ei attrahendo conatus adhibendus; propterea quod majus pondus magis quoque reſiſtit aeri pellenti ſe, & conſequenter manui pellenti aerem. Verum quod ſolus aer manu expulſus hanc baculi cohæſionem non efficiat, exinde liquet, quia nulla eſt ratio, quare iſte aer expulſus potius ad imum baculi per majorem ambitum, quam per minorem peripheriam ad quamvis aliam ejus partem intermediam deferatur: cum enim partes baculi nullo cohæreant cæmento, & per attractionem manus ſuperior tantum baculi pars ad motum ſollicitetur, adeoque diſponatur ad hiatum relinquendum inter ſe & inferiorem, locumque aeri cedendum; videtur potius, aerem manu expulſum inter illas ſeſe inſinuaturum, quam vero longiori via ad imum baculi perrecturum; cum natura

via, quantum licet, breviſſima agere nitatur. Illud vero imis hic animadvertendum, quod ſi ſolus aer a manu at- expulſus cohæſionis cauſa ſit; ſequeretur, ſi loco at- is ſuſpenderetur in aere baculus, eum ſubito in partes irum eſſe, quod tum nullus amplius a ſummo baculi ex- propelleretur aer; ceſſante enim aeris expulſione, tan- auſa, deberet ceſſare cohæſio partium baculi, velut eſ- Unde cum cohærere pergant, alia huic effecto cauſa da; & quandoquidem præter generalem totius Atmoſ- preſſionem (qua gravitatis effectus in corporibus terreſ- producitur) nulla alia meditanti ſeſe preſſio offert; ne- conſequentia infero, hanc demum veram eſſe iſtius co- cauſam. No. II.

Paralleliſmus inter cohæſionem marmorum politorum, & particularum inſenſibilium duri corporis.

iſſertioni ſtabiliendæ opportune incidit celebre illud Expe- m de duobus marmoribus politis & lævigatis, quæ ſibi ut nullus aer intermediare poſſit, quovis cæmento te- cohæreſcunt, adeo ut niſi maxima adhibita vi avelli a ſe nequeant. Quod Phænomenum, ubi per preſſionem vel em atmoſphæræ explicant Scriptores Hydroſtaticorum, lunt: Cum duo marmora ita ſibi juncta in altum ele- vel ex alto ſuſpenduntur; per hanc elevationem vel onem fit, ut marmor inferius nullum amplius ſupra ſe habens, quo deprimatur, a pondere lateralis aeris ſur- pelli debeat contra ſuperficiem inferiorem ſuperioris mar- atque ita ſuſpenſum teneri, quamdiu, una cum pon- nnexo, ſi quod annexum fuerit, non præponderat ſimili aerio, (vel potius priſmati, ſi marmor ſit quadran- figuræ) a marmoribus ad ultimos atmoſphæræ limites o. Pari modo in attractione baculi exiſtimandum eſt, aeris ſupremæ ejus ſuperficiei incumbentis reprimi & im- ne gravitare poſſit ſuper particulis inferioribus; quo con- quid evidentius, quam has ſurſum impelli debere per aeris lateralis, atque ita ſuperioribus firmiter aggluti-

ifeſtum quoque eſt, eundem effectum ſequi debere, ſive

No. II. rum mediarum. Sed dum ita ratiocinatur, non advertendo ad aliam ſubſtantiam externam & ambientem, qua particulæ connecti poſſint; perinde facere videtur, ac ſi quis librum ſub compactoris prelo videns, & ad prelum non attendens, inferre vellet, cohæſionem foliorum quieti illorum aſcribendam eſſe, ex eo quod nequeat attribui vel ipſis foliis, vel ulli ſubſtantiæ interceptæ inter folia, utpote quæ nulla eſt. Imo mirari merito ſubit, cur acutiſſimus Philoſophus, qui primus claros in Philoſophiam conceptus intulit, quique corporum gravitatem, non indicibili cuidam principio interno, ſed ambientis materiæ preſſioni aſcripſit; cohæſionem tamen illorum intrinſecæ quieti, cujus quæ ſint connectendi vires, intelligere mens noſtra nequit, quam vero externæ preſſioni tribuere maluerit.

Et quidem Gravitati Atmoſphæræ. Poſtquam itaque ſatis, ut opinor, conſtiterit, cohæſionem durorum corporum nulli alii cauſæ, quam compreſſioni alicujus corporis externi deberi; non multum porro illi determinando inſudabimus, cum præter Aerem nullum detur, quod corpus durum immediate tangat & ambiat. Illud tantum inquirendum, an cum verbi gr. manu attraho baculum, ille duntaxat aer, qui per motum brachii mei expellitur, & per circulum ad alterum baculi extremum defertur, baculum poſt manum pellat, ejuſque partes ita cohærere faciat. Id namque videtur ſuaderi ex eo, quia quo ponderoſius corpus quod attrahitur, eo major ei attrahendo conatus adhibendus; propterea quod majus pondus magis quoque reſiſtit aeri pellenti ſe, & conſequenter manui pellenti aerem. Verum quod ſolus aer manu expulſus hanc baculi cohæſionem non efficiat, exinde liquet, quia nulla eſt ratio, quare iſte aer expulſus potius ad imum baculi per majorem ambitum, quam per minorem peripheriam ad quamvis aliam ejus partem intermediam deferatur: cum enim partes baculi nullo cohæreant cæmento, & per attractionem manus ſuperior tantum baculi pars ad motum ſollicitetur, adeoque diſponatur ad hiatum relinquendum inter ſe & inferiorem, locumque aeri cedendum; videtur potius, aerem manu expulſum inter illas ſeſe inſinuaturum, quam vero longiori via ad imum baculi perrecturum; cum natura

natura via, quantum licet, brevissima agere nitatur. Illud vero cum primis hic animadvertendum, quod si solus aer a manu attrahente expulsus cohæsionis causa sit; sequeretur, si loco attractionis suspenderetur in aere baculus, eum subito in partes collapsurum esse, quod tum nullus amplius a summo baculi extremo propelleretur aer; cessante enim aeris expulsione, tanquam causa, deberet cessare cohæsio partium baculi, velut effectus. Unde cum cohærere pergant, alia huic effecto causa quærenda; & quandoquidem præter generalem totius Atmosphæræ pressionem (qua gravitatis effectus in corporibus terrestribus producitur) nulla alia meditanti sese pressio offert; necessaria consequentia infero, hanc demum veram esse istius cohæsionis causam. No. II.

Parallelismus inter cohæsionem marmorum politorum, & particularum insensibilium duri corporis.

Cui assertioni stabiliendæ opportune incidit celebre illud Experimentum de duobus marmoribus politis & lævigatis, quæ sibi juncta, ut nullus aer intermediare possit, quovis cæmento tenacius cohærescunt, adeo ut nisi maxima adhibita vi avelli a se mutuo nequeant. Quod Phænomenum, ubi per pressionem vel gravitatem atmosphæræ explicant Scriptores Hydrostaticorum, hoc volunt: Cum duo marmora ita sibi juncta in altum elevantur, vel ex alto suspenduntur; per hanc elevationem vel suspensionem fit, ut marmor inferius nullum amplius supra se pondus habens, quo deprimatur, a pondere lateralis aeris sursum impelli debeat contra superficiem inferiorem superioris marmoris, atque ita suspensum teneri, quamdiu, una cum pondere annexo, si quod annexum fuerit, non præponderat simili cylindro aerio, (vel potius prismati, si marmor sit quadrangularis figuræ) a marmoribus ad ultimos atmosphæræ limites protenso. Pari modo in attractione baculi existimandum est, pondus aeris supremæ ejus superficiei incumbentis reprimi & impediri, ne gravitare possit super particulis inferioribus; quo concesso, quid evidentius, quam has sursum impelli debere per pondus aeris lateralis, atque ita superioribus firmiter agglutinari?

Manifestum quoque est, eundem effectum sequi debere, sive at-

No. II. attrahatur baculus, sive suspendatur; perinde uti cohærere solent marmora, sive dum e terra elevantur, sive dum ex unco suspensa quiescunt; quia utroque in casu particulæ inferiores a pondere sibi incumbente liberantur, sufflaminato a supremis impetu desuper ruentis aeris.

Facilis etiam hinc redditur ratio, cur aer lateralis pellat integrum baculum potius, quam sese insinuando partibus baculi pellere possit tantum superiores: nam eo ipso quo attrahere conor vel suspendere baculum, tollo eodem momento pondus aeris incumbentis ab omnibus partibus intermediis usque ad infimam; adeo ut antequam aer partibus baculi alicubi sese intrudere possit, infima ejus particula nullum amplius supra se pondus habens, debeat ab aere laterali sursum impelli, & pellere ante se superiores. Quare quamvis in baculo sit series innumerarum talium particularum sibi cohærentium, non poterit tamen fieri, ut in ejus attractione vel suspensione ulla ab alia sejungatur; quemadmodum nullum dubium est, etiamsi tria, quatuor vel plura complanata marmora sibi superficietenus conjungantur, ea omnia non minus cohæsura, quam si duo tantum in experimentum adhibeantur. Ex quibus omnibus constat, idem fieri in cohæsione particularum duri corporis, quod fit in illa marmorum politorum; hoc tantum cum discrimine, quod hic industria humana circa duo magna corpora poliendo præstat, quod natura in superficiecculis particularum insensibilium coaptandis præstare solet. Ad quem manifestum parallelismum si attendamus, mirari non parum subit, quod recentiores Philosophi in cohæsione marmorum aeris pressionem agnoverint, nec eandem repererint in cohæsione partium insensibilium duri corporis. *

Ne

* Cum hanc dissertationem ad umbilicum fere perduxissem, incidi in Exc. Dn. Boylii Tractatum de *Historia Firmitatis corporum*, e quo perspexi, Nob. Authori jam olim suboluisse *vim aeris in connectendis duobus corporibus sensibili mole constantibus* (non audet adjicere, *in conglutinandis particulis insensibilibus ejusdem corporis*) *sect.* 8. & 24. Tametsi vero non parvam inde

Ne quid vero assumamus, quod alii sensuum & infantiæ præjudiciis occupati, vix largientur, consultum erit, ut dissertationis nostræ orbitam tantisper deseramus, donec examinaverimus, an hæc *Aeris Pressio* seu *Gravitas* extra omnem jam dubitationis aleam sit posita, ne chimæram videamur pro principio nostro assumere. Primum & præcipuum, quod illi natales dedit, est celeberrimum illud Experimentum Torricellianum de Argento vivo, quod tubo vitreo superne obstructo inclusum ad certam & determinatam altitudinem in illo suspensum hæret: Sumitur enim Tubus vitreus cylindricus *a b*, altera sua extremitate bene clausus; isque impletur argento vivo; dein invertitur, obstructo prius digito orificio ejus, ne quid effluat; inversusque immergitur cum claudente digito in vasculum quoddam *m n* alio argento vivo repletum; postmodum subtrahitur paulatim digitus; quo subtracto, deprehenditur argentum, quantumvis ponderosum, minime tamen in vasculum effluere, sed tubi summitati affixum hærere, dummodo tubus non altior fuerit 29 circiter digitis. Idem animadvertitur, si loco Mercurii quicunque alius adhibeatur liquor, puta Aqua; qua si tubum quantumvis procerum dicto modo repleveris, eumque inversum in aliam aquam stagnantem immerseris; subtracto digito, reperies eam tubi summo adhuc affixam hærere; imo tametsi postea tubum e liquore restagnante omnino extrahas, non defluet tamen e tubo aqua, dummodo tubus non nimis ampli fuerit orificii. Idem vero quoque paucis mutatis effectui dederis; si assumta, loco tubi una extremitate clausi, fistula utroque orificio aperta, immergatur liquori alicui ad summitatem usque, eoque repleatur, ac postmodum superiori orificio digito obstructo extrahatur: hoc enim facto, liquor in fistula adhuc suspensus hærebit, quamdiu obturatum manet ejus orificium; quod jam vulgare est in cylindris illis, e laminis ferri

No. II. Gravitas Aeris sub examen revocatur.

Experimentum Torricellianum.

Fig. 12.

de lucem istis afferre potuissem, & nonnulla alio disponere ordine: consultius tamen judicavi, nihil meditationibus meis addere, easque hic recensere, quo primum naturalissimo ordine sese menti meæ obtulerunt.

No. II. ferri confectis, quibus vina e doliis attolli solent. Sed quid mirum, præoccupas, non descendere liquores in tubis; cum enim, ob clausum tubi verticem, nullus aer possit loco liquoris descendentis succedere, necesse est ut sic suspensus hæreat ad impediendum vacuum. Sed expecta paulisper, & videbis, longe aliud hic latitare mysterium; præterquam enim quod Vacui metus finem tantum dicat hujus suspensionis, non causam ejus efficientem; ipsi quoque non semper congruit experientiæ. Fig. 13. Quare sumatur nunc Tubus *a d*, altior $29\frac{1}{2}$ digitis, isque denuo repleatur argento vivo; reliqua peragantur ut prius, digitusque subtrahatur; jam si natura tantopere abhorreret vacuum, quo pacto sibi consuleret? certe suspensum teneret in tubo liquorem, si saperet; quandoquidem per descensum liquoris in tubo breviori non magis vacuum timendum sit, quam per descensum in altiori. Sed quid fit? non obstante prætenso hoc vacui metu, descendit mercurius ad *l*, usque dum altitudinem $29\frac{1}{2}$ digitorum supra argentum in vase restagnans obtineat, qua quidem in statione quiescit, nec humilius descendit. Pari modo deprehensa est aqua, per antlias suctorias, non ad quamcunque altitudinem elevari posse, sed in altitudine 34 circiter pedum subsistere, quam cum attigit, nequicquam agitabitur embolus, nihil amplius efficiet.

Explicatur per aeris pressionem. Horum ergo phænomenorum ut causam reddant sanioris Philosophiæ Patroni, respondent, ideo hydrargyrum, vel aquam, in tubis brevioribus non descendere, quoniam pondus similis columnæ aeriæ *e f*, a terra ad summos usque atmosphæræ limites protensæ, & pro base *e i* habentis partem superficiei liquoris in vase stagnantis, fortius premere subsumitur super hanc suam basin, quam tantillum pondus liquoris in fistula contenti premit super partem superficiei *a c* lateribus fistulæ interceptam; unde fiat, ut debilior hæc liquoris pressio fortiori illi aeris externi cedere, ipseque proin in fistulam intrudi, in eoque pensilis hærere necessum habeat: hancque similiter esse rationem, cur dicti liquores in tubis longioribus descendant; nempe quia jam liquoris cylindrus, in fistula *a d*, præponderat simili cylindro atmo-

mosphærico, extra fistulam, *e f*. Unde concludere promtum est, si externus atmosphæræ *e f*, & internus liquoris *a l*, æquiponderant; nec ascensurum nec descensurum amplius in tubo liquorem. Quanta vero liquoris cujusque portio simili cylindro aerio æquiponderare censenda sit, experientia sola nos docere potest; quæ cum testetur, argentum semper in altitudine 29½ digitorum, & aquam 34 circiter pedum acquiescere, inque æquilibrio hærere; concludimus, cylindro aeris, a superficie liquoris stagnantis ad summitatem atmosphæræ protenso, æquiponderare similem cylindrum argenteum 29½ dig. & aqueum 34 pedum; qui duo proinde & inter se æquiponderabunt: unde simul ratio iniri poterit specificæ gravitatis utriusque liquoris; cum enim gravitates duorum corporum ejusdem molis sint in ratione reciproca altitudinum similium cylindrorum æquiponderantium; erit gravitas argenti ad gravitatem aquæ, ut 34 pedes ad 29½ pollices, id est, mercurius erit quam proxime quatuordecies in specie aqua gravior; quod ipsum liquoribus ad bilancem examinatis experientiæ consonum deprehenditur. No.II.

Explicatis ita breviter, juxta mentem saniorum Philosophorum, causis suspensionis liquorum in tubis; superest, ut examinemus ea, quæ huic explicationi possunt in contrarium objici. Itaque, si aer, gravitatis suæ pondere vel pressione, sustentet in tubo liquorem; colligi debet, si quo artificio pressio illa aeris externi arceri & impediri possit, ne in liquorem inclusum sese exerat, fore ut liquor, toto suo pondere, repente deorsum ruat; sublata enim causa, deberet cessare effectus. Hoc autem artificium ut, sine omni mysterio, effectui detur, applicetur os orificio inferiori fistulæ alicujus *r s*, superius sigillatæ & repletæ aqua; atque intus sugatur seu attrahatur aqua; quæ, hac ratione, magno impetu in os irruere debere videtur; idque duplici jure, semel vi suctionis, semel vi propriæ suæ gravitatis, quæ libere nunc sortiretur effectum, utpote non amplius impedita a pressione aeris externi. Sed quid fit? eventus accidit plane contrarius: liquor in fistula hæret pertinaciter, nec nisi difficulter in os descendit; uti experiuntur illi, qui e lagena, ore totum ejus orificium obtegente, bibere conantur.

De adsuctione liquoris e tubo clauso vel lagena.

Fig. 14.

 Quam-

No. II. Quamnam ergo assignabimus causam, cur admoto ore non descendat liquor? videtur profecto, omnis agentis externi pressio, ore intercepta cum sit, causam suspensionis non alibi quærendam esse, quam intra ipsum tubum. An ergo confugiemus ad vacui fugam, dicendo, ideo liquorem non descendere, quia si sugenti obtemperaret, vacuum relinqueret in superiore fistulæ parte? An LINI arripiemus funiculum, seu tenuem substantiam a liquoribus abrasam vel abradendam, & more funiculi liquoris superficiem cum superiore tubi superficie connectentem? Sed quia institutum nobis est de rebus loqui, quas concipere valeamus; nec fuga vacui, nec LINI funiculus tutum nobis præstabit asylum: quid ergo? repetemus *Aeris pressionem*; nec temere causam, infinitis alias nixam experimentis, deseremus; quamvis forte, prima fronte, difficultas omnis superari nequeat: illam potius conciliare cum nostro casu annitemur. Quamobrem considerandum, quid in Inspiratione & Suctione contingat, videndumque, an idem in re præsenti locum habeat. Cum musculi thoracis (vel, ut alii, diaphragmatis motus) inflant abdomen, dilatari solet cavitas illa, in qua jacent pulmones; quo fit, ut exiguus ille aer pulmones ambiens, in majus spatium extendatur ac rarefiat, neque amplius tanta vi pulmones constringere possit, ut fecerat antea; quare necessum est, ut prævalens jam atmosphæræ pondus aerem sine obstaculo in nares & os, perque asperam arteriam in pulmones, ipsum vero liquorem per tubum in os intrudat, ubi a musculis œsophageis abreptus in debita porro sibi vasa devehitur. Applicaturi jam hæc ad rem præsentem, advertimus forte fieri posse, ut in dicto casu nulla detur suctio: ubicunque enim suctio est, ibi venter intumescit, & aerem proximum è loco expellit; sed cum jam antea omnia supponantur plena, non posset pelli aer, nisi in locum, quem deseruit aqua attracta: ad hunc autem locum cum non pateat accessus, ob orificium digito obturatum, sequitur aerem non posse pelli, nec ventrem expandi, nec proin aquam in os insugi. Cum vero & hac ratione sequi videatur, si antlia, loco oris, applicata fuerit tubo altera sui extremitate clau-

sa,

ſo, nec embolum quoque ipſum poſſe adduci, eo quod aer ab embolo expulſus locum non inveniat quo ſe recipiat; quod tamen frequenti refragatur experientiæ. Quare ut hæc conciliemus, aliud medium non ſupereſt, quam ut dicamus, embolum propterea propellere poſſe aerem, quod ſatis habeat virium ad illum condenſandum, id eſt, ad expellendam materiam ſubtiliorem, inter aeris particulas craſſiores natantem, eamque in tubum intrudendam; muſculos vero thoracis non ſufficientibus ad aerem condenſandum viribus eſſe inſtructos: proinde abdomen non poſſe aerem ambientem expellere, nec ejus locum occupare, citra dimenſionum penetrationem. Hinc enim ratio, quare embolus adduci facile poſſit, & adductum prompte ſequatur liquor, non vero identidem dilatari queat cavitas pulmonum; qua dilatatione negata, nulla poteſt fieri ſuctio. Reſponderi etiam poſſet, tametſi cavitas illa per conatum muſculorum ægre quodammodo amplietur, aerque illi incluſus tantundem rarefiat; illum tamen ſufficientes adhuc poſſe retinere vires ſuſtentando tantillo cylindro liquoris incluſi, ejuſque deſcenſui impediendo, præſertim quia, ob excluſam, obturato orificio *s*, atmoſphæræ preſſionem, liquor proprio duntaxat pondere deſcenſum molitur. No. II.

Sed non immerito quis porro quærat; unde fiat, quod parva illa aeris molecula, ſive ſit in ſtatu ſuo naturali, ſive in ſtatu modicæ dilatationis, reprimere poſſit pondus multo majoris copiæ liquoris alicujus incumbentis, eumque a deſcenſu cohibere; quare non potius liquor iſte, tanquam multo ponderoſior, aerem in corpore humano ſtabulantem condenſet, quo in anguſtias redacto, aperta illi pateret deſcendendi via!? Sciendum itaque, Phyſiologos modernos in aere, præter gravitatem, conſiderare *Vim* quandam, quam vocant, *Elaſticam*; ita comparatam, ut minima portio aeris alicubi incarcerati vel incluſi, in ſuſtentandis aut pellendis liquoribus tantum poſſit, quantum totius atmoſphæræ pondus; adeo ut, per hanc vim pauxilli aeris corpori humano incluſi, aqua non minus in tubo ſuſtentari debeat, quam ſuſtentaretur, amoto ore, a toto pondere atmoſphærico. De Elatere Aeris ejuſque effectu.

Per

No. II. De duabus fistulis sibi agglutinatis. Per idem elaterium, ut opinor, explicabunt sequens experimentum: Inseratur inferiori ejusdem fistulæ *r s*, aqua repletæ, & ad perpendiculum erectæ, orificio, loco oris nuper admoti, orificium alterius fistulæ *t u*, inferiori sui extremo clausæ vel hermetice sigillatæ; sic ut orificia fistularum *t r* communicationem habeant invicem, sed ita arcte sibi jungantur, ut nullo modo aeri externo ingressus permittatur: quid fiet? hærebit adhuc suspensus in superiore fistula liquor, quamvis nullus aeri laterali externo pateat accessus ad liquorem sursum pellendum: quantum enim ad aerem in inferiore fistula *t u* contentum, is non videtur solus hoc præstare posse; propterea quod, cum aqua longe sit in specie gravior aere, pressio cylindri aquæ deorsum multo deberet prævalere pressioni tantilli cylindri aeris sursum. Hic igitur, inquam, Elateristæ iterum ad virtutem aeris elasticam recurrent; qua fieri possit, ut parva moles incarcerati aeris tantam vim habeat sursum premendi liquorem, quantam haberet integer aeris cylindrus ad extimam usque atmosphæræ superficiem extensus.

Fig. 15.

De suspensione liquorum in loco clauso, aut obstructo vasculo. Eundem elaterii effectum conspici autumant in observationibus de hac suspensione liquorum factis in loco aliquo clauso, cubiculo puta, recipienti nondum evacuato, aut ubi solummodo vasculum inferiori tubi orificio appensum obturatum fuerit: in omnibus enim his casibus, hærebit suspensus liquor, non minus atque si experimentum subdio, extra recipiens & recluso vasculo captum fuisset; indicio nempe, aeris parietibus conclavis aut recipientis lateribus inclusi, vel inter superficiem liquoris stagnantis, vasculique operculum intercepti, elaterem æquipollere gravitati totius atmosphæræ.

De aere relicto in summitate tubi. Quod vero istud, de elaterii æquipollentia cum atmosphæræ gravitate, assertum non ita crude, ac sine limitatione, intelligendum sit, ex sequenti patebit experimento: Sume commodæ altitudinis fistulam *m n*, utrinque patulam; ejusque inferiori orificio digito obstructo, per superius infunde mercurium; relicto tamen, in summitate tubi, uno alterove pollice aeris, sic ut mercurius occupet spatium *b*, aer spatium *a*: Immerge dein

Fig. 16.

tu

tubum, cum claudente digito, in argentum vasculi q; admotoque alio digito supremo fistulæ orificio, subtrahe alterum argento immersum; quo facto, descendet quidem notabiliter liquor, multoque humilius, quam solo pondere tantilli aeris inclusi deprimi posset, nempe per spatium y; nihilominus maximam adhuc partem suspensus hærebit; qui tamen lapsum omnimodum non posset evitare, si aer inclusus elatere suo tantundem in illum ageret, quantum, deobturata fistula, tota cylindri atmosphærici moles; propterea quia pressio cylindri ex liquore & aere incluso compositi, pressione similis cylindri externi ex puro aere constantis, tanto foret validior, quanto liquoris inclusi gravitas excederet gravitatem æqualis molis aeris. No. II.

Ut itaque cautius mercari discamus, circa rem maxima etiam alias obscuritate involutam, operæ pretium me facturum arbitror, si quam notionem de hoc aeris elaterio habeamus, & quousque extendendum sit, explicem. Hunc in finem autem, altius paulo repetenda sunt, quæ de Natura & Causis Gravitatis corporum nobis innotescunt.

De Natura & Causis Gravitatis.

Cum videamus, si non omnia, pleraque saltem corpora, quanquam cætera diversissimæ naturæ, in hoc tamen convenire, ut libero aeri exposita deorsum, terram versus, ferantur; merito concludimus, hanc vim tendendi deorsum non provenire a forma aliqua intrinseca, vel qualitate cuique corpori peculiari, sed ascribendam esse causæ alicui externæ & universali, quæ, omnia in hoc mundo sublunari corpora implicans, eundem in iis gravitatis effectum producere debet. Istiusmodi vero generalem causam, lustrando totum hoc Universum, vix reperiemus alibi, quam in motu vorticoso materiæ Terræ circumfusæ. Quocirca meminerimus, Deum, postquam hunc sublunarem mundum condidisset, ei indidisse motum, eumque geminum; unum generalem, quo omnes hujus materiæ particulæ in eandem plagam circa commune aliquod centrum, Terræ videlicet, rapiantur; alterum peculiarem, quo unaquælibet particula materiæ in omnes plagas infinitis modis moveatur: cogitemusque,

No. II. que, illum, in quem conſpirat tota hæc materiæ compages; Gravitatis forte; hunc vero Elaterii cauſam exiſtere poſſe: quare illum, *Motum communem* ſeu *Gravitatis;* hunc, *proprium* ſeu *Elaterii*, non incommode appellare poterimus.

Quanam autem ratione effectus Gravitatis ex priori motu elici poſſit, aſſequemur; ſi conſideremus, omnia in hoc Vortice contenta, per proprietatem a motu circulari inſeparabilem, acquirere vim & conatum recedendi ab ejus centro; qui quidem conatus in iſtis particulis tanto major, vel minor exiſtit, quanto quælibet earum ſigillatim vel rapidiorem, vel languidiorem agitationem accepit; ita ut proprie loquendo omnia corpora dicenda ſint levia; quamvis interim illa, quæ reliquis minus levia ſunt, ob rationem mox dicendam, deſcendere debeant (unde gravia illa appellare aſſueti ſumus): plane ut illi, qui omnia corpora conſiderant ut gravia, aerem tamen non verentur appellare levem, quod ſub corpore graviori aquæ detentus aſcendere cogitur.

Fig. 17. Quare concipiamus porro in aere noſtro duos Conos contiguos *a b*, *a c*, materiæ homogeneæ, a ſuperficie terræ *d e*, ad orbem uſque Lunæ *b c*, protenſos, verticibuſque ſuis in centro terræ *a* coeuntes. Hi coni, per motum ſui vorticis, diſpoſitionem acquirunt recedendi a centro *a*, & tametſi iſte conatus, in ſingulis horum conorum corpuſculis, fiat ſecundum tangentem orbitæ, truſio tamen illorum mutua communicari debet (juxta illa, quæ initio diſſertationis de natura Pulſionis monuimus) a centro ad circumferentiam, ſecundum lineas *a b*, *a c*, in quibus corpuſcula illa ſe contingunt: unde revera quoque ſecundum has lineas extruderentur, niſi obſtaret materia, qua plenum eſt omne ſpatium ſupra orbem Lunæ *b c*. Hac ergo ulteriorem aſcenſum prohibente, oritur conflictus quidam duorum conorum in circumferentia *b c*; neutro tamen alterum loco pellente, quandoquidem, ob materiam homogeneam, nulla ratio eſt, cur unus alteri prævaleret. Si vero nunc ſupponamus, alterutri horum conorum immitti corpus aliquod terreſtre *f*, cujus partes craſſiores, aut nullam, aut exiguam habeant agita-

Supra pag. 58.

agitationem; liquet, hujus coni a centro recedendi impetum tanto imminutum iri, quanto particulæ corporis istius minus possident agitationis, quam æqualis moles materiæ fluidæ, cujus locum occupat: cui consequens est, ut alter conus, qui nihil virium suarum amisit, diffundendo sese versus circumferentiam *b c*, debiliorem conum deorsum impellat, isteque impulsus secum protrudat corpus *f*, atque ita gravitatis in illo effectum producat. Si jam concipiamus, argentum vivum, aut quemcunque alium liquorem, in vase stagnantem, esse illud corpus terrestre, quod minus aere habet agitationis; non difficulter rationem perspiciemus, quare iste liquor ab incumbente cono aerio (qui ob latera sua tantum non parallela cylindrus vulgo audire consuevit) jugiter deorsum premi, atque si copia detur, in tubum intrudi debeat. No. II.

Ex hac porro explicatione perspicuum esse poterit, gravitatem corporis alicujus non tam dependere a multitudine particularum terrestrium illud constituentium, quam ab earundem languidiore motu; ac v. gr. aurum 19000ies pene aere gravius esse posse, etiamsi forte non centuplo plus contineat materiæ terrestris, quam æqualis massa aeris; dummodo quod numero deest, particularum quies resarciat.

De incremento & decremento Gravitatis.

Prætermittendum quoque non est in transitu, (quod in sequentibus observasse juvabit), huic motui Gravitatis pondus & incrementum nonnunquam accedere posse a pressione globulorum cœlestium, (quo nomine materiam subtilem ætheris insigniunt,) qui, rotatione vorticis solaris, indesinenter a Sole Terram versus vibrati, pro majore vel minore sui agitatione, dictos conos vel cylindros, diversis anni tempestatibus, fortius vel debilius premere, citra absurditatem, statui possunt.

Quid sit Elaterium aeris?

Hæc dicta sunto de motu Gravitatis. Postquam autem Naturæ Consulti vidissent, hunc solum motum non sufficere explicandis omnibus circa suspensionem liquorum phænomenis; quippe qui non explicat, quare suspensus hæreat in tubo liquor, obturato vasculo, ubi totius tamen atmosphæræ gravitatio intercepta: hinc alium adhuc aeri peculiarem, atque a motu gravitatis

No. II. tatis independentem, aſcripſere motum, quo aeris particulæ conatum quendam (non communem aquæ, fluidiſque aliis craſſioribus) habeant ſeſe expandendi, dilatandi, remotoque obſtaculo majus occupandi ſpatium; quique conatus, in aere incluſo, par ſit ſuſtentando tanto ponderi liquoris alicujus, quantum ſuſtinere valeat gravitate ſua tota atmoſphæræ moles; nonnunquam minori, aliquando etiam majori, pro re nata. Illud mirari ſubit, quod cum omnes hydroſtaticorum Scriptores hanc aeris vim elaſticam unanimi fere fateantur ore, plerique eam oſtendiſſe ſint contenti; pauci vero in naturam & cauſam illius penitius inquirere ſuſtinuerint, aut ſolliciti fuerint, ut certas illi regulas præſcriberent, atque omnes evolvendo caſus aeris liberi, incluſi, condenſati, rarefacti, exponerent, quantum in ſingulis horum caſuum effectum ſortiri aer debeat.

Ejus cauſa obſcura. Enimvero unde iſtud Elaterium ſive conatus ſeſe dilatandi in aeris particulis proficiſcatur; an ex eo, quod ſingulæ illarum circa proprios axiculos rotentur, vel plures aliquot in unum motum circularem conſpirantes, infinitos parvos vortices conſtituant; dumque ab horum centris recedere conantur, ambientes particulas loco pellendi ac ſe dilatandi vim acquirant: an vero procedat ex peculiari harum particularum figura vel textura; quod forſan ſint graciles, flexiles, intortæ ac conglomeratæ ſpiræ, inſtar tæniæ, funis, aut elaterii horologii portatilis: an quod, ab agitatione materiæ primi & ſecundi Elementi inter corpuſcula aeria rapidiſſime diſcurrentis, illis hic elaterii motus communicetur, quo in continua quaſi conſerventur bullitione, ut qua licet ſeſe diffundant: an denique quod iſta ſeſe dilatandi virtus, abſque adminiculo cauſæ externæ, immediate a Primo Motore in creatione illis indita olim fuerit: hoc, inquam, negotium eſt tam arduum, conjecturis ubique æquali difficultatum numero laborantibus; ut inter abſtruſiſſima naturæ myſteria jure merito referatur. Quocirca, hac de re quicquam determinare non ſuſtineo; præſertim cum unuſquiſque, ſalvis forte phænomenis, hic ſuo ſenſu abundare poſſit.

Quid ſit Quod vero effectum ſpectat hujus Elaterii; illi paulo diſtinctius ex-

excutiendo inhærebimus: & quia multis id videtur comprehensu valde difficile, qua ratione pauxillum aeris, etiam non compressi, ingentis atmosphæræ pressionem, æquivalente pressione & actione efficaci, (talem enim activam efficaciam significatio vocis in illis rebus, quibus tribui solet, requirit,) repellere irritamque reddere valeat: hinc ad captum illorum nos accommodaturi, atque elaterium hocce mitigaturi, aliud quiddam præterea in aere considerabimus, quod *Resistentiam* vocabimus *passivam*; atque ita effectum soli hactenus elaterio tributum bipertiemur; partem relinquendo actioni elaterii, partem vero asserendo resistentiæ illi passivæ; monstrabimusque, quo pacto idem sequi debeat effectus, omniaque allata experimenta non minus, sed forte intelligibilius, solvi possint; etiamsi aer longe minori, quam vulgo creditur, elatere foret præditus, cætera vero mere passive se haberet; resistentia supplente elateris vicem. Notandum vero ante omnia, per hanc aeris *Resistentiam passivam*, me non tam intelligere qualitatem aliquam in ipso aere latitantem, & a nostra cognitione remotam, quam vero defectum virtutis in liquore aerem premente, qui non satis habere censendus est virium ad aerem loco movendum, vel condensandum.

No. II. Aeris Resistentia passiva?

Ut vero distinctius cognoscamus, quæ possint esse partes hujus resistentiæ passivæ, consideremus duo corpora se invicem prementia (puta duos luctatores, vel duas pilas;) sitque primo utrumque libero aeri, (id est, loco ubi nihil vel adjuvat, vel impedit illorum motum) expositum, nullique innixum sustentaculo; occurratque corpus A corpori B; quo si fortius est, illud propellet; si debilius, pelletur ab ipso in contrariam partem; si æquali denique vi premat & renitatur utrumque, sublatis ex æquo viribus, eodem loco tanquam quiescentia spectabuntur ambo. Hoc unico proinde in casu, non constabit ex sola loci consideratione, utrum alterum in alterum æquali pressionis conatu agat, an vero ambo inertia & otiosa juxta se quiescant; quod postmodum demum cognoscere datur, cum alterum loco moveris; si pone enim sequatur alterum, concludes sese pressisse

Illustratur exemplo duorum Luctatorum.

No. II. fisse antea; si immotum maneat, indicio est, antea quievisse utrumque, quamvis interim utrobique præstet illa considerare, ut omnibus viribus destituta; cum si quas habent, tantundem iis efficiant, ac si non haberent.

Sit vero etiam porro corpus B (luctator vel pila) innixum solido alicui fulcro, puta luctator parieti cuidam, vel pila lateri mensæ tudiculariæ; faciatque corpus A impetum in corpus B suffultum, quid fiet? hoc quidem illud in contrariam adhuc partem repellet, ubi plus illo impendit virium: sed sive vires utriusque sint æquales, sive vires corporis B sint debiliores, sive plane nullæ; in omnibus his tribus casibus, neutrum corpus loco suo expellet alterum, sed juxta se quiescent; adeo ut hactenus nulla pateat ratio, quæ nos cogat ad credendum, corpus B, ad impetum corporis A infringendum & sufflaminandum, æqualem potius conatum adhibere, quam vel debilius, vel plane non reniti. Sed ubi porro consideraverimus, etiamsi mille præterea homines, aut pilæ, in directum positæ essent, quæ omnes vires suas jungerent cum luctatore vel pila A, ad pellendum corpus B, illas tamen omnes non plus effecturas, quam antea fecerat solum corpus A; justam habebimus suspicandi ansam, obstaculum, quo impediebatur paulo ante corpus A, ne propellere posset corpus B, non provenisse a renitentia & repulsione æquivalente facta a corpore B, id est ab aliquo ejus elaterio (quale præcipue in pila eburnea concipere absurdum foret), cum non sit verosimile, eandem hanc vim corporis B, postea parem esse potuisse repellendo impetui millies majori: sed a mera interpositione corporis B, quæ sola sufficiens esse possit sistendo impetui corporis A, totiusque seriei corporum istud juvantium. Pergat enim, si possit, corpus A moveri in directum post contactum corporis B; aut penetret necesse est dimensiones hujus, quod omnino impossibile; aut faciat, ut hoc permeet solidum fulcimentum, cui innixum esse supponimus: sed sic vel integrum corpus B deberet trajicere, quod idem involvit absurdum, vel deberet prius in minutissimas partes conteri, eæque dein per poros muri adigi; quod cum non fiat, con-

concludendum, corpus B esse talis texturæ, cui dissolvendæ impar sit conatus quantumvis maximus corporis A, omniumque reliquorum vires suas huic adjungentium: atque in hoc illud ipsum consistere puto, quod vocare soleo *Resistentiam passivam*. Quæ cum omni corpori, etiam ipsi aeri solido vasi incluso & lateribus ejus suffulto, applicari possint, non difficile erit perspicere, quare minima ejus portio sufficiens sit sustentando multo majori ponderi, quam sola sua gravitate præstare posset; non quod credendum sit, particulas fluidissimi corporis tali præcise textura & nexu inter se cohærere, qui earum separationem reddat difficiliorem ponderi incumbenti; sed quod externa materia vasi circumfusa, non minore gravitate pollens quam pondus inclusum, materiam subtilem exire conantem æquali vi repellere, atque intra vasis latera cohibere possit: imo, considerans ista attentus Lector forte non obscurum hic mysterii illius, quod nostræ titulum dissertationis facit, indicium deprehendet. No. II.

Hæc vero omnia (quod expresse moneo) ea intentione a me non dicuntur, quod diffiteri, aut possim, aut velim omne aeris elaterium; sed quod ad illud in omni casu confugere non necessum ducam. Quare nunc aliquas Leges seu Regulas, quas quidem rationi & experientiis, maxime Boylianis, consonas fore deprehendero, tum pro *Aeris Elaterio*, tum pro ejus *Resistentia passiva* statuminabo.

Regulæ Elaterii & Resistentiæ passivæ.

I. Qualibet aeris portio, naturalem habentis consistentiam seu laxitatem, in loco aperto, sub dio, resistit passive ponderi totius sibi incumbentis atmosphæræ. Ratio, quia ab æqualis ponderis columnis lateralibus suffulcitur; quam ob rationem etiam aqua, omni licet elaterio fere destituta, in profundissimo maris, sine notabili condensatione, toti moli aqueæ sibi incumbenti resistendo par est. Tum vero aeris portionem aliquam dico habere *naturalem consistentiam*, quando tantundem continet materiæ subtilis, tantundemque materiæ terrestris, quantum utriusque sub æquali volumine ordinarii illius, in quo experimenta fieri plerunque solent, quemque spiramus, aeris continetur. Tenen-

No. II. nendum namque, aerem noſtrum non eſſe corpus homogeneum, ſed particulas ejus terreſtres ſatis diſſipatas, atque æqualibus fere intervallis a ſe invicem disjunctas, majorem adhuc copiam materiæ alicujus ſubtiliſſimæ & æthereæ concludere, ſolidiſſima quæque corpora permeantis: adeo ut, ſi ſupponamus in iſto, quem haurimus, aere, ſingulis particulis terreſtribus ordinarie reſpondere centum alias materiæ ſubtilis; dicere conveniat, ejus portionem aliquam naturali ſua laxitate præditam eſſe, quotieſcunque contingit, ſive in loco libero, ſive clauſo, ut quantitas materiæ ſubtilis, in illa portione contentæ, centies excedat quantitatem materiæ terreſtris; eandem vero duplo, triplo, &c. denſiorem eſſe redditam, quandocunque, parte materiæ ſubtilis expulſa, particulæ terreſtres accedunt ad ſe invicem, atque jam arctius conſtipatæ, duplo, triplo, &c. minorem, quam antea, locum occupant: uti viciſſim duplo, triplo &c. rarior dicendus aer, ubi eadem quantitas materiæ terreſtris, intervallis ſuis per accedentem novam materiam ſubtilem ampliatis, ad duplo, triplo &c. majus ſpatium extendi cogitur.

II. Qualibet aeris incluſi portio, naturalem habentis conſiſtentiam, reſiſtit paſſive ponderi totius atmoſphæra, aut cuicunque alii preſſioni huic æquivalenti. Ratio, quia a lateribus corporis ſolidi continentis ſuffulcitur. Ita perſpicuum eſt, in fiſtula ſolo aere repleta, cujus ſuperius orificium apertum, inferius clauſum, aerem quamvis incluſum, & totius atmoſphæræ ponderi ſuccumbentem, non magis comprimi vel condenſari, quam quamvis aliam ejus portionem extra tubum, in eadem horizontali ſuperficie cum incluſo exiſtentem. Perinde ut ſi tubum repleveris aqua; infimus aquæ pollex, tametſi nullo ſenſibili gaudeat elaterio, notabiliter non magis compreſſus erit, quam quivis alius, ſive intra, ſive extra tubum. Quod probe obſervandum, contra illos, quibus ordinarium eſt, aeris incluſionem & compreſſionem in hac materia confundere.

III. Quantulacunque aeris condenſati portio paſſive reſiſtit majori vi aut ponderi, quam ſoli atmoſpharico, aut huic æquivalenti;

ti; idque ea lege, ut densitates duarum portionum aeris fere *sint ad invicem, sicut pondera ab iis sustentata.* No. II.

IV. Aeris rarefacti portio quantacunque, minori tantum vi aut ponderi, quam atmosphærico, passive resistendo par est; suntque raritates ad se invicem in ratione reciproca ponderum sustentatorum. Veritas utriusque hujus regulæ manifesta fit duobus curiosis experimentis ab Illustr. Dn. BOYLIO hanc in rem factis, quæ videsis in *Tractatu ejus contra* LINUM, *Cap.* V. cui duas Auctor subjunxit Tabulas pro diversis Condensationis & Rarefactionis gradibus.

V. Aer inclusus naturalis consistentiæ, pressus a majori pondere, quam est atmosphæricum, aut aliud ei æquale, condensatur quousque eum densitatis gradum acquisiverit, qui juxta proportionem Reg. 3 *memoratam, par sit passive resistendo illi ponderi.* Hinc est, quod, in campana vitrea urinatoribus nonnunquam usitata, quo profundius illa immergitur, eo magis aer inclusus comprimitur; quia, præter atmosphæricam columnam, tantum adhuc cylindrum aqueum sustinet, quantus porrigitur a superficie aquæ ad orificium campanæ; adeo, ut campana 34 pedes sub aquam depressa, aer inclusus non nisi dimidiam circiter ejus cavitatem impleturus sit.

VI. Aer inclusus naturalis consistentiæ, minori vi aut pondere pressus quam atmosphærico, vi elaterii sui se expandit ad eum usque rarefactionis gradum, qui secundum proportionem Reg. 4 *sufficiens adhuc sit passive resistendo illi ponderi.*

VII. Aer condensatus, pressus a majori vi aut pondere, quam cui passive resistendo sufficiat, magis condensabitur: pressus a pondere exacte æquivalente gravitati atmosphæricæ, vi elaterii sui ad consuetam usque laxitatem dilatabitur: a minori vero pondere pressus, eadem vi rarefiet magis.

VIII. Aer rarefactus, pressus a minori vi aut pondere, quam cui resistendo sufficiat, vi elaterii sui magis dilatabitur: pressus a pondere atmosphærico aut alio æquipollenti, ad naturalem consistentiam redigetur: a majori pressus magis condensabitur: eaque omnia per gradus densitatis & raritatis ponderibus proportionatos,

No. II. *juxta* Regg. 3 & 4. Sic collo recipientis evacuati ſub aquam demerſo, apertoque epiſtomio, adſcendere ſolet aqua atmoſphæræ pondere ſtipata, eouſque in recipiens, donec aer per totam illius cavitatem diffuſus, atque per aſcenſum aquæ ſeſe contrahens, ad priſtinam conſiſtentiam redeat.

IX. *Minima aeris quantitas, ſive naturalem habentis conſiſtentiam, ſive condenſati, ſive rarefacti, qua parte ab omni materia premente* (excepta ſubtili) *liberatur, vi elaterii ſui ſeſe protinus expandet, & per totum ſpatium materia ſubtili repletum æqualibus intervallis ſeſe diffundet.* Hinc applicato antliæ recipienti, & adducto embolo, verſoque epiſtomio, non manebit omnis aer in recipienti, nec deſcendet omnis in antliæ ſcapum, relicturus materiæ ſubtili totam recipientis cavitatem; ſed reſtabit ſubinde pars aliqua in recipienti, quæ æqualibus intervallis per materiam ſubtilem diſperſa, eandem acquiret laxitatem cum illa, quæ deſcendit in ſcapum. Hinc eſt, quod aerem materiæ ſubtili facile permiſceri dicunt; ſecus atque fit in aqua aliove liquore, cui adducto embolo ſoli materiæ ſubtili ſpatium ſuperius cedens, totus in ſcapum deſcendit. Facilis quoque iſthinc redditur ratio, quare veſica recipienti incluſa protinus intumeſcat, cum evacuari incipit aer; quoniam enim, per hanc evacuationem, pauxillum aeris, quod in veſica remanſit, ab aere ambiente liberatur, neceſſum eſt, ut vim elaſticam exercendo ſeſe dilatet & veſicam inflet, quouſque ejus permittunt latera; imo, ubi veſica non ſatis robuſtæ eſt texturæ, ea omnino diſrupta, per totam recipientis cavitatem ſeſe diffundat.

X. *Aer in infinitum rareſieri poteſt, ſed non in infinitum condenſari.* Conſectarium hoc eſt præcedentis regulæ, de cujus veritate abſque experimentis certi eſſe poterimus, ubi conſideraverimus, intervalla inter particulas aeris terreſtres nunquam poſſe eſſe tam ampla, quin, ingrediente nova materia ſubtili, ampliora ſubinde fieri poſſint: ſed viciſſim, expulſa omni materia ſubtili, hæc intervalla tandem plane tolli debere; adeo ut nullus amplius poſſit eſſe condenſationi locus: Ita grana poſſunt in-

infinitum ſpatium diſſipari, ſed non arctius conſtipari, quam immediatus eorum contactus permittit. No. II.

[Notandum, quando in Reg. 3. diximus, *denſitates aeris eſſe ad invicem, ut pondera ab illo ſuſtentabilia*, non ſine cauſa adjectam eſſe particulam *fere*; quia ubi experimenta accurate inſtituta ſunt, ſemper deprehendetur, pondus ab aere denſiori ſuſtentatum ad pondus ſuſtentatum a minus denſo, majorem tantillo habere rationem, quam denſitas ad denſitatem: cujus ratio dubio procul hæc eſt, quod, decreſcente proportionaliter in condenſatione aeris incluſi volumine, ſola expellitur materia ſubtilis, non imminuta quantitate materiæ terreſtris; unde fit, ut decrementum materiæ ſubtilis (& conſequenter incrementum virium particularum craſſiorum) aliquantillo majus eſſe debeat, quam foret, proportione habita ad decrementum totius voluminis. Exempli gratia, ſi in determinata aliqua quantitate aeris atmoſphærici, contineantur decem corpuſcula terreſtria, centumque æquales particulæ materiæ ſubtilis, ſic ut tota maſſa ſit centum decem partium; requiritur ad hanc maſſam in duplo minus volumen redigendam, ut quinquaginta quinque particulæ inde expellantur; ſed quia nulla decem craſſiorum expelli poteſt ob exilitatem pororum vitri, omnes demendæ erunt ex materia ſubtili, cui proinde non niſi relinquentur quadraginta quinque, adeo ut pluſquam ſui dimidii jacturam patiatur: atque ita ratio decem particularum terreſtrium ad reſiduam materiam ſubtilem, pluſquam duplo major erit illius rationis, quam habuere illæ decem particulæ ante condenſationem ad omnem materiam ſubtilem. Unde fit, ut pluſquam duplo majores etiam in ſuſtentando liquore vires nanciſci debeant. Et hoc egregie confirmatur experimento illo Cl. BOYLII ſupra citato; in quo animadverto, ſemper nonnihil majus ab aere condenſato ſuſtentatum fuiſſe pondus, quam juxta hypotheſin, cum ipſius, tum noſtram, ſuſtentandum fuiſſet. In cujus differentiæ contemplatione cum occupor, mentem ſubit, annon forte, ex illa cognita (ſuppono autem experimentum cum omni requiſita ἀκριβείᾳ peractum), ratio iniri poſſit utriuſque materiæ, terreſtris & ſubti-

Limitatio Regulæ 3.

N 2 lis,

No. II. lis, contentæ ſub volumine aliquo aeris atmoſphærici in naturali ſua laxitate conſtituti; id eſt, annon inveſtigari queat, quoties quantitas unius excedat quantitatem alterius. Id quod hac ratione exequor:

Eſto *volumen aliquod aeris communis* . . . . a.
Ratio voluminis hujus ad volumen aeris condenſati, ut m. ad n.
Erit *volumen aeris condenſati* . . . . $na : m$.
Quantitas materiæ terreſtris ſub utroque volumine comprehenſæ, x.
Ergo *quantitas materiæ ſubtilis ſub volumine* a, erit . $a - x$.
Quantitas ejuſdem ſub volumine $na : m$ erit . . $na : m - x$
Pondus ab aere communi ſuſtentatum . . . . b.
Pondus ab aere condenſato juxta hypotheſin ſuſtentandum $mb : n$
Pondus ab aere condenſato ſuſtentatum . . . . . $mb : n + c$
Differentia ſuſtentandi & ſuſtentati . . . . . . c.

Jam quoniam ratio materiæ terreſtris ad materiam ſubtilem voluminis minoris, debet eſſe ad rationem, quam illa habet ad materiam ſubtilem voluminis majoris, ut pondus ſuſtentatum ab illo volumine ad pondus ſuſtentatum ab hoc: ſive (propter eandem utrobique quantitatem materiæ terreſtris) quoniam materia ſubtilis voluminis majoris eſt ad ſubtilem minoris; ut viciſſim pondus ſuſtentatum ab hoc volumine, ad pondus ſuſtentatum ab illo: erit $a - x$ ad $na : m - x$; ut $mb : n + c$ ad b. Unde, proportione ad æqualitatem reducta, translatiſque quantitatibus cognitis in unam, incognita in alteram partem; habebitur $x = nnac : (mmb + mnc - mnb.)$

Quanto plus contineatur materiæ ſubtilis, quam terreſtris; in portione aliqua aeris atmoſphærici?

Quocirca, ſi volumen aliquod aeris in ſtatu ſuo naturali conſtituti (quod volumen ponimus 10000 partium) ſuſtentavit $29\frac{1}{8}$ digitos mercurii, juxta Tabulam Boylianam; idemque aer, ad duplo minus volumen redactus, ſuſtinuit $58\frac{13}{16}$ dig. quorum, juxta hypotheſin, non niſi $58\frac{1}{4}$ ſuſtinere debebat, adeo ut differentia ſuſtentati & ſuſtentandi fuerit $\frac{9}{16}$ dig.; calculus patefaciet, materiam terreſtrem occupare non niſi $94\frac{14}{19}$ partes illius voluminis, reliquis $9905\frac{5}{19}$ omnibus a ſubtili repletis; adeo ut quantitas materiæ terreſtris a quantitate interſperſæ ſubtilis excedatur quam proxime centies quinquies: eruntque, ſi corpuſcula terreſtria æqualibus per aerem intervallis diſſeminata ſupponamus, inter duo

duo quævis corpuſcula proxima, ad minimum quatuor æquales materiæ ſubtilis portiones interjectæ. Obſervandum tamen, ſi in experimento Boyliano idem calculus inſtitueretur circa aerem quadruplo denſiorem naturali; ubi differentia mercurii ſuſtentandi & ſuſtentati erat $1\frac{1}{16}$ dig.; fore, ut quantitas materiæ ſubtilis quantitatem terreſtris pluſquam trecenties tricies ſuperare deprehenderetur. Hoc vero inde provenire auguror, quod forte particulæ aeris craſſiores, per nimiam condenſationem, tam valide comprimantur, ut, figura ſua rotundiore in oblongiorem & graciliorem mutata, jam libere per poros vitri, juxta cum ſubtiliore materia, expelli poſſint; tametſi illos paulo ante penetrare, ob craſſitiem ſuam nequiverint. Hinc enim fit, ut reſidua materia terreſtris non poſſit tantum pondus ſuſtinere, quantum ſuſtinere deberet, ſi nulla omnino expulſa fuiſſet; proinde nequeat locum amplius habere analyſis noſtra, quæ ſub utroque volumine aeris naturalis & condenſati, æqualem materiæ terreſtris quantitatem ſupponit.] No. II.

Sed ut ex tricis algebraicis redeamus ad inſtitutum noſtrum; non difficile nobis erit, ſtabilitis paucis illis regulis, reſpondere ad experimenta ſupra memorata, omniaque reliqua, quæ ab adverſa parte ad aeris gravitatem impugnandam afferri forte poterunt. Nam quod ſpectat primo Fiſtulam ſuperne clauſam, vel Lagenam, e qua liquor ſola ſuctione attrahi nequit; ratio eſt, quia cum abdomen ob imbecillitatem muſculorum, hoc in caſu, vel nullatenus, vel difficulter dilatari poſſit, aer ejus cavitati incluſus naturalem ſuam quam proxime retinebit conſiſtentiam; adeoque, per Reg. 2, & 4, reſiſtendo pluſquam par erit pauco aeri in aſpera arteria, liquorique in lagena vel fiſtula contento, eorumque proin deſcenſui impediendo. Cur e tubo clauſo vel lagena difficulter adſugi poſſit liquor.

Quod porro attinet ad duas Fiſtulas, ita ſibi coaptatas, ut communicationem habentes invicem, aeri externo omnem ingreſſum præcludant, quarumque ſuperior aqua vel alio liquore craſſiore, inferior ſolo aere repleta ſit; valde quidem dubito de ſucceſſu experimenti, niſi ubi fiſtulæ ſupra modum graciles fuerint: ſecus enim fiet, ut aer inter liquorem & vitri latera ſibi tranſitum Reſpondetur ad exemplum duarum fiſtularum.

No. II. parando, sensim superiora petat, dum interea liquor inferiorem sibi locum vendicabit; non aliter atque in clepsammo, descendente in inferius vasculum arena, aer per ejus grana ad superiora eluctari solet. Si vero forte contingat in tubis gracilioribus, ut suspensus hæreat in superiori liquor; tum nihil obstabit, quo minus dicamus, aerem per resistentiam suam passivam, liquoris descensum impedire, ut pote quæ juxta Reg. 2 etiam multo majori ponderi sustentando par esset.

Resp. ad suspensionem liquoris in loco clauso, vel vasculo obstructo.

Ita etiam in promptu ratio est, cur liquor adhuc suspensus in tubo hæreat, si vel experimentum fiat in cubiculo clauso, vel vasculo obstructo, sive eodem incluso recipienti. Quantum quidem ad cubiculum; non existimo, ullum adeo exacte clausum esse posse, quin aer externus rimam inveniens, toto suo pondere in conclave irruat, & vi gravitatis hunc effectum producat, qui elaterio ascribitur. Ad reliquos vero casus respondebimus, neque gravitatem, neque elaterium suspensionis causam esse; cum resistentia aeris inclusi pure passiva illud præstare possit. Quod enim non necessarium sit, ad elaterium hic confugere, vel ex eo manifestissime liquet; quia si loco aeris supremam vasculi partem occupantis, superinfundatur liquori in vasculo restagnanti aqua vel mercurius, vel quivis demum alius liquor, sive homogeneus, sive heterogeneus, illoque vasculum penitus repletum obturetur, idem secuturus est effectus, liquoris videlicet in tubo suspensio: ubi sane elaterio nullæ possunt esse partes; cum, fatentibus Elateristis, nullus præter aerem liquor, tali virtute notabiliter polleat. Proxima ergo ratio, cur maneat in consueta statione mercurius, alia nulla dari potest, quam quod liquor superinfusus in vasculo restagnans, & undique suffultus lateribus & operculo vasculi, resistentia sua passiva, reliquo liquori in tubo, se prementi ac descensum molienti, obstaculum ponat. Unde cum concipi possit, eundem secuturum etiam cum aere incluso effectum, nullo concepto elaterio; sequitur, elaterium hocce, neque esse unicam, neque proximam suspensionis causam.

Suc-

Succurrit tamen hic quoddam experimentum, quo doctrina nostra de resistentia aeris passiva primo intuitu omnino videtur subrui. Illud autem tale: In cubiculo clauso, vel alio aliquo loco ubi aeri ingressus non patet, loco simplicis tubi, adhibe siphonem inæqualium crurum, ejusque crus brevius immerge liquori cuicunque, quem per crus longius adsugito; quo peracto, comperies, liquorem omnem e vasculo per crus brevius ascensurum, & per longius descensurum, idque continuo fluxu, quamdiu crus brevius liquori immersum est, non secus atque fieri solet alias, cum experimentum sub dio capitur. Sed ne iste continuus liquoris fluxus possit excusari per pondus totius atmosphæræ, sub prætextu, quod conclave nunquam adeo exacte claudi possit, quin aer inclusus cum externo per rimam aliquam communicet; eundem ergo fluxum efficere tentabimus in recipienti clauso, ubi nullum ab aere externo periculum timendum. Hanc in rem autem opportune incidit experimentum, a Cl. VOLDERO, pro ultimo superioris anni specimine, in Theatro Physico Academiæ hujus publice ostensum, quo Elateristæ admodum gloriantur. Sumsit vitrum cylindricum *a*, aqua subrubido colore tincta impletum; eique immisit crus brevius siphonis *bcd*; atque ore admoto longiori adsuxit per siphonem aquam; qua fluente, protinus vitrum cum siphone demisit in recipiens *efg*; quod pariter mox aqua subrubida ad summam usque oram adimplevit, ne quid in illo remaneret aeris; atque tandem operculo admoto clausit, & cera undiquaque probe munivit. Quo facto, cœptum est agitatione emboli evacuari recipiens; extracto per ejus collum *e* liquore, usque ad superficiem circiter *il*; quo subsidente sensim, subsidit pariter liquor in cavitate siphonis contentus, mansitque subinde in eodem plano cum superficie liquoris extra siphonem; descendens in breviori quidem crure ad summam usque oram vitri cylindrici; in longiori vero, quousque subsederat reliquus in recipienti liquor; propterea quod, præter materiam subtilem, nihil aderat quod ponderare super liquore in recipienti, cumque in-

No. II. Fluxus liquoris per siphonem in loco clauso explicatur per Resistentiam aeris passivam.

Fig. 18.

No. II. in ſiphonem impellere, vel in eo ſuſpenſum tenere potuiſſet. Evacuato ſic maximam partem recipienti, intromiſit per apertum obſtructorium aerem, qui irruens in liquorem vitri cylindrici, eum pondere ſuo impellebat in crus ſiphonis brevius, & exinde porro in longius; nec ceſſabat liquoris per ſiphonem fluxus, quantumvis poſtea obſtructorium loco ſuo iterum intruſum fuiſſet. Cujus rei quidam ratio, ſuppoſito aeris elaterio, reddi poteſt facile; cum enim per obſtructorium intromiſſus aer, virtute ſua elaſtica, premat tum ſuper liquore in vitro cylindrico contento, tum ſuper reliquo extra cylindrum; fit ut liquor in utroque crure ſurſum impellatur, uſque ad mutuum occurſum in flexura ſiphonis *c*, ubi quia in contrarias tendit partes, ſpecies quædam luctæ oritur inter liquores utriuſque cruris, adeo ut neuter alteri prævaleret, ſed immoti hærerent, ſi æqualibus ambo viribus fuiſſent impulſi: Verum, quia elaterio columnæ aeris *q r*, a pondere liquoris in longiori crure magis reſiſtitur, quam elaterio columnæ *o p* reſiſtitur a minori pondere cruris brevioris; fit ut liquor fortius adactus in crus brevius, alterum debilius impulſum repellat, & ita in continuo fluxu perduret, ex vitro cylindrico aſcendendo in crus brevius, ex breviori deſcendendo in longius, & ex longiori in recipiens. Atque ſic quidem elaterio res conficitur: idem vero abſque elaterio demonſtrari quoque poſſe, forſan videbitur nonnullis prima fronte impoſſibile; cum facile quidem intelligi poſſit, qua ratione aeris incluſi reſiſtentia paſſiva ſuſpenſum teneat in cruribus ſiphonis liquorem, ejuſque deſcenſum impediat; non vero identidem, quo pacto fluxu continuo novus ſubinde liquor in crus brevius aſſurgat, niſi ſupponatur aliquod ſupra liquorem vitri cylindrici, quod eum efficaci preſſione in crus illud intrudat; quæ preſſio aliunde procedere poſſe non videtur, quam ab aeris elaterio. Quare supereſt, ut monſtremus adhuc, etiamſi nullum in aere agnoſceremus elaterium, eundem tamen ſecuturum ex hypotheſi noſtra effectum. Intelligere jam putamus, quare admiſſo per obſtructorium aere, debeat impleri ſipho; nimirum quia pauxillum aeris irruentis, tota ſtipatum atmoſphæ-

ræ

ræ mole, dum obſtructorium apertum eſt, ſuper liquore premere, eumque gravitatis impetu in utrumque crus impellere cenſendum eſt. Conſideremus vero nunc recipiens iterum obſtructum, & liquorem in utroque ſiphonis crure ſuſpenſum; quid fiet? ceſſabit atmoſphæræ gravitatio, nec aeris incluſi pondus ullius erit momenti; & ſiquidem elaterio nullum quoque locum hic tribuimus, ceſſabit omnis premendi in illo conatus: ſed non ceſſat pariter gravitatio liquoris in cruribus ſuſpenſi, qui naturali ſuo pondere ſubinde deſcenſum moliens, liquorem in recipiente & vitro cylindrico ſublevare, & cum liquore aerem imminentem verſus ſupremam recipientis cavitatem attollere conabitur, longioris quidem cruris liquor columnam *q r*; brevioris columnam *o p*; ille niſu majori, quia ponderoſior, hic minori, quia ut brevior, ita minus gravis. Cedet ergo fortiori preſſioni columna *p o*, unaque deprimet liquorem ſibi ſubjectum, eumque in crus brevius aſcendere faciet; non vi propriæ elaſticitatis, ſed vi adventitia, communicata ſibi a preſſione prævalente liquoris in crure longiori: adeo ut, quemadmodum prius ex Elateriſtarum mente conſiderabamus pugnam duorum liquorum ab elaterio aeris impulſorum in flexura ſiphonis *c* factam, fortioremque ex parte *p o*; ita vice verſa eandem nunc contemplari conveniat, tanquam inter duas columnas aerias a pondere liquorum impulſas, in ſuperficie concava operculi *g* geſtam, fortioremque ex altera parte *q r*. Ad quorum meliorem intelligentiam in memoriam nobis revocemus Luctatorem illum B, qui nuper eludebat conatum Luctatoris A, ſuffultus tantum parieti, cætera nullas adhibens vires ad repellendum ipſum A. Pateat vero nunc ei rima, qua pelli poſſit ab ipſo A, eumque immediate contingat in adverſo latere alius Luctator C, qui pariter non niſi paſſive ſe habens, prematur in oppoſitam partem a quarto Luctatore D, ſed viribus debilioribus, quam B pellitur ab ipſo A. Qua ratione evidens eſt, Luctatorem D, cui vires ſunt debiliores, repulſum iri; idque non tantum a Luctatore A, qui reapſe conatum adhibuit, ſed potiſſimum a duobus intermediis B, & C; quamvis non propriis horum viribus, quas o-

No. II.

Supra pag. 88.

N°. II. tiosi nullas adhibent, sed viribus ipsis communicatis a Luctatore A. Jam si, loco Luctatoris A, substituamus liquorem cruris longioris; pro Luctatore D, liquorem brevioris; pro utroque otioso, columnas aerias *q r*, & *o p*; applicatio nullo institueretur negotio.

Cur relicto in summo tubi aere mercurius solito humilius descendat, nec tamen omnis effluat?

Unius adhuc superest phænomeni ut evolvamus causam, (quod intellectis nostris de Elaterio & Resistentia passiva regulis non erit arduum) quare videlicet, si in tubi mercurio impleti summitate relictum fuerit pauxillum aeris, argentum vivum nec omne effluere, nec omne in tubo suspensum hærere, sed notabiliter tamen descendere debeat, etiamsi argentum ad longe minorem altitudinem 29 digitis infusum fuerit. Notandum autem, duo hic distincte quæri posse; semel, cur argentum, quamvis ad minorem altitudinem infusum, non ascendat; columna enim atmosphærica vasculo imminens illud altius impulsura esset in tubum, sine interventu aeris in summitate relicti; dein, cur præterea etiam notabiliter descendat. Prioris causam rejiciemus non in elaterium, sed passivam tantum resistentiam inclusi aeris, qui, cum naturalem habeat consistentiam, & a summa base tubi suffultus sit, juxta Reg. 2, toti atmosphæræ ponderi, argentum altius subinde impellere conanti, obicem ponere potis est. Quod vero argentum non tantum non ascendat, sed & descendat; exinde est, quoniam aer inclusus non premitur a tota cylindri atmosphærici mole, sed a tanta duntaxat illius portione, quæ correspondet excessui, quo totum ejus pondus superat pondus cylindri mercurialis inclusi: ex gr. Si altitudo mercurii infusi fuerit 20 digitorum; aer, inter tubi summitatem & mercurium interceptus, sentiet tantum pondus $9\frac{1}{2}$ digitorum mercurialium; quanta videlicet est differentia inter pondus atmosphæricum, æquivalens $29\frac{1}{2}$ digitis mercurialibus, & pondus mercurii inclusi: quoniam enim atmosphæra ab una parte, tota sua mole sursum impellere conatur argentum, ab altera vero argentum naturali sua gravitate, contra nititur; fit ut æqualibus, illinc pellendi sursum, hinc descendendi, viribus sublatis, aer inclusus ea tantum pressione afficiatur, qua pondus cylindri mercurialis

curialis

curialis inclusi superatur a simili cylindro atmosphærico. Quare, juxta tenorem Regulæ 6tæ, conveniens est, ut aer inclusus, vi sua elastica, sese expandat, hydrargyrum eousque deprimendo; donec imminuta hinc dilatati aeris resistentia, & illinc adaucta pressio, qua cylindrus atmosphæricus cylindrum mercurialem residuum excedit, pari passu ambulent. No. II.

Quousque vero mercurius in quovis casu, juxta hypothesin nostram deprimi debeat, ut calculo experiamur, ponamus in *Fig.* 16. Quousque descendere debeat? *Fig.* 16.

Pro *Quantitate Aeris inclusi* . . . . a.
Pro *Altitudine cylindri mercurialis inclusi* . . . . . b.
Pro *Excessu, quo pondus hujus superatur a pondere similis cylindri atmosphærici, id est a pondere* $29\frac{1}{2}$ *digitorum mercurialium* . . . . c.
Denique pro *Quantitate futuræ depressionis* . . . . . y.
Erit *Volumen aeris rarefacti* . . . . $a + y$.
Pondus Atmosphæricum, seu $29\frac{1}{2}$ *digitorum mercurialium.* $b + c$.
Pondus sustentandum ab aere rarefacto . . . . . $c + y$.

Et quoniam per Reg. 4, Volumen aeris inclusi debet esse ad Volumen aeris rarefacti, ut vicissim Pondus sustentandum ab hoc, ad Pondus totum atmosphæricum sustentabile ab illo; erit ut a ad $a + y$, ita $c + y$ ad $b + c$: & multiplicatis extremis ac mediis habebitur æquatio inter $ab + ac$ & $yy + ya + yc + ac$. Translatis porro in alteram partem quantitatibus $ya + yc + ac$, sub signo contrario, erit $yy = (-a - c)\, y + ab$. Radix vero: $y = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}cc + ab.)}$

Hinc Regula generalis:

Si quadrans quadrati altitudinis inclusi aeris, & quadrans quadrati excessus, quo pondus atmosphæricum superat pondus liquoris inclusi, una cum illo, quod provenit ex altitudine inclusi aeris bis multiplicata, semel in dimidium dicti excessus, semel in altitudinem liquoris inclusi, in unam summam conjiciantur; & ab aggregati latere quadrato subtrahatur dimidium altitudinis inclusi aeris, una cum dimidio dicti excessus; residuum indicabit, quousque deprimendus sit liquor.

 Ubi

No. II. Ubi notandum, ſi pondus liquoris infuſi exæquet pondus ſimilis cylindri atmoſphærici; tum, evaneſcente quantitate c, habebitur radix: $y = -\frac{1}{2}a + \surd(\frac{1}{4}aa + ab)$

Eritque Regula ſequens:

Si id, quod provenit ex altitudine aeris incluſi, multiplicata tum per quadrantem ſui ipſius, tum per altitudinem liquoris incluſi, in unam ſummam colligas; ex ſummæ radice quadrata dimidium altitudinis incluſi aeris ſubtrahas; indigitabit reliquum, quouſque infra conſuetam ſtationem deſcendet liquor.

Quocirca, juxta priorem regulam, mercurio infuſo altitudinem obtinente 20 digitorum ſupra reſtagnantem, ſi cylindrus aeris, ſupremam tubi partem occupantis, ſit *pollicaris*, ſubtracto digito, deſcendet argentum per $1\frac{13}{20}$ dig. ſi *bipollicaris*, per $2\frac{4}{5}$ dig. ſi *tripollicaris*, per $3\frac{7}{10}$ digitos; &c.

Iterum juxta poſteriorem regulam, elevato per infuſionem mercurio ad conſuetam altitudinem $29\frac{1}{2}$ pollicum, ſi cylindrus aeris in ſummitate tubi relicti ſit *pollicaris*, deprimetur mercurius $4\frac{19}{20}$ dig. ſi *bipollicaris*, $6\frac{3}{4}$ dig. ſi *tripollicaris*, $8\frac{1}{40}$ digitis; &c.

Major aeris quantitas abſoluto magis, comparative minus profunde deprimit liquorem.

Calculum hunc prolixum Lectori ponimus ob oculos, ut illum conferat cum * verbis Nob. ROHOLTI, qui ad eundem caſum, quo in ſummitate tubi relinquitur aer, memorat, *pollice aeris eo humilius depreſſum iri mercurium, quo minus excedit tubus ordinariam mercurii ſtationem.* Unde nonnulli, quibus non major, ac mihi, eſt experiundi copia, concluſerunt, ſi duo tubi diverſæ longitudinis impleantur argento vivo ad eandem altitudinem, reliquo ſpatio aeri conceſſo; fore, ut argentum in tubo breviori, ubi minor eſt aeris copia, profundius deſcendat, quam in longiori, cui major aeris quantitas eſt incluſa; propterea quod virtus aeris elaſtica fortior eſſe debeat in arctiori, quam ampliori loco.

Quæ

* In Phyſic. ROHOLTI, part. prim. cap. 12. §. 34. *Nous prévoyons même, qu'un pouce d'air fera d'autant plus deſcendre le vif-argent, que le tuyau excéde moins la longueur de vingt-ſept pouces & demi.*

Quæ cum directe adversentur calculo nostro, concludendum, alterutro in loco errorem subrepsisse. Certum autem est, a parte nostri nullam posse esse hallucinationem; eo quod suppositio hæc, *Densitates aeris esse ad invicem, ut Pondera sustentata*, e qua calculus noster immediate fluxit, non alia est quam ipsissima Clar. BOYLII hypothesis, egregiis insuper experimentis, gemina tabula in Tractatu ejus contra Linum exhibitis, stabilita: quodque in toto hoc negotio nullum aliud inter nos discrimen est, quam quod ille elaterio tribuit, quæ sola nonnunquam aeris resistentia passiva explicari posse autumo; cætera vero iidem omnino utrinque effectus expectandi. Sed nolumus etiam suspectam reddere veritatem assertionis Roholtianæ, quam experientiæ conformem deprehendi subjungit Auctor. Neque vero tamen nobis persuadebimus, idem experimentum alium in Anglia, contrarium in Gallia, successum sortiri; cum naturam sibi semper & ubique constare, sit certissimum. Potius ergo statuemus reliquos, intellecta perperam ROHOLTI mente, deceptos fuisse. Et revera decipiuntur in eo, quod existimant, argentum *absolute* humilius deprimi debere a minore, quam a majore aeris inclusi quantitate; cum illud *comparative* tantum intellexisse videatur Auctor: neque enim de toto aere incluso loquitur, sed de *pollice* tantum *aeris*; significans, majorem aeris copiam profundius quidem detrudere posse mercurium, quam minor ejus quantitas eundem in alio tubo deprimit, sic tamen ut singuli pollices majoris quantitatis per se minus efficiant, quam singuli minoris. Atque si hæc sit ROHOLTI mens, ut nullus dubito, nihil aliud dicit, quam quod principiis & calculo nostro conforme; juxta hunc enim, liquor, in consueta statione constitutus, descendet per $4\frac{1}{8}\frac{1}{8}$ digitos, ubi aer inclusus fuerit pollicaris; cum vero fuerit bipollicaris, non nisi deprimetur per $6\frac{1}{4}$: ubi quamvis cylindrus inclusi aeris duplo priori altior est, nequaquam tamen propterea duplo humilius liquorem detrudit.

Interim non dissimulandum, quod sanior forte est assertionis Roholtianæ sensus, quam solidior ejus subjuncta ratio; qua

No. II. putat Auctor, aerem arctiori loco constrictum, exemplo elaterii automati cujusdam, majoribus sese dilatandi viribus pollere: nec enim, quod aer, hic, quam ibi, arctioribus est conclusus limitibus, propterea magis compressus, aut majus habere elaterium censendus est, dummodo pro ratione angustioris spatii minor quoque sit inclusi aeris quantitas; id est, dummodo aer, quod supponitur, ejusdem utrobique sit densitatis seu consistentiæ. Minus vero adhuc excusari poterunt illi, qui, hoc elaterii simile ulterius extendentes, sibi persuadent, aerem minori loco inclusum absolute majorem præstare debere effectum, quam alium sub majori contentum: si enim elaterium certæ cujusdam aeris portionis sub simplo spatio majoris foret efficaciæ, quam duplo majoris ejus quantitatis sub duplo spatio; tum sequeretur ex eodem fundamento, pauxillum pulveris pyrii, quod sclopetis minoribus solet inseri, majorem habiturum vim glandem explodendi, quam habet major ejus quantitas altius intrusa tormento. Quamvis interim verum sit, & ipsis principiis nostris conforme, quod ubi eadem quantitas aeris ampliatis intervallis rarefit, & majus tubi spatium implere cogitur, ejus efficacia deprimendi liquorem non amplius tanta futura sit, quanta fuit antea, ubi occupaverat minus spatium; propterea quod per rarefactionem ejus debilitatur elaterium: uti nullum dubium est, si eadem (nec major) quantitas pulveris, quo sclopeta onerantur, ita immittatur scapo, ut, dispersis a se granis, majorem locum occupet, multo minorem habituram esse effectum, quam ubi grana densius constipata, minori spatio fuere conclusa.

Aer efficit Firmitatem corporum, uti suspensionem liquorum in tubis.

Sed jam dudum, Benevole Lector, tua abusus patientia, atque Dissertationis pene prætergressus limites, in instituti mei orbitam quantocyus redibo. Postquam, prolixa hic digressione, de *Atmosphara nostra Gravitate* multa disserui, ostendendo, quænam possint esse ejus partes in suspensione liquorum, & quo pacto argumenta in contrarium allata, vel per *Elaterium Aeris*, vel per ejus *Resistentiam passivam*, vel per utrumque commode queant explicari; jure suspicabimur, imo nulli amplius dubitabimus, eandem ipsam Gravitatem quoque esse Cohæsionis

nis

nis partium duri corporis cauſam; cum, præter eam, nullum poſſit concipi aliud gluten, quo connectantur; adeo ut hæc durorum corporum, utut vulgaris, proprietas, non minorem mereatur conſiderationem, quam mereri primum viſa fuit TORRICELLIO mercurii in tubo ſuſpenſio; neque hæc, quam illa, majus ſit naturæ miraculum cenſenda. No. II.

Hoc ergo ſuppoſito, quia mens noſtra proclivis ſolet eſſe ad comparandos ſtatim invicem duos effectus, quorum cognoverit eandem eſſe cauſam; hinc non cunctabimur, inter Suſpenſionem liquorum & Cohæſionem corpuſculorum talem inſtituere parallelíſmum. Primum autem & proximum, quod cogitanti ſeſe offert, eſt deſcenſus argenti vivi, qui animadverti ſolet in tubo longiori $29\frac{1}{2}$ digitis. Unde mox inferemus, ſimilem effectum debere conſpici in corporibus duris, ubi certam quandam altitudinem exceſſerint, atque verbi gr. partes baculi cujuſcunque, ſive attracti, ſive ſuſpenſi neceſſario diſruptum iri, tum cum totius baculi pondus ſuperarit pondus ſimilis columnæ atmoſphæricæ. Quare ut ejus rei faciamus periculum, examinabimus corpora quævis ponderoſiſſima, aurum, plumbum, ferrum, &c. & quoniam aurum decies novies, plumbum duodecies, ferrum octies, mercurius vero quatuordecies aqua in ſpecie graviora deprehenſa ſunt; & proinde mercurii ad aurum ratio eſt ſubſuperquintupartiens decimas quartas, ad plumbum ſeſquiſexta, ad ferrum ſupertripartiens quartas; inde calculo eliciemus, cylindrum aureum $21\frac{14}{19}$ dig., plumbeum $34\frac{5}{12}$ dig., ferreum $51\frac{5}{8}$ digitorum, æquiponderaturos ſimili cylindro mercuriali $29\frac{1}{2}$ pollicum, cui æquivalet ſimilis cylindrus aerius, a terræ ſuperficie ad extimos atmoſphæræ limites protenſus. Unde inferre non cunctabimur, fore, ut baculi aurei, plumbei, ferrei, attracti vel ſuſpenſi, neceſſario in fruſta concidant, ubi aſſignatam ſinguli altitudinem exuperent; eo quod a ſimili cylindro atmoſphærico, quo ponderoſiores tum exiſtunt, non poſſint amplius propelli, ſi attrahantur, nec ſuſtentari, ſi ſuſpendantur.

An vero ſolus aer, diſquiritur per comparationem ejus, quod accidit mercurio in tubo longiori.

Qua-

No. II. Quare oculis in naturam conjectis dispiciemus, num hæc ita se habeant; sed mirabimur, ratiocinia & calculum nostrum immane quantum adhuc a quotidiana experientia abludere; utpote quæ testari solet, ferramenta non tantum 46 digitorum, sed plurium perticarum, prodigiosæque longitudinis catenas trahi aut suspendi, suspensasve teneri multorum annorum decursu posse, absque ullo rupturæ periculo.

Concluditur, ipsum quoque Ætherem gravitare.

Fateor, nos primo ne cogitando quidem assecuturos, quæ unquam possit esse causa, quale cæmentum, qualeve gluten, quod has ingentis ponderis catenas a lapsu sustentet; cum absurdum sit, effectum hunc proficisci posse a tantillo pondere cylindri atmosphærici toties minori. Sed quoniam ex superioribus clare quoque percepisse nobis persuademus, pertinacem hanc cohæsionem partium duri corporis nulli alii deberi causæ, ne quieti quidem ipsi, præterquam soli pressioni corporis alicujus externi; concludere non dubitabimus, omnino necessum esse, ut suspensio & cohæsio partium baculi proficiscatur quidem a pondere corporis alicujus externi, sed a pondere longe majori, quam est pondus solius atmosphæræ: unde in suspicionem hanc incidemus, non solum aerem crassiorem, sed ætherem ipsum, omnemque materiam subtiliorem, longe supra atmosphæræ limites diffusam, aliqua quoque gravitate præditam esse, quæ, juncta cum gravitate atmosphæræ, effectum producat, quem hæc sola producere nequibat.

Ætherem gravitare probatur e natura & causis gravitatis.

Quanquam vero mera tantum hæc adhuc suspicio sit, mox tamen abibit in probabilem conjecturam, quando in memoriam nobis revocaverimus ea, quæ superius dicta sunt de Natura & Causis Gravitatis. Hæc enim cum consistat in eo, quod particulæ materiæ Terræ circumfusæ, atque in communem vorticem actæ, conatum habeant a centro vorticis recedendi, aliasque particulas minus agitationis habentes versus Terram repellendi; manifestum est, hanc deorsum premendi vim competere debere non minus materiæ subtili, quam aeri crassiori, quoniam idem motus vorticosus eam implicans, eundem recedendi a centro, aliaque corpora versus illud propellendi conatum ei imprimit.

Unde

Unde non minori jure Gravis dici meretur, quam aer atmosphæricus, quem ita vocare assueti sumus, non tam quod ipse invisibilis descendat, quam quod descendere faciat alia corpora visibilia sibi exposita. Si qui vero aerem, hac de causa, levem potius quam gravem nuncupandum esse censent; illis nullam intentabo litem, cum sufficiat mihi,ætheri talem asseruisse pressionem, quæ sit per omnia similis illi, qua aer crassior statuitur efficere cohæsionem marmorum, deprimere in vasculo mercurium, eumque in tubum sursum intrudere, aliaque similia effecta præstare: nam an ista pressio gravitatis aut gravitationis, an ponderositatis, an levitatis demum nomine venire debeat, parum refert; nisi forte præstat, illorum modo loquendi sese accommodare, quibus primo placuit virtutem hanc, quam habet atmosphæra, connectendi marmora, deprimendique in vase liquorem, gravitatis, non levitatis titulo insignire. Si tamen verborum delectus sit habendus; putem, concinnius illa quæ descendunt, vocari gravia; quæ vero descendere faciunt, aut quoquo modo incumbunt premuntve super alio corpore, rectius dici *gravitare*, aut *ponderare*. Sed adde etiam, quod difficulter concipi potest, qua ratione aer ætherve deprimant corpora gravia sibi exposita, nisi una descendant & ipsi, præsertim ubi noster Gravitatem explicandi modus obtinet; id quod omnem scrupulum eximere poterit illis, qui hanc corpora deprimendi virtutem Levitatis nomine insignire mallent. Atque probabiliter huic ipsi ætheris sive gravitati, sive gravitationi ascribendum, quod aer crassior, non per totum hunc vorticem æqualiter diffusus sit, sed in infimo ac terræ proximo subsederit loco, in quem ob languidiorem sui agitationem, ab æthere detrusus forte fuit; sicuti ob similem causam fæces vini, a materia spirituosiore separatæ, ad dolii fundum subsidere solent. No. II.

Sed ut nostra conjectura omnimodam induat certitudinem; causam, quæso, expendamus, cur postquam recipiens aqua impleveris, obstruxeris, atque embolum detraxeris, aqua non hæreat summitati recipientis affixa, verum prompte insequatur embolum, atque in scapum concedat: quare etiam mercurius tubo longiori 29 dig.

Item e descensu liquorum in vasis occlusis.

No. II. 29 dig. inclusus deorsum labatur. Profecto non sufficit dicere, hos liquores vi suæ gravitatis descendere; cum enim certum sit, hanc gravitatem non promanare ab aliquo principio interno, sed ab externi cujusdam corporis impulsione, determinandum esset, quale sit corpus istud, descensum hunc in liquoribus efficiens; & cum non possit esse aer atmosphæricus, cui aditus undique præclusus est; erit ergo necessario pondus materiæ subtilis, recipiens ingressæ, stipatæque mole totius columnæ æthereæ incumbentis, quacum per poros vitri communicationem habet. Imo tantum abest ut, sine hac ætheris gravitate, descendere possent liquores, ut violenter quoque detrusi cum impetu superiora versus resilirent, ob recedendi a centro Terræ conatum sibi impressum a motu vorticoso, cui omnia hæc sublunaria involuta sunt. Neque huic nostræ doctrinæ officit, quod aliqua diversitas animadvertatur inter aquam recipienti inclusam, & inter aerem, in eo quod hic sese in recipiens, æqualiter, non minus sursum atque deorsum, diffundat, non vero instar aquæ subsidat; uti quidem subsidere debere videretur, si materia subtilis aliquam super illo exerceret gravitationem. Tenendum namque, materiam subtilem gravem esse, aeremque revera subtili graviorem, & hactenus in subtili subsidere debere: sed quia excessus, quo gravitas terrestris alicujus particulæ aeris superat gravitatem æqualis particulæ materiæ subtilis, non tantus est, quantum ejusdem particulæ terrestris elaterium; hinc fieri necessum est, ut fortior elaterii vis effectum gravitatis impediens, aerem per totum recipiens, non minus sursum atque deorsum, dispergat.

Aliud porro pressionis ætheris argumentum est; quod nequeat concipi, quo pacto aeris particulæ superiores premant gravitate sua inferiores, siquidem singulæ a singulis (quæ fluidorum natura est), interspersa materia subtili, separatæ sint; nisi concipiatur, superiores premere subtilem, utramque vero, junctis viribus, inferiores.

Ætherem gravitare in Philosophia

Sed eo minus denique hæc ætheris gravitatio mira videri nobis debet, quod tota fere Philosophia Cartesiana absolvitur pressione materiæ cælestis (quæ globulorum secundi elementi nomine

mine ipſi venit)'; non tantum tali, qua ſingulæ hujus materiæ particulæ peculiarem exercentes motum, multorum particularium effectorum cauſæ exiſtunt; ſed inſuper univerſali aliqua preſſione, qua dicti globuli, a rotatione corporis ſolaris, circum circa continua ſerie protruſi, in fundo oculorum noſtrorum fibras, ſeu capillamenta nervi optici concutiunt, atque ita luminis in nobis ſenſum efficiunt: nulla enim erit ratio, quare in reliquis corporibus, quibus incumbunt, hac ſua preſſione, non pari ratione effectum gravitatis producere poſſint; præſertim ob analogiam preſſionis horum globulorum ac gravitatis atmoſphæræ, quarum utraque ab alicujus vorticis, illa ſolaris, hæc terreni, gyratione derivatur. Notabimus ergo hac occaſione, quamvis illius tantum gravitatem materiæ demonſtraſſe mihi ſufficiat, quæ in hoc vortice ſublunari contenta, a motu ejus vorticoſo vim acquirit a centro recedendi, aliaque corpora verſus illud propellendi; me tamen ſubtilioribus ingeniis diſcutiendum adhuc relinquere, annon & omnis illa materia inter Lunam Solemque intercepta in cenſum corporum gravium referri poſſit, ob preſſionem, qua continuo, a Sole deorſum, Terram verſus, impellitur, vibraturve; imo nunquid totius hujus, quam late patet, univerſi materia quodammodo gravis dici poſſit, ob arctiſſimam conſtipationem particularum ſuarum; qua fiat, ut, omni vacuo inter eas excluſo, nulla poſſit a vorticis ſui rotatione impelli, quin ſubito premat infinitam aliarum ſeriem in longiſſima linea, ex uno vortice in alium, protenſam, atque ita ſubinde Terram quoque noſtram in occurſu feriat. Illud tantum hic concedi mihi velim, quod gravitas ætheris ſublunaris, (ſic voco materiam ſubtiliorem, quatenus contradiſtinguitur aeri craſſiori,) varias poſſit accipere modificationes a preſſione ætheris ſupralunaris, & vel augeri vel minui, prout, diverſis anni tempeſtatibus, ab illa fortius debiliuſve Terram verſus impellitur.

No. II. Carteſiana nullum myſterium.

Conceſſa itaque jam ætheris preſſione, ſeu gravitate; non arduum nobis erit rationem reddere, unde ſit quod partes catenæ, etiamſi longiſſimæ, tam firmiter cohæreant. Cum enim at-

Per Gravitatem Ætheris explica-

No. II. tur cohæsio partium baculi.

trahitur, vel suspenditur ex alto talis catena; cogitandum est, per hanc attractionem vel suspensionem, retundi & sufflaminari, ut sic dicam, pondus cylindri aerio-ætherei, summæ superficiei catenæ perpendiculariter incumbentis, ita ut nequeat amplius gravitare super reliquas catenæ partes; quo fit, ut planum illud imaginarium, inferiorem catenæ superficiem lambens, hac in parte, qua huic superficiei subest, a solo catenæ pondere (vel rectius a nullo) prematur; cum in reliquis suis partibus ab incumbente mole aerio-ætherea longe majorem subeat pressionem; unde, juxta Mechanicæ & Hydrostaticæ leges, minore pressione fortiori cedente, opus est, ut partes catenæ inferiores a pondere laterali subinde subleventur, ubi suspensa est catena; vel impellantur contra supremas, ubi attracta est: unde necessaria partium sequi debet connexio & mutua quies. E quibus perspicuum esse poterit, tantum abesse, ut quies sit cohæsionis istius causa, ut potius & quies, & cohæsio, (utriusque enim eundem tantum conceptum habeo,) compressionis externæ manifestissimus sit effectus.

An possit dari baculus, cujus pondus superet pondus similis cylindri ætherei?

Quanquam autem ex iis, quæ modo diximus, concludere promptum sit, lapsuram necessario catenam, partesque a partibus separatum iri, ubi pondus catenæ excesserit pondus similis cylindri aerio-ætherei; non tamen sperandum hujus consectarii veritatem, unquam aliter quam in speculatione demonstrari posse: ut enim in praxi exhiberetur, tam prodigiosæ longitudinis requireretur baculus, isque ex tanta altitudine suspensus, ut ab industria humana tale quid expectari prorsus nequeat. Quod ut cuivis pateat; supponamus, illam tantum ætheris gravitare portionem, quæ in minori isto vortice Terram inter & Lunam expansa est; ejusque specificam gravitatem centies minorem esse gravitate crassioris, quem spiramus, aeris; sumamusque aurum omnium hactenus cognitorum corporum gravissimum. Hoc, cum decies novies gravius sit aqua, aqua fere millies aere, aer vero ex suppositione centies æthere; erit ipsum aurum 1900000^ies in specie gravius æthere; & consequenter ætheris cylindrus æquiponderabit simili cylindro aureo 1900000 vicibus bre-

breviori. Quare, cum altitudo cylindri ætherei sit 50 circiter semidiametrorum Terræ, id est, 43000 milliar. German. sive 860000000 pedum Rhinlandicorum, (quanta videlicet est Lunæ a Terra distantia) erit altitudo cylindri aurei, æthereo æquiponderantis, plusquam 452⅓ pedum; quibus addendi adhuc duo pedes, pro pondere atmosphærico, ut habeantur 454⅓ pedes. Tanta videlicet deberet esse longitudo baculi ex metallo ponderosissimo confecti, antequam superet vim illam, qua ejus partes cohærent: unde liquet, quanta reliquorum metallorum, auro longe leviorum, cylindris debeatur longitudo, quæ sufficiens sit ad divellendas eorum partes, atque ad superandum pondus æthereum, quo illæ cohærere solent. No. II.

Atque ita quidem ratiocinandum fuit, ubi, facilioris intelligentiæ gratia, rem vulgari more hydrostatico expedire placuit; supponendo in catena pondus quoddam, quod ætheris pressioni contranitatur, eamque si satis magnum fuerit, superare valeat: sed, si rem attentius introspiciamus, parebit, quantæcunque etiam fuerit longitudinis catena, impossibile esse, ut ejus partes inferiores a superioribus separentur; propterea quia, in suspensione vel attractione, nullum amplius possident pondus, quod illas ad lapsum invitet. Consideremus primo catenam alicubi suspensam, & si vis, aliquot mille pedes longam, quare deciderent partes ejus inferiores? Frustra dicis, quia sunt ponderosæ: quid enim est pondus? haud dubie nisus aliquis & tendentia deorsum: unde vero iste nisus? fateris non a principio quodam intrinseco, sed nec ab incumbentis ætheris pressione, utpote quæ per suspensionem terminari supponitur in summa superficie catenæ, nec pertingere ad partes ejus inferiores. Nullus ergo talis descendendi in ipsis est conatus: non ergo descendent, etiamsi nulla supponatur materia, quæ illas contra supremas catenæ partes impellat. Sed contemplemur etiam nunc catenam, altera sui extremitate attractam, iterumque assignata mensura multo longiorem; & expendamus rationem, quare partes ejus sequentes deberent non attractæ relinqui. Quia sunt, inquis, ponderosiores simili cylindro aerio-æthereo, a quo proinde nequeunt pro-

Baculus attractus vel suspensus proprie nullum possidet pondus, adeoque a minima ætheris vi propelli poterit.

No. II. propelli: ſupponis ergo habere pondus; ſed unde hoc, ſi non ab interno principio, nec ab externa ætheris incumbentia, quæ per attractionem irrita fit. Regeris, ipſam catenæ molem & quietem reſiſtere preſſioni ætheris lateralis, illam ſublevare conantis: atque in hac reſiſtentia conſiſtere ejus pondus. Tota ergo quæſtio huc rediret, an corpus aliquod quantumvis magnum in loco vacuo, id eſt, tali, ubi a nihilo adjuvaretur, vel impediretur, conſtitutum, ſola ſua mole, vel quiete, potentiæ moventi reſiſtere potis eſſet? & quia puto concipi non poſſe, qualis ſit iſta in magnitudine vel quiete, qui modi ſunt pure paſſivi, reſiſtendi vis; credendum, minimam potentiam motricem ſufficientem eſſe movendo maximo corpori quieſcenti in vacuo conſtituto, contra Reg. motus 4tam Carteſianam. Unde quia, per attractionem catenæ, inter ſupremam ejus partem & ſequentes, conſtituitur (ſit venia dicto) vacuum quaſi *potentiale*, id eſt, talis locus, in quem inferiores, nullo impediente, protrudi poſſunt; ſequitur minimam ambientis materiæ preſſionem capacem eſſe ſublevandæ toti catenæ, licet multoties longiori.

Cur ſuppoſita ætheris gravitate, liquores tamen non debeant ad infinitam altitudinem in tubis ſuſpenſi hærere?

Longe autem alia ratione hac in parte comparatum eſt cum ſuſpenſione liquorum in tubis; quare diluendus eſt circa illam ſcrupulus, quem prævideo ad impugnandum ætheris pondus moveri poſſe: Exiſtimaret enim forte aliquis, ſi præter atmoſphæram gravitaret omnis illa materia ſubtilis ad orbem uſque Lunæ protenſa, fore, ut aqua incomparabiliter altius in tubum elevaretur, quam ad 34 tantum pedes; ipſeque mercurius in multo majore quam 29 digitorum altitudine ſuſpenſus hæreret: quoniam enim gravitates aeris & aquæ ſunt, ut 1 ad 1000, numero rotundo; vel aeris & mercurii, ut 1 ad 14000; oportet, ut cylindrus fluidi externi, qui in æquilibrio aquam 34 pedum, aut mercurium 29 digitorum ſuſtinet, cylindrum aqueum non niſi millies, aut mercurialem 14000ies ſuperet; adeo ut altitudinem 34000 pedum vix excedere queat; (quanta quoque fere eſſe poterit atmoſphæræ altitudo, ſiquidem uniformis ubique ſupponatur conſiſtentiæ;) tantum abeſt, ut ad orbem uſque

que

que Lunæ pertingere, ac 43000 milliarium altitudinem exæquare possit. Considerandum itaque, latera tubi, quæ aeri crassiori transitum negant, non perinde materiæ subtili impervia esse; quare cum hæc libere per poros istorum laterum, ut & durissimi cujusque corporis, irruere possit; non est, quod dici queat materiam subtilem, imminentem vasculo extra tubum, fortius impellere liquorem sursum, quam illa quæ liquori in tubo incumbit, eundem premit deorsum; cum utrique liquori, extra & intra tubum, æqualis altitudinis cylindrus æthereus incumbat: (exigua enim illa paucorum pedum differentia, qua cylindrus vasculi altior est cylindro tubi, in tam immensa cylindrorum altitudine nullius est momenti:) subductis ergo æqualibus istis viribus in contrarium tendentibus, ac se mutuo destruentibus, remanet solum aeris atmosphærici pondus, præter materiam subtilem super vasculo gravitans, cui impulsio liquoris in tubum ascribenda. No. II.

Idem quoque responderi tuto poterit, quotiescunque animadvertimus, cylindrum aerio-æthereum non majus sustentare vel elevare posse pondus, quam atmosphærico æquivalens. Huc facere poterit *Exper.* 33. *Illustr.* BOYLII *in Libro ejus de Novis Experim.* ubi narrat, postquam evacuatum fuisset recipiens, detractum embolum, sublata vi detrahente, tanto impetu in antliam veluti sua sponte reascendisse, ut etiam annexum sibi pondus plusquam centum librarum in altum sustulerit. Quum enim hic maximi ponderis, quod ab embolo sic sursum rapi poterat, mentionem factam esse mihi persuaderem; explicando pondus plusquam centum librarum de paucis ultra centum libris, cupido me incessit calculo explorandi, an solius atmosphæræ pressio isti ponderi sublevando sufficiens esse potuerit. Quoniam autem constat, cylindrum atmosphæricum æquiponderare simili cylindro aqueo 34 circiter pedum; suffecerit investigare pondus talis cylindri aquei, cujus basis insuper obtinet diametrum 3 digitorum, quanta nempe est diameter scapi atque emboli, in machina Boyliana. Sumsi itaque, dum aliud vas regularius non erat ad manus, vulgarem urnam lymphaticam

Cur Embolus evacuatæ antliæ non nisi centum plus minus libras sustineat?

a b c d,

No. II. Fig. 19. *a b c d*, coni truncati figuram præ se ferentem: Ejus summa basis *a b* in diametro continebat unum pedem Anglicanum, seu mille scrupulos; ima *c d*, 792; profunditas perpendicularis *g e*, 750: hinc superioris basis area reperitur 785714, inferioris 492850, scrup. quadr. Et quia in conis truncatis, ut differentia diametri basium est ad profunditatem, ita diameter basis minoris ad altitudinem frusti resecti; hinc erit, ut 208 ad 750, ita 792 ad rectam *e f*, 2856 scrupul. cujus tertia pars 952, ducta in aream 492850, mihi exhibuit soliditatem coni imaginarii *c f d*, nempe 469193200 scrupulorum cubicorum. Similiter area basis majoris 785714, ducta in 1202, tertiam videlicet partem aggregati profunditatis urnæ & altitudinis coni imaginarii, manifestavit soliditatem coni integri *a f b*, quæ est 944428228, scrup. cubic.; a qua subtracta soliditas coni imaginarii *c f d*, reliquit capacitatem quæsitam urnæ *a b c d*, nempe 475235028 scrup. cubic. Quo facto urnam in bilance appendi, primo vacuam, reperique pondus ejus 7 lib. 6. unc. eandemque postmodum aqua repletam, ponderabatque 35 lib. 6 unc. illo ergo ab hoc subducto, relinquebantur pro pondere solius aquæ 28 libræ; unde conclusi 475235028 scrupulos cubicos aqueos deprimere 28 libras, integrum vero pedem cubicum aquæ propemodum * 59. libr. Porro, quia circulus, cujus diameter est trium digitorum, sive 250 scrupul. aream habet 49107 scrup. quadr. si ducatur hæc in 34 pedes, sive 34000 scrupulos, prodibunt 1669638000 scrup. cub. pro soliditate cylindri. Quare dicendum: Si 475235028 scrup. cub. aquæ deprimunt 28 libras, quantum ponderabunt istorum scrupulorum 1669638000? *Facit* 94 libras, pro pondere cylindri aquei 34 pedes alti, & latitudinis tripollicaris, sive similis cylindri atmosphærici, quantum quoque præterpropter fuit illud pondus, quod in Expe-

Pondus pedis cubici aquæ.

Pondus cylindri atmosphærici latitudinis tripollicaris.

* Rohoftus Physicæ suæ parte prima, cap. 9. §. 10. ponit pro pondere pedis cubici aquæ 71 libras; sed pes Parisiensis Anglicano major, ille 1055, hic tantum 968 est partium, quarum Rhinlandicus continet mille. Taceo, quam in ponderibus intercedere potest, differentiam.

Experimento Boyliano embolo appensum & ab illo sublevatum fuit. No. II.

Exinde vero frustra quis putaret, convelli gravitatem ætheris, sub prætextu, quod solum pondus atmosphæricum huic effectui producendo capax fuerit, & quod, supposita ætheris pressione, longe majus pondus embolo annexum sustentari & elevari debuisset. Nam considerandum est, dum evacuatur aer, non pariter exhauriri posse ex antlia materiam subtilem, quin subinde liberum sibi paret introitum in recipiens atque antliæ scapum per eorum poros, ibique non minori robore premat super interiore emboli superficie, quam exterior ætheris cylindrus premit super exteriore; unde, æqualibus his abolitis viribus, remanet tantum illud cylindri atmosphærici superpondium efficax, quo exterior emboli pressio interiorem superat.

Disparitas inter suspensionem baculi, & liquorum in tubis.

Atque hinc maxima elucet disparitas, quæ hac in parte intercedit, inter suspensionem attractionemve baculi vel catenæ, & inter suspensionem liquorum in tubis, vel emboli in scapo recipientis: nam, quantum ad baculum suspensum vel attractum; is, toto suspensionis seu attractionis tempore, reapse nullam possidet gravitatem, neque in actu secundo, neque in actu primo, id est, neque descendit, neque descendendi habet conatum, utpote liberatus a pressione incumbentis ætheris, cujus tota vis terminatur in summa baculi superficie, vel potius in manu attrahentis, aut unco, ex quo suspensus est: hinc enim fit, ut baculus, utut procerus, a minima ætheris vi sustentari aut propelli debeat. Sed aliter sentiendum de liquore in tubo, aut embolo cum annexo pondere in scapo recipientis; qui quamvis actu non descendant, retinent tamen omnem suam gravitationem & descendendi nisum, propterea quia efficaciam pressionis materiæ subtilis, per tubum vel recipiens ingressæ, in omnibus suis partibus adhuc persentiscunt: neque enim sane ut manibus sustentati, vel ut clavis ad tubi scapique latera, instar baculorum, affixi concipi debent: unde sequitur, non majorem ipsorum molem hac ratione sustentari posse, quam cujus descendendi nisus debilior est vi externæ pressionis atmosphæricæ.



No. II. Interim tamen etiam recte exinde colligimus, si quo artificio materia subtilis ab ingressu tubi arceri queat, fore, ut liquor ad quamvis imaginabilem altitudinem in tubum elevari, vel in eo suspensus teneri debeat; quod ab omnibus Plenistis, præsertim ab iis, qui ad Fugam vacui confugere in hac materia solent, mihi concessum iri non dubito.

Cur Mercurius repurgatus in sex pedum altitudine hæreat?

Quanquam autem tale quid effectui dare impossibile forte videatur, ob improbum obstaculum, quod nullus dari possit tubus, adeo solidus & compactus, qui sit materiæ subtili impenetrabilis; non tacendum tamen est hanc in rem rarum quoddam experimentum, quod Nob. ROHOLTUS *Phisic. part. prim. cap.* 12. §. 29. ex Anglia sibi transmissum memorat, videlicet quod mercurius, in exhausto recipienti aliquantum temporis asservatus, ad altitudinem sex pedum citra lapsum in tubo suspensus hæreat: ubi observandum, mercurium, durante sua in evacuato recipienti mansione, a magna copia materiæ peregrinæ, quæ antea in ejus poris latitaverat, repurgari; perque hujus materiæ exhalationem ejus poros reddi debere multo, quam fuerant, angustiores: quo concesso, facilem dabimus ex iis, quæ hactenus dicta fuere, phænomeni solutionem: Si supponamus enim, mercurium hoc pacto repurgatum ita sese insinuare & adaptare tubi poris, ut omnes eorum recessus quam exactissime oppleat; consequi videtur, materiam subtilem in illas tantum mercurii particulas agere posse, quæ poros vitri obstruendo ejus pressioni exponuntur; cæteras vero, quæ solidis tubi partibus, tanquam propugnaculo muniuntur, ab hac pressione immunes præstari debere, quod materia subtilis objectu priorum ab omnimoda in tubum irruptione prohibetur. Unde quia cylindrus mercurialis tubo inclusus, a perpendiculari columna ætherea parte sui tantum aliqua (qua, ut sic dicam, cylindrum refert perforatum) deorsum premitur; dum interea ab æthere laterali vasculo incumbenti secundum se totum sursum impellitur; non potest non ista impulsio priori multo prævalere, atque ita longe procerior mercurii cylindrus sustentari, quam si, illo non repur-

repurgato, penetrasset tubum æther, superque totum ejus corpus æqualiter sese diffudisset. No. II.

Observandum etiam hac occasione, esse aliquos, qui existimant, materiam subtilem in vulgari experimento Torricelliano non per vitrum, quod illi sit impenetrabile, sed per ipsius mercurii poros sibi transitum parare; id quod per alterum experimentum, siquidem fidem mereatur, necessario inferri autumat ROHOLTUS: nulla enim alia, inquit, phænomeni hujus dari posset ratio, quam quod clausis, vel angustatis, mercurii repurgati poris, omnis materiæ subtili præclusa foret via, qua pelli posset ab incluso mercurio in locum, ad quem deferendum ipse naturali sua gravitate proclivis est. Veruntamen aliam phænomeni jam dedimus rationem, non recurrendo ad omnimodam vitri soliditatem: imo ne quidem necessaria esset allata responsio, supposita etiam tubi impenetrabilitate, & sufficienti pororum mercurii angustia; simpliciter dicendum fuisset, mercurium repurgatum ideo in tanta altitudine hærere suspensum, quod omni exutus sit gravitate; cur enim descenderet, ubi nulla est gravitas seu descendendi nisus? unde vero iste descendendi nisus, ubi nulla est materia deorsum premens? unde tandem ista materia, cui undequaque negatur ingressus? Verum tam altas egit in mentibus nostris radices idea gravitatis, ceu qualitatis alicujus inhærentis, & a subjecto suo inseparabilis; ut, omni etiam adhibito studio, vix cavere possimus, quin crebro inveterati hujus conceptus indicia verbis incogitanter prodamus.

Cur pressione Ætheris non connectantur, uti durorum, ita liquidorum particulæ?

Alia nunc suboritur nobis excutienda quæstio, unde nempe fiat, quod tota hæc fluida materia, Terram quaquaversum ambiens, siquidem gravitet, atque ista gravitate cohæsionis partium causa existat in corporibus duris, non possit idem efficere in corporibus liquidis, & ne quidem, tota hac sua pressione, duas solas guttulas aquæ ita connectere, quin, attracta vel suspensa una, altera protinus decidat atque ab illa separetur; cum tamen liquida corpora non minus ejus pressioni exposita sint, atque dura. Observo autem, hujus quæstionis solutionem ex principiis nostris reddi non posse, quin illa eadem opera nos deducat in

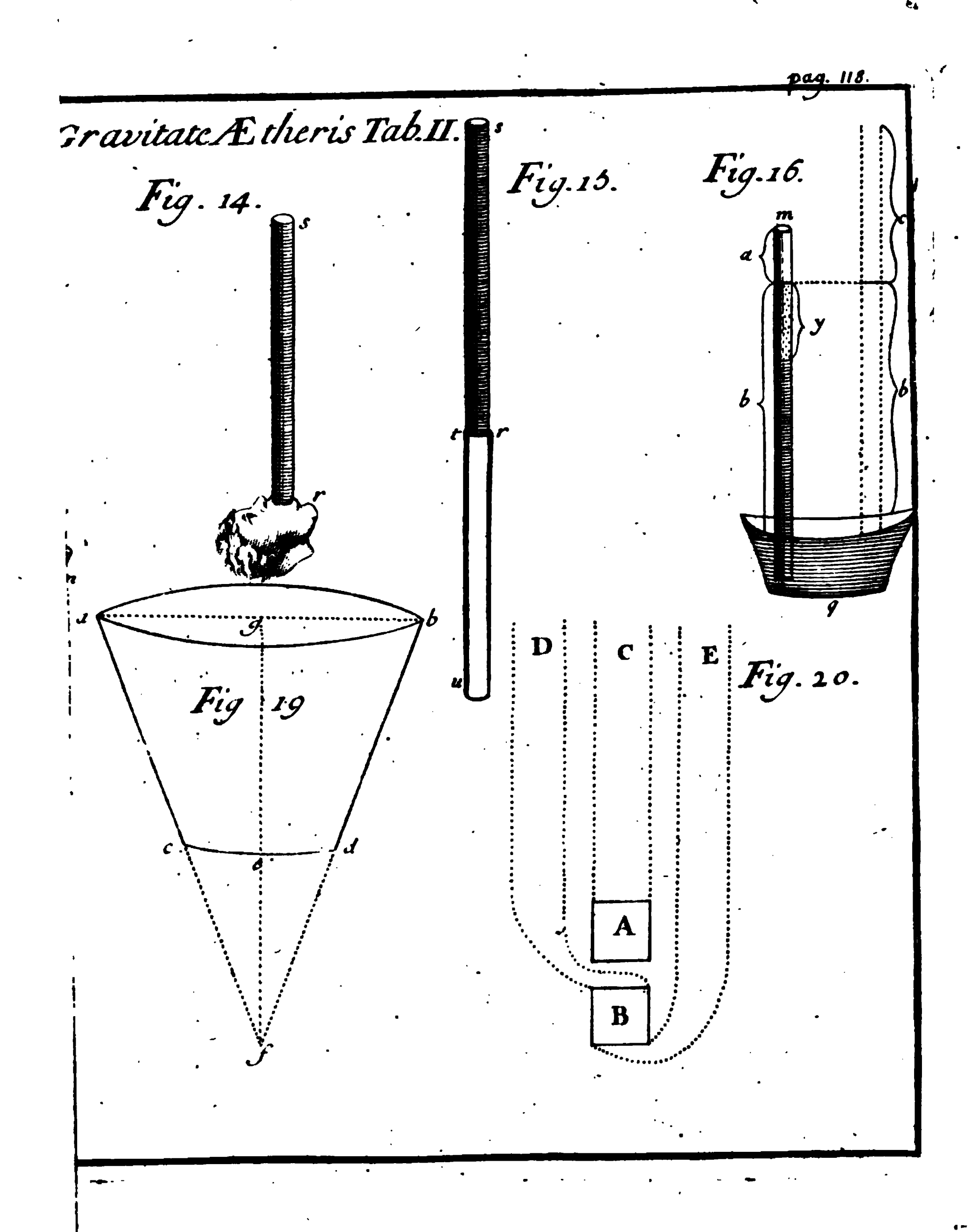
No. II. cognitionem naturæ corporum durorum & liquidorum, qualis ea concipitur a sanioris Philosophiæ Cultoribus, quod proinde sententiam meam de Pressione Ætheris, Cohæsionis corporum causa; non parum confirmabit: Supponamus itaque duo corpora A, & B, libero aeri exposita, quorum superius A, vel attractum, vel suspensum, vel quoquo modo fulcro innixum intelligatur; & consideremus primo, quid circa corpus B, juxta principia nostra, fieri debeat, ut affixum hæreat corpori A. Manifestum autem, quia ambo corpora fluido externo ambiuntur, nos posse concipere varias hujus fluidi columnas, quarum media C incumbat perpendiculariter corpori A, lateralium una D premat superficiem superiorem corporis B, altera E inferiorem; animadvertimusque, quamdiu columna D æqualibus viribus infringit impetum columnæ E pellentis sursum, corpus B non posse jungi superficiei corporis A, sed necessario ab illo separatum iri, & lapsurum vi tanti ponderis, quanto juvatur conatus deprimendi columnæ D a propria gravitate corporis B. Unde concludimus, si corpora A & B cohærere debeant, necessum esse, ut superficies superior corporis B a pressione columnæ D immunis præstetur; quod aliter fieri nequit, quam si superficies contiguæ corporum A & B immediate sese contingant; (ut videre est in *Fig.* 21.) sic enim fiet, ut exclusa columna D, corpus B illa tantum pressione afficiatur, quæ illud sursum impellit & agglutinat corpori A: neque enim existimandum est, columnam C ullatenus in corpus B, quamvis immediate junctum corpori A, agere posse, illud deorsum impellendo; utpote cujus tota pressio terminatur in corpus A, vel potius in manum illud elevantem, aut fulcrum illud sustentans. Et sic quidem cohærebunt corpora: unde intellectu non difficile est, cum contrariorum sit contraria ratio, quid corpora reddat liquida: nihil enim aliud ad hoc requiri videtur, quam ut columnæ D hiatus sive rima relinquatur aperta, qua possit irruere inter superficies utriusque corporis A & B; atque, hoc deorsum premendo, irritam reddere columnæ E pressionem sursum; (uti in *Fig.* 20.) sic namque fiet, ut corpus B necessario separetur

Fig. 20. (margin, beside "pora A, & B")

Fig. 21. (margin, beside "superficies contiguæ")

Fig. 20. (margin, beside "lumnæ D hiatus")

retur


Gravitate Ætheris Tab.II.
Fig. 14.
s
r
Fig. 15.
s
t
r
u
Fig. 16.
m
a
y
b
b
q
a
b
g
Fig 19
c
e
d
f
D
C
E
Fig. 20.
A
B

retur ab A, decidatque tanto impetu, quantus respondet excessui, quo pondus B superat pondus æqualis voluminis materiæ sursum prementis. No. II.

E quibus tandem judicabimus, naturam *Liquidi* cujusque corporis in eo consistere, quod particulæ ejus singulæ a singulis separatæ sint atque discretæ, interjectis intervallis *iii*, alia materia peregrina repletis, quæ adeo non inepte comparari poterunt densæ congeriei minutissimarum insularum, in materia subtili tanquam oceano suo fluitantium; qualis repræsentatur *Fig.* 23. *Duri* vero natura in eo sita est, quod ejus partes continuo sibi omnes adhærescant filo, sic ut nulla inter superficieculas earum queat intercedere materia peregrina, quamvis interea infinitis possit patere poris *aaa*, per quos tanquam per canaliculos deferatur materia subtilis; quo ipso non inconcinne refert tractum terræ continentis, cujus partes omnes longo isthmo protensæ, communicationem habent invicem, & quamvis hinc inde interlabente amne interstinctæ, ponte tamen iterum connexæ sunt; qualis figura adumbrata est num. 24.

Quæ sit natura liquidi & duri? *Fig.* 23. *Fig.* 24.

Sed quia hic peculiaris aliqua circumstantia, & difficultas non contemnenda circa naturam Liquidorum sese offert, speciali aliquo exemplo rem illustrare conabor: Sit ergo tubus in aere pendulus, & repletus aqua, cujus duæ solummodo considerentur guttulæ A, & B, (quia reliquarum par est ratio) annihiletur per Dei potentiam tubus, suspensaque concipiatur in aere guttula superior, quid fiet de reliqua? decidet, inquis, & separabitur ab altera; aere enim undique allabente, erit columna quidem una E, quæ ad ascensum sollicitabit guttulam B, alia vero D, quæ eandem æqualibus viribus conabitur premere deorsum; & quia huic posteriori pressioni auctarium accedit a proprio pondere guttulæ, sequitur illam priori prævalituram, & sic detrusum iri guttulam. Sed ecce nodum! supponis, columnas ambas prementes æqualium esse virium; dum non attendis, illam, quæ premit super superficie inferiore corporis B, ex æthærea & atmosphærica esse compositam, illam vero, quæ superficiei ejusdem superiori incumbit, pure esse æthæream; propterea *Fig.* 26.

No. II. quia rimula illa, inter utramque guttulam interjecta, ob angustiam suam, nullam aliam materiam præterquam subtilem admittit; (constat enim liquores, aut nihil, aut sane perparum, in se continere aeris crassioris, intervallis inter particulas eorum soli subtili patentibus;) unde plane sequeretur contrarium, videlicet pressionem guttulæ sursum, factam a columna aerio-ætherea E, fore tanto validiorem pressione ejusdem deorsum, profecta a columna ætherea D, quanto columnæ E accesserit a cylindro atmosphærico superpondium; & proinde guttulam istam perpetuo adhæsuram superiori.

Pori liquorum non sola materia subtili repleti.

Quare ut hæc evanescat difficultas; sciendum probabile esse, liquorum poros non soli materiæ subtili patere, sed subinde satis laxos esse, qui imperceptibiles quasdam aeris particulas, vel aliquid aeri analogum hinc inde diffusum hospitentur. Id enim videntur suadere exiguæ illæ bullulæ, quæ e quovis liquore recipienti incluso per exhaustionem elici conspiciuntur, quippe quæ (inclinante in hanc sententiam Illustriss. BOYLIO) aeris ibi delitescentis, atque sese jam expandentis potius, quam elaterii cujusdam ipsius liquoris, sunt effectus; cum similes bullulæ in argento vivo, liquore adeo ponderoso & denso, nullumque haud dubie possidente elaterium, deprehendantur; vid. *Lib. de Nov. Experim. num.* 22.

Cur liquori effuso sese confestim insinuet aer?

Verum alia superest respondendi via, etiamsi intervalla liquorum nulla alia quam subtili materia repleta esse supponamus; hoc enim admisso, verum quidem esset, quamdiu nihil aeris atmosphærici subintraverit rimulam duarum guttularum, superque inferiorem guttulam presserit, eam minime lapsuram esse; sed verum etiam foret, guttas sic diu hærere non posse, quin statim sese rimulæ insinuet aer: considerandum enim, quantulumcunque materiæ subtilis illud est, quod guttulam a guttula disterminat, hiatum tamen & rimam semper aliquam inter utramque relictum iri, minutissimam quamvis, rimam tamen; huic rimæ particulæ aeris angulosæ columnæ D necessario sese intrudunt, & cum stipatæ sint mole totius columnæ aeriæ D, non minori nisu hanc rimam studebunt servare apertam atque laxare,

laxare, quam eandem rimam angustare vel claudere conatur columna E; cum vero conatus columnæ D adjuvetur proprio pondere guttulæ, quo impeditur pressio columnæ E, prior necessario superior evadet, atque laxata rima super superficie guttulæ pressionem exercens, eam deorsum impellet. Quodque hic dictum de duabus guttulis, pari ratione de integra mole aquea, alteriusve liquoris, in aerem effusa intelligendum: quoniam enim infinitis istiusmodi patet rimulis *iii*, (*fig.* 23.) per quas aer, cunei instar, desuper & a latere magno impetu sese intrudit; non possunt non laxiores reddi, guttulæque ab aere intromisso deprimi; quod & ex ipso aquæ descensu liquere potest; quo diutius enim hæc continuavit cadere, eo magis magisque ab aere irruente dissipatas videmus guttulas. No. II. Fig. 23.

Contrario plane modo philosophandum est de Corporibus Firmis seu Duris, v. g. de baculo, cujus nulla pars ab alia separatur, quamvis sub dio suspensus, atque libero aeri expositus sit; cujus ratio est, quod ejus particulæ a provida Matre Natura ita firmiter sibi sint coaptatæ, ut ne minima quidem inter superficiecularum commissuras relicta sit rima, quæ accessum præbeat materiæ peregrinæ: nam quanquam per illos canaliculorum mæandros *aaa*, (*fig.* 24) irrumpere possit non tantum subtilis, sed & ipse quandoque aer crassior, atque ita disterminare seriem unam particularum *bb*, ab altera *cc*; cogitandum tamen, has series subinde innumeris ramis transversis *bc*, *bc*, sibi connexas esse, atque adeo singulis particulis cum singulis perpetuum, sive immediate, sive per intermedias, esse commercium. Ergo dum attrahitur, vel suspenditur baculus; impeditur per hanc suspensionem, vel attractionem, columna insistens supremis baculi partibus, pariterque, per arctam connexionem particularum, reliquæ omnes columnæ laterales, ne gravitare possint super summas superficies partium inferiorum; quæ cum desuper non premantur, obsecundabunt pressioni ex imo sursum, atque ita perpetuo cohærebunt. Cur pressione Ætheris connectantur Durorum particulæ? Fig. 24.

Non arduum etiam erit, his intellectis, cognoscere naturam *Corporum mollium* & *Liquorum crassiorum*, quæ cum minus pertina- In quo consistat mollities & lentor?

No. II. tinaciter cohæreant, quam perfecte dura, ægrius quoque tamen separantur perfecte fluidis. Cum enim particulæ ex parte cohærent, ex parte divulsæ sunt, hinc oritur *mollities*; & cum rimulæ inter partium superficieculas interjectæ sunt angustiores, quas minus facile, nec nisi cum aliqua mora penetrare possit aer, hinc ille *lentor*.

Cur liquidorum particulæ sint rotundiores, durorum oblongiores?

Quem philosophandi ordinem si ulterius vellemus prosequi; varias adhuc detegeremus corporum durorum & liquidorum proprietates, quarum una est, quod Liquidorum particulæ debeant, non dico, exacte rotundæ esse, sed magis ad figuram sphæricam accedere, quam Durorum; quia illæ a materia subtili totæ ambitæ, undique fere premi æqualiter, hæ vero, propter aliarum accrescentiam, longorum ramorum figuram nancisci debent.

Cur illæ moveantur, hæ quiescant?

Maxime vero insignes Duri & Liquidi proprietates, quæ præcipuum eorum constituunt discrimen, atque ex principio nostro sponte quasi fluunt, hæ sunt; quod Fluidorum particulæ in continua sint agitatione & motu, utpote singulæ a singulis separatæ; Durorum vero universæ juxta se quiescere debeant, quippe singulæ ab aliis sibi connexis impeditæ. Simile cape, crassum forte magis quam ineptum: Duæ Bestiæ solutæ in omnes partes prompte discurrere, sesesque in orbem vertere possunt; & dum una ad sinistram, altera eodem momento ad dextram se inflectere poterit: sed vinculo sibi illigatæ ubi fuerint, neutra poterit aliquorsum tendere, quin altera nolens volens in eandem plagam rapiatur; imo dum sic, respectu partium conclavis, locum varie mutare possunt, respectu sui tamen, quiescere dicentur; quandoquidem altera in alterius vicinia perpetuo hæret: Ita putandum est, pressionem duarum columnarum aerio-æthercarum esse vinculum illud, quod partes duri corporis inter se connectit, atque ad motum ineptas reddit. Qua occasione præsertim notari velim, sicuti ridiculum foret, bestiarum connexionem, quæ debetur vinculo, ascribere earum quieti, cum hæc contra fluat ex illa; ita non magis excusari posse, si dicatur, causam cohæsionis partium duri corporis deberi ipsarum quieti;

cum

cum utraque, & quies, & cohæsio, (utriusque enim eundem habeo conceptum) debeat esse manifestum consequens & effectum illius pressionis, seu actionis, qua partes invicem connectuntur. No. II.

Durorum particulas absolute quiescere, non est necesse.

Illud tamen etiam prætereundum mihi non est; quod quamvis particulæ duri corporis ita connexæ, a pressione columnarum aerio-ætherearum impediantur in illo motu, quo promiscue, atque celerrime, in omnes partes ferri alias potuissent; non tamen necessum sit, ipsis omnem prorsus adimere motum; relinqui enim illis poterit motus languidior in orbem talis, qui fit super axiculis ad partium connexarum superficieculas perpendicularibus; quo motu fiet, ut superficies sibi mutuo, secundum se totas quidem, junctæ maneant, partes tamen earum successive aliæ aliis diversimode respondeant. Confirmatur ex eo, quod etiam in adamante, & corpore quovis durissimo, successu temporis alterationes observentur, quæ de intestino particularum motu, licet lentissimo, satis utique testantur. Consule Tractatum Celeb. BOYLII de *absoluta Quiete in corporibus*.

Cur Liquida facile cedant tactui, Dura difficulter: & an quies ejus rei causa sit?

Alia proprietas Durorum & Liquidorum est, quod hæc facile cedant tactui, illa difficulter: Cujus causam CARTESIUS iterum rejicit in motum & quietem partium, *Part. secund. Princip.* §. 56. 57. Sed nequicquam: an enim digitus meus impellens plus invenit resistentiæ in particulis ferri omnino quiescentibus, quam in particulis aqueis, forsan in adversam digiti mei partem motis? id vero refutatur ex ipsius Regulis motuum, secunda & quinta, invicem collatis; quoniam, juxta hanc, ad movendum corpus quiescens, sufficit, ut ab alio majori quantumvis tarde moto impellatur: ad movendum autem corpus in adversam antea partem motum, requiritur, juxta illam, ut impellens ad minimum æque velociter moveatur, atque corpus impulsum: unde manifeste colligitur, cæteris paribus majore cum facilitate loco propelli illa, quæ plane quiescunt, quam quæ in contrarium moventur. Et quamvis, cum fluidi particulæ promiscue in omnes partes ferantur, contingere possit, ut nonnullæ earum in eandem cum digito partem conspirantes, ei faci-

No. II.
liorem parent transitum; cogitandum tamen subinde, totidem vicissim esse alias, quæ in contrariam partem motæ digiti conatum tantundem impediunt, quantum reliquæ adjuvant; unde quantum ad hoc, digitus non majorem debet sentire, vel resistentiam, vel facilitatem in dividenda aqua, quam si omnes ejus particulæ prorsus quiescerent. CARTESIUS hanc difficultatem prævidens nobis persuadere vult, particulas jam actu motas propterea facilius cedere tactui, quam quiescentes, quod digitus illas impellens non novum iis imprimat motum, (id quod citra difficultatem fieri nequiret) sed hoc tantum præstet, ut determinetur ille motus, quem jam habent, in eam partem, versus quas fertur ipse digitus. Veruntamen quia magnus semper, uti dictum, particularum numerus in adversam digiti partem feruntur; cogitur statuere *Philosophus*, facilius esse, ut digitus corpus ita sibi obvians determinet in contrariam partem, quam ut ad motum concitet aliud corpus omnino quiescens; sed, hac ratione, quid fiet de Regulis ejus secunda & quinta, quæ plus requirunt virium ad repellendum corpus in adversam partem motum, (sive hæc repulsio fiat per communicationem motus, sive per determinationem saltem) quam ad impellendum corpus quiescens? Quæ quidem invicem adeo manifeste pugnant, ut certissimus sim, CARTESIUM circa hanc materiam sibi ipsi nequaquam satisfecisse, si vel minimum attenderit ad ea, quæ ipsemet stabilivit.

Atque ut palpabili exemplo manifestum fiat, causam facilitatis aut difficultatis, quam sentimus in separandis his vel illis corporibus, non esse motum quietemve partium; consideremus arenæ quendam acervum, qui cum non difficulter cedat tactui, Liquidi quodammodo speciem præ se fert; quamvis ejus grana, nec circa propria centra volvantur, nec motum ullum circularem obeant, qualem *Philosophus* ad constituendam Liquidi naturam ibidem requirit; sed singula juxta se perfecte quiescant: notemusque, hanc arenam firmi corporis naturam tum demum induere, cum mediante frigore, vel cæmento, vel alio quovis modo plura ejus grana in unam massam coaluerint.

Vera

Vera ergo ratio, quare Liquidorum partes facile cedant tactui, hæc est; quod cum singulæ a singulis per intervallula separatæ sint, illæ duntaxat impellantur, quas tangis, quæque, materia subtili ex intervallis expulsa, locum facile invenire possunt, quo se recipiant. Quod vero Durorum partes tactui resistant, inde est, quoniam sibi mutuo immediate connexæ cum sint, loco dimoveri sola nulla potest, quin uno sensu, aut penetrentur reliquæ, aut impellantur omnes: vel alio sensu, si una separanda sit ab altera, superetur illa vis, qua connectuntur: unde facilius est, integrum corpus durum movere, quam partium ejus situm inter se mutare; quod adeo verum est, ut in ipsis quoque liquidis, quæ tanta facilitate dividere putamus, non tam partem a parte separemus, quam plura integra corpuscula dura solidave impellamus; talia enim necessario concipi debent minimæ liquorum particulæ, ubi singulæ per se solæ spectantur. No. II.

Pariter intellectu non difficile est ex hypothesi nostra, quare clavus ferreus, aut aliud corpus valde durum, sola manuum nostrarum vi frangi nequeat: Ut enim duæ corporis duri partes ab invicem separentur, requiritur, ut vis illa connexionis, quæ omnibus ejus particulis in transversum sitis accedit a totidem columnulis aerio-æthereis, superetur ab alia vi majore: cum ergo manuum vis illa sit inferior, non mirum, quod solæ manus frangendo clavo impares sint. Sed quare, inquis, nullo labore rumpitur bacillus ligneus, cujus partes a columnis æthereis non minus premuntur, arcteque conglutinantur, quam partes clavi? Respondeo, quia in ligno, ceu corpore valde poroso, non tot superficieculæ separandæ, atque in ferro: unde vis, quæ par est separandis ligni particulis, non confestim ferro frangendo sufficiens est. Adde, quod possunt dari gradus Firmitatis in cohæsione particularum hujus vel illius corporis; aliis arcte sibi junctis, aliis non nisi leviter cohærentibus & semiapertis, sic ut minima vis aeri primo subtiliori, dein crassiori ingressum parare possit: separatio enim partium ut sequatur, sufficit, ut apertura fiat inter juncturas particularum, per quas irruere possit aer,

Quare manus lignum frangere possit, non ferrum? Conf. sup. pag. 69.

 atque

No. II. atque pressione sua irritam reddere vim, qua partes ab aliis antea columnis comprimebantur: hinc est, quod ense, securi, vel alterius ferri acumine, longe facilius finditur lignum, quam si malleo, etsi multo majoribus adhibitis viribus, idem tentes; utpote qui ob figuram suam obtusam hebetemque ad penetrandas particularum commissuras minus aptus est.

Cur manus facile clavum attrahat, ægre frangat? Conf. supr. p. 70.

Supra jam indigitavimus, CARTESIUM difficulter per quietem suam explicaturum, unde fiat, quod manus nullo labore attrahat clavum, ægre eundem frangat seu inflectat: cum enim, & per attractionem, & per inflexionem, hæc clavi pars, quam manu constringo, disponatur ad deserendam alteram sibi adhærentem; cur non hæc altera quiete sua utrobique æquali nisu vim manus cohibet, & sicut inflexionem, ita attractionem studet impedire? Videbor quidem multis haud dubie nodum in scirpo quærere, scrupulosque fingere, ubi plana est via: quid enim, inquient, evidentius, quam ideo nullam in attrahendo sentiri difficultatem, quia nihil est, quod impedit, quo minus altera clavi pars manui obsecundet, partemque attractam libere insequatur ad separationem mutuam præcavendam? Verum si Cartesiani animo non præoccupato rem perpendant, animadvertent, ex suis placitis non adeo dictu facile esse, quid alteri huic parti vires insequendi tribuat: si dicant, nullis opus esse viribus ad quiescendum in vicinia alterius; respondeo, viribus tamen opus esse ad mutandum locum respectu aeris ambientis: si regerant, per attractionem nullum accedere motum novum parti insequenti, nec ipsius etiam aeris respectu; hujus enim respectu jam ante attractionem possedisse motum: esto, sed accedit saltem nova illius motus determinatio; unde vero hæc determinatio? non profecto ab ipsa parte clavi manum insequente; uti enim omnis motus, sic omnis ejus determinatio aliunde est; nec aeri ambienti ullæ ab iis hic conceduntur partes. Ergo ipsi manui attrahenti ascribenda hæc determinatio: explicent vero illi, qui non nisi clara proferunt, qua occulta virtute manus determinare queat motum partis hujus, citra immediatum ejus contactum. Sed in hypothesi nostra res omni caret difficultate: Elevo e terra

terra baculum, resistit elevanti columna ætheris, huic quam contrecto extremitati incumbens; sed & alia est columna, quæ oppositam post manum extremitatem propellendo, tantundem fere conatum manus meæ adjuvat, quantum altera columna impedit; atque ita omnem, quæ absque hac propulsione sentiretur, difficultatem tollit, excepta tantum illa, quæ a proprio pondere baculi, minuente in tantum vires columnæ manum adjuvantis, procedere potest. Iterum, arrepto utraque manu clavo, inflectere illum, partemque a parte separare nitor: quid contingit? sunt columnæ, quæ extremitatibus imminentes, oppositis suis viribus utramque clavi partem comprimunt, manibusque separaturis omni nisu reluctantur; & quia propter immediatum partium contactum nulla sese potest inter illas intrudere columna, quæ faveat earum separationi, unam pellendo in hanc, alteram in illam partem; hinc ille conatus sæpe irritus, & difficultas, quam experimur in inflectendis vel frangendis corporibus valde duris. No. II.

Cur lignum uno sensu facile, alio difficillime rumpatur? Conf. supr. pag. 70. Fig. 11.

Et quamvis difficultas ista in ligno tanta non sit, quin baculus ligneus inflecti & rumpi certo sensu facile possit; conatu nimirum frangendi facto juxta lineam *a b*, perpendicularem baculo *d e*; eadem tamen difficultas alio sensu humanis viribus omnino fit insuperabilis, conatu adhibito in directum juxta lineam *e f*, Quod ob eandem rationem fieri puto, ob quam duo marmora complanata sibi imposita facile quidem separantur, cum juxta superficierum suarum mutuum contactum ita trahuntur, ut unum quasi repere videatur super altero; difficulter vero, ubi alterutrum in directum ab alterius superficie avellere tentaveris. Causa utrobique hæc est, quod pressio columnæ incumbentis marmori, extremitative baculi (scilicet columnæ *f e*, qua cohæsio partium baculi efficitur) non opponitur directe motui ad latus, ex *a* in *b*, sed motui duntaxat illi, qui fit ex imo sursum, ex *e* in *f*, unde multo efficacius conatui frangendi secundum hanc, quam secundum illam lineam adhibito resistat, necesse est. Observandum autem, quamvis alia sit columna *b a*, quæ latus baculi premens directe etiam opponitur conatui meo ex *a* in *b*,

No. II. non tamen hanc esse, quæ mediocrem, quam sentio, difficultatem efficit; quandoquidem omnem ejus resistentiam, quæ ex adverso est columna *c a* contrariis viribus abolet, conatumque meum tantundem juvat, atque impedit altera *a b*. Omnis ergo difficultas, quam persentisco in separanda quoquomodo parte baculi *a e* a parte *a d*, (quam suppono forcipe vel unco firmatam) proficiscitur a columna *f e*; quæ cum nullam habeat e regione aliam columnam oppositam, quæ pellendo partem *a e* versus *f*, suas vires destruat, semper conatui frangendi necessario resistit, licet nonnunquam fortius, nonnunquam debilius, prout ejus pressio, nunc magis, nunc minus directe conatui nostro opponitur.

Quomodo pressiones columnarum nos juvent, impediantve impulsione corporum?

Atque ut distinctissime omnibus satisfaciamus scrupulis, qui ex non plene intellectis Mechanices Staticesve legibus, circa hanc materiam, suboriri cui poterunt; supponamus, in corpore quantumvis magno nullas per se vires esse ad resistendum; omnia autem corpora, in singulis suis superficiebus ambientibus seu hedris, premi a totidem columnis aerio-æthereis; videamusque, quo pacto diversæ hæ pressiones nos juvent, impediantve in iis impellendis.

Nova quædam Mechanicæ principia. Fig. 22.

Hunc in finem consideremus cubum A, quiescentem in plano horizontali *f g*, expositumque pressioni quatuor columnarum B, C, D, E, in quatuor hedris *b*, *c*, *d*, *e*; hac tamen cum differentia, ut columnæ quidem D & C in opposita latera cubi *d*, *c*, æquali impetu arietent, columna vero B, quæ summæ superficiei incumbit, cubum tantillo efficacius deorsum premat, quam eundem sursum impellit columna E basin cubi suffulciens; propterea quod ipsum cubi pondus aliquas vires addit illi, dum huic easdem aufert.

Quid fiat, ubi corpus elevatur perpendiculariter?

I. Elevanti e terra perpendiculariter cubum, resistit columna B, favet columna E, & quia magis impeditur, quam adjuvatur, sentiet difficultatem respondentem excessui virium, quo prior columna superat alteram, scil. tantam, quanta proficisci potest a proprio cubi pondere.

Cur majus corpus

II. Cubo existente majore vel minore, augebitur vel minuetur

tur elevantis difficultas; non quod pro ratione molis major vel minor sit resistentia, sed quod pro ratione tum crassitiei columnarum B, & E, tum ponderis ipsius cubi, augetur vel minuitur excessus virium, quo illa superat hanc.

No. II. majorem pariat elevanti difficultatem?

III. Impulsa hedra laterali dextra *c*, debet sentiri aliqua difficultas, non quidem proficiscens a columna D, premente hedram lateralem oppositam *d*, (hanc enim manus impellens, æquali robore columnæ C armata, facile eludit) sed ab ipsa columna perpendiculari B, quæ cum fortius affigat humi cubum, quam eundem humo sublevat columna E, consequens est, ut cubus non sine aliquo labore possit revelli a parte superficiei *e*, cui incumbit; isteque labor, ob eandem rationem §. 2. citatam, cum majore, vel minore cubi mole, crescere minuive debet; sed nunquam tantus erit, quantus proficisci posset a toto cubi pondere; propterea quia columna B, motui in transversum, ex *c* in *d*, non diametraliter & secundum totum excessum virium supra columnam E reluctatur.

Cur corpus facilius ad latus impellatur, quam elevetur sursum?

IV. Si basis cubi & superficies plani, in quo quiescit, ita sint lævigatæ, ut propius coeuntes omnem excludant aerem atmosphæricum, admissa tantum inter commissuras suas materia subtili; tum elevando ad perpendiculum cubo eæ impendendæ vires, quæ præter pondus ipsius cubi superare valeant integrum pondus columnæ alicujus atmosphæricæ, pro basi habentis summam cubi superficiem: isto enim superpondio columna aerio-ætherea B columnam pure æthercam E excedit. Hinc, quo amplior cubi superficies, eo difficilior ejus elevatio; quia crassior tum columna atmosphærica, cui succumbit. Quæ requiruntur autem vires ad propellendum cubum lateraliter, non adeo magnæ sint oportet; quoniam columna perpendicularis B, motui laterali, ex *c* in *d*, non valde insigniter resistit.

Quid fiat, ubi duo corpora complanata sunt revellenda?

V. Si basis cubi & superficies plani, cui insistit, ita arcte sese excipiant, ut omnem quoque materiæ subtili columnæ E præcludant aditum, tum avulsio cubi erit molitionis difficillimæ, imo elevatio ejus perpendicularis humanis viribus omnino impossibilis: propterea quia columna B, jam nihil habens e regione,

No. II. gione; quod vires suas vel ex toto vel ex parte retundat, toto suæ pressionis nisu cubum humi affigit.

Quare corpus angulosum difficilius moveatur sphærico?

VI. Quo plura (pauciora) sunt puncta, in quibus cubi basis subjectum planum immediate contingit, eo cæteris paribus difficilior (facilior) cubi avulsio: quia contactus immediatus eorum in pluribus aut paucioribus punctis, intercipit majorem minoremve partem virium columnæ E sublevantis cubum, & facilitantis ejus separationem. Hinc est, quod sphæra in plano longe facilius ad motum concitatur, quam ejusdem molis cubus, aut corpus aliud hedris planis vestitum: vix enim fieri potest, ut tale corpus subjectum planum non immediate tangat in aliqua superficiei basis suæ parte, atque tantundem columnæ E excludat; cum contra sphæra, unico in puncto planum contingens, in tota reliqua superficie circumcirca accessum præbeat columnæ E, cujus impulsu, contra detrusionem oppositæ columnæ B, suffulciri & muniri potest. Videtur tamen adhuc alia & quidem præcipua subesse ratio, quare sphæra in plano facilius impellatur corpore anguloso; scilicet quia sphæra, in convolutione sua super plano, semper servat æquilibrium, non pronior in hanc partem, quæ a manu impellitur, quam in aliam; dum corpus angulosum non potest circa unum suorum laterum, tanquam circa axem, volvi, quin, ad primum manus impetum, æquilibrium suum amittat, atque præponderet in partem a manu impulsam; unde præter vires reliquas continuo opus est conatu ad impediendum, ne corpus angulosum relabatur. Addi quoque istis posset, quod sphæra, motu suæ convolutionis in plano, tantum fertur a latere ad latus, inter duo plana horizonti parallela; quoniam supremum superficiei sphæricæ punctum uno momento, non altius quam alio, supra planum horizontale eminet: motus vero cubi circa unum suorum laterum, tanquam circa axem voluti, non mere fit a latere ad latus, sed etiam ex imo sursum; quoniam latus oppositum a plano horizontali subinde altius assurgit: Jam vero, columna cubo perpendiculariter imminens motui sursum longe

longe insignius resistit, quam motui ad latus; unde multo major difficultas comitari debet cubi, quam sphæræ impulsionem. No. II.

VII. Corpus quodcunque, si concipiatur aeri undique expositum, omnique pondere suo exutum, minima vi in quamcunque partem impelli poterit: cum enim hoc pacto, columnæ omnes, quibus ambitur corpus, ad æquilibrium quasi sint redactæ, sic ut nulla altera fortius premat; sequitur, si minima vis accedat uni columnarum, hanc prævalituram alteri sibi oppositæ, atque ita corpus propulsuram. Hinc est, quod pila eburnea, e filo perpendiculariter suspensa, atque ita quodammodo gravitate sua privata, ab alia multo minore ad motum concitatur. Hinc etiam, quod navis, in aquis quiescens, solius manus impulsui obtemperat. Hinc iterum est, quod bilanx, in æquilibrio constituta, licet multis onerata centumpondiis, minimo tamen impulsu quaquaversum moveri potest. Huc facit illud stupendæ molis saxum (quod, si bene memini, Lugduni Gallorum ostenditur) ita libratum, ut unius digiti impulsu motum & agitationem concipiat. Omnia enim hæc corpora gravitate sua quasi orbata sunt, dum columnæ, quæ premunt summam & imam eorum superficiem, ad æqualitatem virium redactæ sunt; in nave quidem ope aquæ lateralis, quæ fundum navis sublevans, ejus descendendi conatum oppositis viribus abolet; in bilance vero & saxo, utralibet lanx vel saxi medietas alterius lancis vel saxi medietatis pondus contrario pondere destruit. Nullo ergo hæc corpora impelli debent negotio: sed tamen navis impulsu duntaxat laterali, non perpendiculari; quia non posset vel tantillo profundius demergi, quin altior fieret columna aquæ lateralis, atque ita navi præponderans, turbaret columnarum æquilibrium: in saxo vero & bilance, res indifferens est, & eadem facilitate in quamcunque partem impelluntur. Cur corpora æquilibrata moveantur facillime?

Illud tamen præcipue hic observatu dignum est, quod animadvertere solemus, istam facilitatem in impellendis tam vastæ molis corporibus, licet æquilibratis, tantam non esse, quanta sentitur in minorum corporum impulsione: persuadebit autem forte sibi aliquis, id fieri non posse, nisi corpus per se aliquas ha- Cur tamen minus facilius majori?

No. II. haberet resistendi vires, easque, pro diversa molis quantitate; nunc majores, nunc minores. Verum ut aliam reddamus discriminis hujus in impellendis diversæ molis corporibus rationem, nullas statuendo in ipsis corporibus resistendi vires; supponamus, eandem semper in Universo conservari motus quantitatem, & proinde corpus impellens tantam motus sui perdere debere partem, quantam communicaverit corpori impulso; communicare vero debere partem talem, ut ambo corpora post impulsum æquali celeritate ferantur, (quamvis harum regularum, præcise & in rigore sumtarum, veritatem nunc non examino:) suppositis autem istis, ratio discriminis est manifesta. Impellat digitus corpus aliquod 999ies se majus; transferet ergo illi, juxta regulam, $\frac{999}{1000}$ partes sui motus, millesima tantum parte pro se retenta; quia illi nongenti nonaginta novem gradus motus corpus, toties digito majus, non celerius movent, quam residuus in digito gradus movet ipsum digitum. Sed digitus amissis 999 motus sui partibus, non poterit amplius ea celeritate ferri, qua ferebatur antea; & si, exempli causa, emensus est in aere uno pulsu arteriæ unam perticam, post impulsum corporis 999ies se majoris, eodem tempore millesimam tantum perticæ partem perrepet; atque ita, quo majus est impulsum corpus, eo majus quoque debet esse decrementum motus in digito, & consequenter incrementum tarditatis ejus. Hinc igitur est, quod inter duo corpora, licet æquilibrata, illud promotius & liberius moveri possit, quod minus est; ægrius vero & lentius, quod majus. Sed tædet me prolixitatis, quia spero attentum Lectorem, intellectis nostris hypothesibus, omnibus aliis circa hanc materiam oborientibus dubiis non difficulter satisfacturum.

Examen aliquot Experimentorum juxta Doctrinam de Gravitate ætheris.

Antequam tamen vela contrahamus, consultum erit, ut examinemus postliminio insigniora quædam experimenta, quæ vel ad confirmationem nostræ de ætheris gravitate doctrinæ facere, vel per eandem explicari commode poterunt; cum eorum alias solutio, illa ignorata aut insuper habita, vel obscura, vel difficilis, vel insufficiens merito habenda sit.

De Tubo inverso

Illud quidem in rem meam vertere hic nolo, quod Exc. BOY-

BOYLIO alio fine objecit LINUS, *Tract. de corporum inseparabilitate, pag. 124. coll. cum pag. 31*, de inverso scilicet Tubo, digito tam pertinaciter adhærente, ut ipse, cum incluso toto 29½ digitorum argento, ac notabili præterea pondere adjuncto, possit sublevari, atque in aere pendulus a digito teneri: ubi dictus Auctor sibi persuadet, longe majus pondus hac ratione suspendi, quam externus aer atmosphæricus per suam gravitatem sustentare possit. Quod quidem si verum esset, nescio, annon potiori jure ætheris inde gravitatem elicerem, quam LINUS fabricatur funiculum suum. Sed, ut fatear quod res est, non existimandum, cylindrum atmosphæricum, quo sustentatur aggregatum ex vitro, pondere & mercurio, esse solum illum, qui respondet in latitudine cylindro mercuriali incluso; isto enim tanto crassior est concipiendus, quanto vitri crassities latitudinem cylindri mercurialis auxerit. Et quia vitrum mercurio in specie longe levius, nil mirum, si iste cylindri atmosphærici excessus, qui crassitie sua respondet crassitiei vitri, sufficiens sit sustentando tubo 29½ digitis multo altiori, & notabili præterea ponderi. Quamvis interim non dubitandum sit, si pulpa digiti supremo tubi margini ita firmiter adaptari posset, ut materia subtili, vel omni, vel pleraque expulsa, digitus vitri marginem in tota illius superficie, aut magna saltem ejus parte, immediate contingeret, quod tum haud dubie longe majus a digito sublevandum foret pondus, quam a solo cylindro atmosphærico, aggregato vitri & mercurii respondente, sustentari posset. No. II. digito adhærente.

Primum autem, quod favere nostræ videtur doctrinæ, experimentum est illud de duobus marmoribus, quæ si exacte polita seu complanata sint, sibique superimposita, adeo pertinaciter sibi mutuo cohærere solent, ut (quantum e Tentamine Boyliano colligere possum) a pondere etiam multo majori, quam est similis columnæ atmosphæricæ pondus, divelli quandoque nequiverint. Narrat Illustris BOYLIUS *in Tractatu contra LINUM ad experim. 31*, sibi marmorum fuisse par, quorum superius elevaverit inferius, gravatum aliquando plusquam 430 unciis; (confer *Historiam Firmitatis* §. 16.) idemque marmor inferius, I. Experim. de duobus marmoribus in aere cohærentibus.

No. II. ferius, tum recipienti inclusum, una cum quatuor unciis sibi appensis, non omnino exæquasse pondus similis cylindri mercurialis longitudinis unius digiti. Quamvis autem ad calculum rite ineundum optandum foret, ut Auctor adjecisset pondus exactum; ita tamen conjecturare nobis licebit: Pondus marmoris inferioris duas vix excedere potuit uncias, adjice illis quatuor uncias appensas; eritque aggregatum lapidis & appensi ponderis sex unciarum, quæ non omnino exæquare debent pondus similis cylindri mercurialis altitudinis pollicaris: ponamus autem, majoris evidentiæ gratia, illas semipollicari tantum mercurii cylindro æquiponderare; unde pollicaris mercurii cylindrus deprimet uncias 12, cylindrusque mercurialis integer $29\frac{1}{2}$ digitorum, sive ei similis cylindrus atmosphæricus æquiponderabit unciis tantum 354; quare 430 unciæ marmori appensæ longe majus sunt pondus, quam quod sola atmosphæra sustentare potuisset: & cum nequeat concipi, qua ratione istud superpondium 76 unciarum a lapsu aliter præservari potuerit, præterquam ab aliqua materia ambiente; jure concludimus, hunc fuisse gravitatis ipsius ætheris seu materiæ subtilis effectum.

II. Experim. de duobus marmoribus in evacuato recipienti cohærentibus.

Alterum experimentum nobis suppeditabunt eadem duo marmora, inclusa nunc recipienti. Vid. Experim. 31, *Libri de novis experimentis*, ejusdemque defensionem in *Tractatu contra* LINUM. Postquam Celeb. Auctor professus esset, causam cohæsionis marmorum in aere non aliam esse, quam quod inferior lapis sustentaretur ab aeris, seu gravitate, seu elaterio; recte conclusit, si fieret ergo experimentum in occluso recipienti, fore ut, ejecta maxima per exhaustionem quantitate aeris & debilitato ejus elaterio, inferior lapis necessario delaberetur. Sed re tentata, spem frustravit eventus: nam suspensa ibidem hæc duo marmora tam firmiter cohæsere, ut nulla aeris exhaustione inferius a superiori revelli potuerit, licet ad hoc efficiendum lapidi inferiori quatuor unciarum pondus fuerit appensum. Quo sane experimento ætheris seu materiæ subtilis pressio clarissime evincitur: quid enim, aere exhausto atque excluso, connectet, quæso, marmora, nisi materiæ subtilis, cui soli per poros vitri patet

patet accessus, ad marmora appulsio? Non sine causa quidem Exc. BOYLIUS (qui aliam, quam aeris atmosphærici gravitatem hactenus videtur vel ignorasse, vel saltem non agnovisse) aliam potius commodam responsionem amplectendam sibi duxit, ut satisfaceret phænomeno, quam sententiam suam tam leviter deserendam. Primo itaque confugit ad imperfectionem recipientis, qua fieri potuerit, ut per minimam fissuram in eo latitantem aer externus irrumperet: postmodum vero, in vindicatione sua contra LINUM, aliam, cui præcipue insistit, responsionem adjicit, putatque, aerem illum, qui post exhaustionem necessario semper in recipiente relinquitur, licet ejus elaterium per magnam expansionem admodum fuerit debilitatum, sufficientem tamen adhuc fuisse sustentando tantillo ponderi, quale est exiguum marmor cum 4 unciis. No. II.

Quicquid sit de conjectura ista Cl. Viri; illud certum est, per paucissimas emboli depressiones aerem mirum in modum rarefieri posse, ejusque vires debilitari, præsertim ubi scapus amplior, recipiensque angustius fuerit. Imo non tantum conjecturare, ad quantum rarefactionis gradum aer singulis depressionibus reducatur, sed & scientifice illud nosse licebit, comparatis invicem scapi & recipientis cavitatibus: nam si scapus fuerit duplo recipiente amplior; post primam emboli depressionem, aer triplo fiet rarior, quia per scapum atque recipiens æqualiter se expandens, triplo majorem quam antea occupabit locum; post secundam emboli detrusionem, nuncuplo; post tertiam, 27plo; post quartam, 81plo. Adeo ut si supponamus, scapi ad recipientis cavitatem, in Antlia Boyliana, in dicta ratione dupla se habuisse; sequeretur, post quartam jam emboli detrusionem aerem eousque fuisse distentum, ut, vel ex ipsa Cl. BOYLII hypothesi, non amplius par esse potuerit sustentando marmori cum 4 unciarum pondere: quamvis enim hoc aggregatum, referente illo, non superarit tricesimam partem ponderis similis cylindri mercurialis $29\frac{1}{2}$ digitorum, imo etiamsi ne sexagesimam partem superasset; tale tamen fuisset ejus pondus, quod aer, plusquam sexagecuplo aere naturali rarior, sustentare non potuisset; eo

No. II. quod, juxta Boylianam pariter atque nostram hypothesin, pondera ab aere sustentabilia sint in ratione reciproca graduum rarefactionis illius.

Verum, quia non constat de amplitudine recipientis in dicto experimento Boyliano adhibiti, nec quousque aer ex illo exhaustus fuerit; frustra sane essem, si conjecturæ Cl. Viri plura reponerem. Medium tantum hic exponam, quo pacto idem experimentum effectui dandum sit, ut nullus a parte aeris suspicioni relinquatur locus. Aqua primum imple totum recipiens, ejusque claude orificium, imponendo operculum cum appensis marmoribus, illudque firmissime agglutinando, ne quid aeris irrepere possit: postmodum agitato embolo, exhaurito e recipiente aquam, usque dum emergant marmora, quæ antea sub illa delituerant; quo facto nulla, quæ marmora comprimat, in suprema recipientis parte, præter subtilem, remanebit materia. Aer enim, si quis inter exhauriendum ex aqua per bullulas emergit, tam exigui momenti est, si comparetur cum tota recipientis cavitate, per quam se expandit, ut per hanc immensam rarefactionem non possit non omnem sensibilem vim elasticam perdere: ut tamen hac ex parte eo tutior sis, poteris adhibere in experimentum aquam ab aere probe repurgatam. Sed ne ullum quoque periculum sit ab imperfectione recipientis; sume fistulam altera extremitate clausam, eamque aqua pariter impletam inverte, immergeque recipienti ante occlusum ejus orificium; tandem evacuetur maximam partem recipiens, usque dum aqua, uti dictum, subsederit infra marmora; quo facto, si aquam in fistula pariter descendisse observabis, adeo ut ejus superficies cum superficie aquæ extra fistulam, in eodem horizontali reperiatur plano; infallibili indicio concludes, nihil irrepsisse aeris, quod sustentare posset marmor; cum si, vel minimum irrepsisset, illud potiori jure aquam leviorem deberet in fistulam impellere. Ubi vero contigerit aliquando, ut superficies liquoris in fistula, altius hæreat superficie aquæ extra fistulam; continuabis tam diu exercere embolum, donec utraque sit in eadem proxime altitudine.

Ad-

Administrato sic rite experimento, conjicio, imo causæ meæ fiducia fretus audacter assevero, fore ut, omni licet aere manifeste hic excluso, marmora non secus cohærere pergant, atque tum, cum aere adhuc undique cincta erant, dummodo ita exquisite sint complanata, ut contactus eorum immediatus fiat, non in uno aut altero tantum puncto, sed quoad sat magnam superficierum partem. Eo vehementius autem hujus experimenti successum videre exopto, quo evidentius inde sequuturum prævideo infallibile argumentum Gravitatis ætheris: ubi nostra sententia hoc insuper, præ negativa, gaudet privilegio, quod utcunque sors tulerit, vel ceciderit eventus, nihil erit quo aperte refelli, sed multa quibus indubie astrui poterit: sive enim ceciderint marmora, suspicio erit, ea non exactissime fuisse complanata, nec proin sese immediate tetigisse; sin vero per momentum cohæserint, certissimum habebimus pressionis materiæ subtilis argumentum. Utque plene in hac sententia confirmemur, suspendamus in recipienti, loco duorum marmorum, simplex frustum metalli alicujus ponderosi; cum enim certum nobis sit & indubitatum, hujus metalli partes cohærere, non aliter ac marmora, vi pressionis fluidi externi ambientis; hinc facile experiemur, an pressio hæc proficiscatur a solo aere, an simul etiam a materia subtili: nam si a solo aere, post unam vel alteram emboli depressionem, metallum in frusta collabetur: hunc autem eventum quis expectet? No. II.

Tertium experimentum, quod crucem hactenus fixit Scriptoribus Hydrostaticorum, & cui ex principiis nostris lucem afferre tentabimus, nobis rursum suppeditatur ab Illustrissimo BOYLIO, in Libro ejus *de novis experimentis*, estque ordine decimum octavum, cujus summa hæc est: Collocavit Auctor, tempore hyemali, in quadam fenestra, tubum in quo ad consuetam usque stationem descenderat mercurius, factaque deinde, per aliquot hebdomadas, quotidiana observatione, deprehendit argentum, (licet aliquando languido motu imitaretur ascensum & descensum aquæ in thermoscopio, nempe ascendendo aliquantulum tempore frigido, & descendendo calidiori,) subinde tamen

III. Experim. de anomalia ascensus & descensus Barometri.

con-

No. II. contrarium plane fecisse, ita ut, frigidissima aura, notabiliter magis descenderet, quam alio tempore longe mitiori. Ad quod sane experimentum non possunt non obmutescere, quicunque aeris atmosphærici gravitatem unicam suspensionis liquorum causam profitentur: quid enim dicerent? esse forte aerem hyeme leviorem factum, hinc descendere mercurium: sed quare non semper, aura existente frigidiuscula, descenderet? si vero aer tempore hyemali gravior & densior fit, oportet ut mercurium tum altius impellat in tubum: cur ergo, frigidissimo tempore, subsidit humilius? Quem nodum ipse Cl. BOYLIUS, cum solvere non posset, secare maluit, atque occultis aeris mutationibus, cum apertis non liceret, hanc varietatem ascripsit. Notandumque, omnes jam Philosophos aeris Gravitatem & Levitatem non spectare, ut qualitates dependentes ab ejus Densitate vel Raritate; sed ut qualitates aliis principiis adhuc incognitis ortum debentes: unde rogati, quando aer sit gravissimus, respondebunt, non præcise tum, quando frigore maxime est condensatus, sed quando pluribus vaporibus & exhalationibus, (quarum magna subinde, nobis non animadvertentibus, e terra assurgat copia,) aer noster abundat, quando venti solito fortius aera commovent, & alia id genus. Hæc vero an ita se habeant, necne, non inquiro; illud tantum existimo, quod quamdiu ex notis philosophari possumus, ad ignotas & occultas aeris mutationes non sit recurrendum. Videntur autem talia quædam in hypothesi nostra occurrere vestigia, quibus ratio manifesta redditur irregularis istius ascensus & descensus mercurii in barometro: unde, repudiatis occultis aeris alterationibus, merito nostris tam diu acquiescimus hac de re cogitatis, donec vel experientia ea falsitatis convincat, vel quid melius adinveniatur.

Considerandum itaque primo, densitatem vel raritatem atmosphæræ nullam, vel exiguam mutationem inducere posse in ejus pondus: quantum enim ponderis incrementum ei accedit hyeme per densitatem, tantundem fere patitur decrementi ab ejus humilitate, & quanto æstate redditur a raritate levior, tanto vicissim, altitudine raritatem compensante, evadit ponderosior:

fior: perinde uti lana, vel ſpongia, compreſſa non plus ponderat, quam eadem diſtenta & dilatata, propterea quod eadem materiæ quantitas, ibi quidem ſub minori, hic ſub majori volumine continetur. No. II.

Ut aliquid tamen largiamur; ſupponamus, atmoſphæram tantillo ponderoſiorem reddi hyeme, quam æſtate; & nobis porro in memoriam revocemus, quæ ſuperius dicta ſunt de preſſione materiæ ſubtilis, quæ diverſimode diverſis anni tempeſtatibus afficiatur, atque æſtate vehementius agitetur & vibretur verſus Terram, quam hyeme; conſequenter fortius tum premat ſuper argento in vaſe, atque decrementum gravitatis atmoſphæricæ aliquo modo compenſet. Quamvis autem hæc materia ſubtilis, omni tempore tubum penetrans, non minus premere debere videatur ſuper mercurium in tubo ſuſpenſum, quam ſuper reſtagnantem in vaſculo; unde fieret, ut una preſſio alteram plane tolleret, & aboleret: cogitandum tamen, illam materiam ſubtilem, quæ incumbit argento reſtagnanti, ſubinde illud nonnihil fortius ſurſum impellere in tubum, quam materia, incumbens argento in tubo, illud deorſum premit; hancque differentiam majorem eſſe tempore calidiori, quando globuli tubum ingredientes, ob vehementiſſimam ſui agitationem ad ejus latera allidunt, multumque de ſuo motu perdunt, quam frigidiori, ubi propter motum languidiorem directius per vitri poros tendunt, & intra fere ac extra æqualibus viribus mercurium premunt. En ergo duo pugnantia principia, e quibus irregularis illa barometri mutatio ortum ſuum, me judice, habet. Tempore frigidiori, mercurius in tubum aſſurgere debebit altius, propter majus atmoſphæræ pondus; idem tamen etiam debebit ſubſidere humilius, quod materia ſubtilis directius intrans tubum, minus perdat de motu ſuo, adeoque fortius mercurium premat deorſum: utrum ergo aſſurgat vel ſubſidat, hoc dependet a ſola prævalentia alterutrius preſſionis; nempe tum aſcendet mercurius, quando incrementum ponderis atmoſphærici, (quo mercurius pellitur ſurſum,) ſuperat incrementum preſſionis materiæ ſubtilis in tubo (qua premitur argentum deorſum); & viciſſim tum deſcendet, cum

No. II. cum incrementum prius exceditur a posteriori; quod non nisi fit maximo ingruente frigore, ubi globuli directius, quam alio tempore tepidiori, tubum ingredientes, omnem fere suum motum & vim deprimendi retinent.

An eadem anomalia locum etiam habeat in Thermometro? Sed objicis, quare in Thermoscopio, * nunquam id observatur, ut tempore calidiori ascendat liquor, frigidiori descendat; cum materia subtilis eodem modo debeat affici penetrando istos tubos, quo afficitur penetrando tubos barometrorum. Resp. Imo etiam anomaliæ hæ deprehenduntur quandoque in thermometris: Hinc monet ROHOLTUS, *Tractat. Physica, part. prim. cap.* 23. §. 41, nos posse decipi, si ex sola inspectione thermometri vellemus semper judicare de calore aeris; posse enim fieri, ut accedente majori aeri gravitate, liquor impellatur in tubum altius, atque ita majus præsagiat frigus, quamvis interea idem possit in aere manere caloris gradus. Ita quoque mihi retulit Cl. VOLDERUS, sibi observatum aliquando fuisse circa duo thermoscopia, quorum unum utrinque sigillatum erat, alterum infima sua extremitate cum aere externo correspondebat, quod videlicet eodem die æstivo liquor in utroque thermoscopio ascenderet; notum autem est, solius thermoscopii utrinque sigillati genium esse, ut liquor in eo æstate ascendat, reliqui vero naturam esse, ut liquor in eo æstate deprimatur. Causam ergo anomaliæ istius adjecit hanc fuisse, quod gravitas aeris externi solito fuerit major, adeoque aeri superius incluso impedimento fuerit, ne per calorem sese dilatando, liquorem deprimeret. Secundum nos vero respondendum esset, ideo ascendisse liquorem, quia materia subtilis, solito concitatior, non potuerit tubum penetrare, citra magnum virium suarum in tubo decrementum; cum vero materia subtilis externa, omni sua agitatione, citra obstaculum, liquorem in tubum intruderet, interna vero non nisi languide deprimeret, non poterat non ad ascensum cogi liquor.

Cæterum etiamsi nullæ observarentur in thermometris ejusmodi irregularitates, id minime mirum nobis videri deberet; cum plane alia sit causa ascensus & descensus liquoris in thermometro, quam

* nimirum *Drebbeliano.*

quam mercurii in barometro: nec enim credendum est, quando in illo, tempore calidiori, spiritus vini descendit, id inde esse, quod pondus liquoris inclusi jam evaserit majus pondere atmosphæræ magnopere per calorem rarefactæ; cum quantumcunque rarefactus fuerit aer atmosphæricus, sufficiens tamen adhuc sit, non solum sustentando tantillo cylindro liquoris, sed illi etiam ad summitatem vitri intrudendo, nisi id impediret aer inclusus resistentia sua passiva. Immediata ergo descensus liquoris causa est, quod, rarefacto per æstatis calorem aere externo, internus, juxta leges elaterii superius statuminatas, subinde quoque dilatari debeat, donec cum externo eandem circiter acquirat laxitatem seu consistentiam; quod fieri nequit, nisi majorem occupando locum, liquorem deprimat: uti e converso, condensato hyeme aere externo, aer inclusus necessario quoque condensandus est ad eum usque densitatis gradum, qui resistendo par sit externæ pressioni; quod cum fieri nequeat, nisi minorem occupando locum, consequens est, ut liquor ab aere externo sursum trudi debeat in locum, quem deseruit aer inclusus, nequicquam obstante exiguo augmento virium, quod materiæ subtili forte accessit ad deprimendum liquorem, per liberiorem in tubum ingressum. Adde quod quamvis differentia pressionis materiæ subtilis impeditæ in tubo, & non impeditæ extra tubum, in mercurio alicujus sit momenti; illa tamen in spiritu vini minus debet esse sensibilis, ob amplitudinem pororum, qua fit ut pleraque materia subtilis perfluat, minima ejus parte in superficie liquoris premente. Quanquam autem hæ duæ rationes sufficientes forte esse possent abolendæ differentiæ pressionis materiæ subtilis, atque eximendo thermometra inde natæ irregularitati apparenti; est tamen tertia adhuc consideranda circumstantia, quæ vicissim hanc anomaliam maximopere iterum promovere videtur, videlicet insignis spiritus vini in thermometris adhiberi soliti levitas, respectu mercurii in barometris adhibiti; qua fit, ut minima variatio pressionis materiæ subtilis aliam & aliam, in liquore thermometri, altitudinem debeat conspicuam reddere; quæ interea differentia in liquore adeo ponde- No. II.

No. II. roso barometri omnino foret insensibilis. Sed de his plus quam satis.

IV. Experim. de duobus hemisphæriis evacuatis, firmissime sibi cohærentibus.

Ut denique manifestum fiat, quousque, in nostra hypothesi, progredi possimus in explicandis feliciter rerum causis; pro quarto & ultimo specimine examinabimus celebre Experimentum Consulis illius Magdeburgensis de duobus Hemisphæriis, quæ sibi invicem imposita, atque interjecta cera conglutinata, facili quidem negotio dirimuntur, dum aere adhuc plena sunt; sed, educto ex sua cavitate aere, tanta vi sibi invicem cohærere deprehenduntur, ut, pro varia eorundem latitudine, notabilis quantitas equorum, vel appensorum ponderum, requiratur ad ea avellenda.

Hujus phænomeni causa, ut melius percipiatur ex mente Auctorum, qui de illo scripsere; concipiamus superius hemisphærium ex unco suspensum, atque cavitatem hemisphæriorum primo aere vacuam; non difficulter quidem intelligemus, qua ratione inferius superiori debeat firmissime agglutinari; quandoquidem externa ejus superficies exposita est toti columnæ atmosphæricæ laterali, a qua sursum impellitur contra superius hemisphærium; dum interim interna superficies nulla pressione contraria afficitur, neque a columna imminente superiori hemisphærio, utpote cujus tota vis terminatur in illud hemisphærium, seu in uncum illud sustentant; neque ab aliqua materia intra sphæram, quæ, educto aere, nulla est nisi subtilis. Sed si porro aer hemisphæriis restituatur; quare adeo facile divelluntur a se mutuo? nunquid eandem omnino sustinet pressionem externa inferioris hemisphærii superficies, dum interior libera quoque manet a pressione columnæ perpendicularis? Ergo dum hæc pari modo se habent, ut antea, evidens quidem esse putabimus, avulsionis facilitatem proficisci a solo aere hemisphæriis incluso; id quod aliter fieri nequit, quam si concedatur, hunc aerem inclusum vim aeris externi, comprimentis hemisphæria, æquali vi & conatu reprimere, atque inferius hemisphærium tantundem deorsum trudere, quantum idem a columna laterali sursum impellitur: Huic enim consequens est, hoc in rerum statu, ad se-

pa-

parationem efficiendam nihil aliud requiri, quam ut parvula ea, quæ per ceram est, connexionis vis & efficacia, superetur vincaturve. No. II.

Veruntamen, præterquam quod non explicant, in quo consistat hæc in cera connectendi vis & efficacia; planum quoque facere deberent, quomodo concipienda sit ista tantilli aeris inclusi vis, quæ paria facere possit cum gravitate & mole immensa aeris externi; quod dum facere conantur, fateor me, qua sum ingenii tarditate, illorum mentem vel non satis assequi, vel sane ipsos valde obscuros, circa hanc rem, fovisse hactenus conceptus. Aliorum explicatio insufficiens.

Respondent enim aliqui, illam vim deprimendi hemisphærium proficisci ab aeris inclusi elaterio, quod æquipolleat gravitati totius atmosphæræ: Sed quid intelligunt obsecro per hoc elaterium? anne vim illam, quam habet aer inclusus, ad majus spatium sese dilatandi, atque ita repellendi a se hemisphærium? si sic; quid manifestius, quam sublatum iri hanc separandi hemisphæria facilitatem, non tantum evacuatis omnino hemisphæriis, sed substituto solummodo in aeris locum alio corpore, nulla tali sese dilatandi vi prædito? Agedum ergo, repleantur hemisphæria aqua, vel alio quodam liquore, quem omni elaterio destitutum esse in confesso est apud omnes: eritne qui dubitet illa, eadem adhuc prorsus facilitate, si non majore, avulsum iri? ego quidem nullus dubito.

Alii existimant, satis sese mentem suam explicuisse dicendo, aerem, ex arcta sui inter hemisphæria compressione, tantam nancisci vim; quia hæc sit naturæ lex, ut quo quid arctiori loco constrictum & constipatum est, eo intensiorem & violentiorem adhibeat erumpendi & enitendi conatum. Verum, confundunt isti perpetuo Inclusionem cum Compressione; quasi vero aer propterea evadat compressior, quia exigua ejus moles sphæræ huic inclusa est: equidem si major aeriarum particularum numerus sphæræ isti intrusus foret, quam solet contineri sub æquali spatio extra sphæram; tum non dubitarem, aerem inclusum compressum dicere: sed quia non major aeris quantitas huic ca-

No. II. vitati sphæricæ inclusa est, quam solet contineri sub æquali volumine sub dio (quod nemo, ut opinor, inficiabitur); nulla ratio est, cur hic aer inclusus externo aere compressior dicatur: perinde ut triginta homines in conclavi, cujus pavimenti area est triginta pedum quadratorum, non magis sese compressos sentiunt, quam sese sentirent in latissimo campo, in turba aliquot millenorum, quorum unusquisque non nisi unius pedis quadrati spatium occuparet. Sed etiamsi tandem concederetur, duplo, triplo plus aeris infartum esse sphæræ, quam possit contineri in æquali spatio sub dio; sequeretur, si vires premendi æstimandæ sint e gradibus compressionis, vires aeris inclusi ad summum viribus duplæ vel triplæ molis aereæ pares esse posse; tantum abesset, ut tantilla quantitas immensam atmosphæræ molem exæquaret. Imo, si rem quis examinet, putaret potius, externum aerem incluso compressiorem dici debere, quod ille undique sustineat pressionem totius atmosphæræ, a qua tamen alter lateribus sphæræ immunis redditur; ad minimum ea parte, qua contiguus est hemisphærio suspenso, utpote quod in se terminat omnem columnæ sibi incumbentis pressionem.

Nonnulli denique mentem suam ita explicant, ut putent, non necessum quidem esse, ut aer magis sit compressus intra, quam extra sphæram; sed sufficere, ut æqualis utrobique sit compressionis. Existimant enim, proprie loquendo, nullam partem aeris agere in sphæram, nisi quæ eam tangit proxime; hanc tamen eo agere efficacius, quo a mole incumbentis aeris validius comprimitur: unde sequatur, si parvula aeris quantitas aliunde, absque pondere incumbente, æque possit compressa reddi, atque reddi alias solet per hoc atmosphæræ pondus; hunc aerem, licet in minori copia, quia tamen æque compressus supponitur per inclusionem in sphæram, ac si omne totius atmosphæræ pondus sustineret, æquali vi acturum in ipsam sphæram. Verum, perpetua involutam adhuc sentio homonymia vocem Compressionis: Si enim hæc vox talem tantum in nobis formet conceptum, ut illa dici debeant æque, duplo, triplo compressiora, quorum æquales massæ, æquale, duplo, triplo minus

spa-

ſpatium occupant, (alium autem clarum conceptum hujus vocis No. II.
non habeo); tum falſiſſimum eſt, efficaciam alicujus corporis in aliud, quod immediate tangit, æſtimandam eſſe ex ſolo gradu compreſſionis illius, nulla habita ratione illius ponderis, quod ipſum adjuvat. Sume enim in manum libram ferri, ferroque ſuperimpone aliam libram plumbi: ſi ſolum ferrum, quod manum immediate ferit, in eam agere cenſendum eſſet; ſequeretur, per hanc plumbi impoſitionem jam duplo magis compreſſum iri ferrum, id eſt, ad duplo minus volumen redactum, quod manus jam duplo majorem preſſionem perſentiſcat; aut certe, ſi ferrum eandem ſervat extenſionis quantitatem, manum non majore preſſione nunc debere affici, quam afficiebatur antea, cum ſolum ferrum ei incumbebat. Nec tantum in duris, ſed & in liquidis ita concludere liceret, fore nimirum, ut pes cubicus aquæ duplo magis comprimatur per alium ſibi ſuperimpoſitum, quod jam duplo magis ponderet; vel certe, ut ambo pedes ſimul ſumti non plus ponderent uno ſolo, eo quod inferior pes per ſuperioris incumbentiam, fatentibus omnibus, ſenſibiliter non magis comprimatur; quorum tamen utrumque perabſurdum. Imo, ſi efficacia preſſionis alicujus corporis, non ex incumbente pondere æſtimanda ſit, ſed ex illius compreſſione tantum; ſequitur, ſi, loco aeris incluſi, hemiſphæria aqua impleantur (qui liquor aere multo denſior & compreſſior eſt, utpote multo majorem terreſtris materiæ copiam ſub æquali volumine complectens), hemiſphæria, a ſola aqua, longe majore violentia ſeparatum iri, quam ab aere ambiente connectuntur; qui effectus contrarius plane foret illius, qui, juxta illa quæ ſupra dicta ſunt, futurus eſſet, ſi res per elaterium conficeretur. Si vero tandem velint hi Auctores, gradus diverſos compreſſionis alicujus corporis non æſtimandos eſſe ex amplitudine majoris vel minoris ſpatii, quod ab illo occupatur; aliunde ſane æſtimari non poterunt, quam ex majori vel minori pondere illi incumbente; unde ſi quis exiſtimaret aerem, abſque ullo pondere incumbente, aliunde poſſe comprimi, ille plane contradictoria & ἀσύστατα conciperet.

In

No. II. In hoc denique omnes deceptos esse animadverto, quod solum aerem hemisphæriorum cavitati inclusum considerarint, tanquam unicam facilis divulsionis, uti ejus exhaustionem firmæ connexionis causam; quam tamen non nisi ut necessarium ejus antecedens, sive causam sine qua non, respicio; existimans, præcipuum utriusque phænomeni momentum situm esse in illo, quod contingit circa hemisphæriorum oras vel margines, quibus connexa sibi sunt, non circa cavitatem, qua jam separata sunt a se invicem.

Genuina Phænomeni causa evolvitur. *Fig.* 25. Ut ergo hujus experimenti genuinam causam distincte cognoscamus; considerabimus, quid in toto ejus decursu circa hemisphæria contingat. Sumuntur duo hemisphæria, aere primo plena, A & B, quorum superius ita imponitur inferiori, ut oris suis, seu marginibus, cera si vis illitis, sibi mutuo respondeant; ubi, qui vel leviter animum adverterit, facile perspiciet fieri plane non posse, ut ita arcte se excipiant, quin necessario magna copia aeris, latitudine limborum *a b*, circumcirca intercepta relinquatur. Quamvis enim hemisphæria postea manu validissime comprimantur; imo etiamsi, remota manu, tota cylindri atmosphærici C pressio in hemisphærium A jam sese reapse effundat; tota tamen hac pressione nequit effici ut, pauxillo illo aeris *a b* extruso, arctius coeant hemisphæria: quo enim concederet hæc aeris portio? extra, vel intra sphæram? sed illinc stipata est alia columna atmosphærica D, a qua non minori vi repellitur, quam extruditur a columna C; hinc vero impedita ab ipso aere sphæræ incluso A & B, qui cum sit æqualis consistentiæ cum exteriori, & suffultus lateribus hemisphæriorum, per resistentiam suam passivam totius columnæ C pressionem eludit, cavens hoc pacto ne, per ingressum hujus aeris, arctioremque hemisphæriorum conclusionem, ad majorem quam exterior densitatem redigi possit, juxta leges resistentiæ passivæ aeris initio stabilitas.

Jam vero hemisphæriorum commissuras cera probe supponamus obturatas, hemisphæriumque superius A, suspensum ex unco *c*; quid fiet? erit quidem columna lateralis E, quæ sursum im-

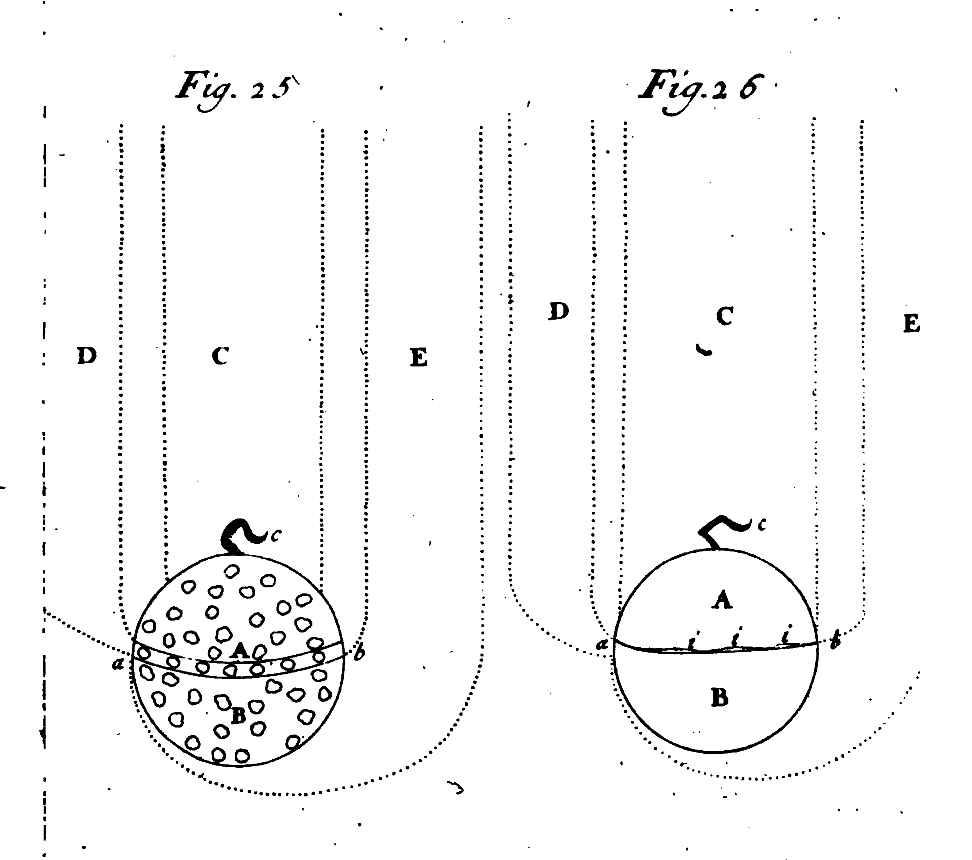
impellet hemisphærium B; sed portionem aeris interceptam inter juncturas *a b*, ob resistentiam ejus passivam, non magis expellere potis erit, quam antea columna C deprimens hemisphærium superius: interea tamen cohærebunt hemisphæria, eo quod, obstante cera, nihil sit quod deprimat inferius; quamvis enim aer columnæ D omni nisu sese intrudere conetur per poros ceræ, nihil tamen efficiet, quamdiu iidem pori ab æquivalente pressione columnæ E angustantur: interim evidens est, hoc in rerum statu, ad avellenda hemisphæria nihil aliud requiri, quam ut, appenso tantillo pondere inferiori hemisphærio, debilitetur pressio columnæ E; hoc enim facto, columna D, quæ jam alteri E prævalet, nullo negotio dilatabit ceræ poros, satis alias per se laxos, atque ita transitum per eos sibi parabit: ista autem perrupta macerie, statim acquirit communicationem cum aere intra sphæræ commissuras cavitatemque latitante, cum quo, junctis viribus, in inferius hemisphærium agit, illudque deprimit facile. Unde liquet, ejus avulsionem minime proficisci, ut vulgo creditur, ab aere cavitati sphæræ incluso, in quantum per se solus spectatur, sed quatenus tota atmosphæræ mole stipatus est. N.o II.

Fingamus jam, antlia applicata, evacuari e cavitate hemisphæriorum aerem; quid fiet? illæ particulæ aeris, quæ hactenus latitarant intra eorum commissuras, cum, ea parte qua cavitatem sphæræ respiciunt, a nulla jam suffultæ sint materia, non amplius resistendo erunt pressioni columnæ E; quare iis in cavitatem compulsis (in quam insuper vi elaterii sui sponte se expandunt, per regulam nostram nonam) propius coire hemisphæria, atque arctius sibi jungi necesse est; nulla, inter eorum commissuras *a b*, mediante amplius particula aeris: (ut videre licet in *fig.* 26.) quod & sensuum testimonio cuivis patere potest; quotiescunque e recipiente, aut alio vase, exhauritur aer, videmus ceram, inter partes vasis qua sibi committuntur, magna copia, extra oras veluti ebullire, atque partes vasis propius coire; uti solent, cum duo asseres, interjecto corpore aliquo molli, admodum valide comprimuntur; quod manifestum præ- Fig. 26.

No. II. bet indicium, latitasse aliquid antea inter partium vasis juncturas; quod earum arctiorem compressionem impediebat, siquidem columnæ aeriæ non minorem super partes vasis pressionem exercebant antea, quam postmodum cum evacuari cœptum est. Ex- Fig. 26. hausto itaque aere, superius hemisphærium ex unco *c* suspensum fingamus; erit columna E, quæ sursum premet hemisphærium inferius, & quia nulli alii columnæ patet accessus ad superficies interiores hemisphæriorum, ob immediatum eorum contactum; adeo valide sibi conglutinabuntur, ut ad ea divellenda tantum ponderis inferiori appendendum sit, quantum æquivaleat pressioni columnæ comprimentis E. Experientia autem constat, ad sexcentas vel septingentas libras ei citra lapsum appendi posse, diametro hemisphæriorum existente vix octo digitorum. Cæterum, quamvis isti ponderi sustentando sufficiens forte possit esse columna similis atmosphærica E, uti supputanti constabit; non tamen inferendum, ætheri in columna E contento nullas hic esse connectendi partes; sed hoc tantum, superficies limborum, seu marginum in hemisphæriis, nunquam adeo exquisite posse lævigari, quin in iis plurimæ hinc inde relinquantur asperitates & cavitates, quibus fiat, ut hemisphæria sibi imposita necessario plurimis dehiscant rimulis *i*, *i*, *i*; per quas dum aer crassior columnæ D irrumpere nequit, æther tamen illi permixtus facile irrepere, ætherisque pressionem in columna E irritam reddere possit. Ubi enim hæ rimulæ tolluntur, quod fiet, si vel ferruminentur hemisphæria, vel hermetice claudantur, id est, si loco utriusque hemisphærii fiat una sphæra cava, sine comparatione majora ferent pondera; quod nemo, ut opinor, inficiabitur.

Ex iis demum, quæ dicta sunt, liquet, evacuationem aeris e cavitate hemisphæriorum non esse proximam causam connexionis eorum; eandem tamen requiri, ut antecedens necessarium, ad eliciendas particulas aeris ex illorum commissuris, inter quas latuerant; inque hoc consistere præcipuum connexionis nervum: unde existimo, si post exhaustionem reintromittatur aer, satis valide cohæsura adhuc hemisphæria, si non tanta pertinacia quanta

te Ætheris Tab. III.



ta cohærerent omnino vacua, longe tamen majore, quam si nunquam evacuata fuissent; ea videlicet quæ effici potest a pressione cylindri atmosphærici excavati, cujus orbis latitudo respondet latitudini superficiei orbicularis, qua hemisphæria sibi connexa sunt: uti si plurima marmora complanata, quorum bina sibi imposita, in orbem ita disponantur, ut locus medius concedatur aeri; non minus sibi cohærebunt, quam si locus intermedius supponeretur omnino aere vacuus. No. II.

Quare in fistulis gracilioribus liquor internus semper sit nonnihil altior externo?

Antequam Dissertationi finem imponam, placet hic, quæ inter scribendum incidit, subnectere explicationem phænomeni alicujus hydrostatici; quod quamvis ab instituto nostro alienum, ob materiæ tamen affinitatem non difficulter hic tolerabit Lector; vel eo quoque nomine sibi gratum futurum, quod ejus solutio non facile occurrit apud Hydrostaticorum Scriptores, qui de eo differendi occasionem subinde declinare solent. Est autem tale: *Observatur in Fistulis gracilioribus utrinque patulis, unaque sua extremitate perpendiculariter sub aquam demersis, superficiem aquæ intra fistulam semper nonnihil altiorem esse ea, quæ est extra fistulam; deprehenditurque, hanc altitudinum differentiam cum fistula gracilitate augeri. Quæritur, quæ sit hujus rei ratio?* Nob. ROHOLTUS *Physic. Part. prim. cap.* 22. §. 85, conjicit, aeris particulas in tubis gracilioribus difficulter sese hinc inde convolvere & commovere (*détourner*), impeditasque non sat exercere posse virium ad deprimendum sufficienter liquorem. Sed commodum est, ita ex quolibet quidlibet struere, aerisque motum & agitationem pro lubitu intendere & remittere. Nuper, quo arctiori incarceratus erat aer loco, eo majores, juxta hunc Philosophum, exerere conveniebat vires ad detrudendum mercurium; nunc vero, dum gracili fistulæ inclusus est, sibi ipse debet esse impedimento; ibi in angustia vires assumpsit, hic propter angustiam vires perdit, languet, torpet: ubinam vero nunc aeris elater? an ærugine confectus? quidni domicilii sui angustia pertæsus intensius nunc furit, humiliusque deprimit aquam, ut nuper mercurium? Cæterum non opus etiam est, ut aeris particulæ in tubis gracilioribus libertatem habeant sese con-

No. II. volvendi in quascunque partes, ad deprimendam solummodo aquam; sufficit ut motum suum gravitatis, qui fit secundum lineam perpendicularem, servent illibatum, is autem motus in tubis etiam gracillimis non impeditur: Nulla ergo ROHOLTI responsio. Quæ aliorum sit de hoc Phænomeno sententia, nescio; meam pando.

Certum autem esse puto, rationem, cur summa superficies cujusque liquoris ad horizontem parallela sit, nullibi altior, nullibi depressior, hanc esse, quod in omnibus suis partibus a pondere incumbentis atmosphæræ prematur æqualiter; utpote quæ supponitur esse substantiæ homogeneæ quoad gravitatem, omnibusque dictæ superficiei partibus æquali ubique altitudine incumbere. Quotiescunque ergo contingit, ut una partium superficiei altera existat altior, humiliorve, statim cogitabimus, earum pressioni mutationem aliquam inductam esse; illamque majus sibi incumbens habere pondus, quæ depressior existit reliquis; minore vero pressione affici, quæ cæteris altior extat. Unde, quoniam subinde animadverti solet, liquorem intra fistulam nonnihil altiorem esse liquore extra fistulam; concludemus, alterutro in loco mutationem contigisse, pressionemque vel extra tubum adauctam, vel intra illum imminutam fuisse. Quoniam vero superficies aquæ externæ non videtur ullum pressionis augmentum pati posse ab interpositione fistulæ; relinquitur, ut omnis mutatio contingat circa eam superficiei partem, quæ fistulæ lateribus inclusa, partem pressionis amittere, atque onere allevata suo altius assurgere debet; quod sic concipio. Sit *abcd*, Fistula cylindrica immersa superficiei aquæ stagnantis *ed*, cui insistit alius præterea cylindrus similis atmosphæricus *efgh*. Fingamus autem, utriusque diametrum in se recipere certum numerum particularum aeriarum, v. g. septem, ita ut septem tales particulæ (quas sphæricas nunc esse suppono) in directum positæ exhauriant cylindrorum latitudinem; notabimusque, rarissimum esse contingens, si globuli isti ita sint dispositi, ut extremi præcise radant tubi latera, atque omnes septem sine obstaculo in ejus cavitatem admittantur (uti fit in serie globulorum *il*;) plerunque enim,

Fig. 27.

enim, imo ſemper continget, ut ſummi cylindrorum margines utrinque primum & octavum excipientes, non niſi ſex intermediis tranſitum præbeant. Quod & intelligendum de quavis alia aſſignabili ſerie globulorum, quorum perpetuo bini extremi in cylindrorum margines incidere ſubſumi debent. Hinc etenim fiet, ut totus ille globulorum orbis, qui circumferentiam ſupremi orificii fiſtulæ occupat, cum tota globulorum catena perpendiculariter ſibi imminente *a m*, *b n*, omnem ſuam preſſionem terminet in ſummitate laterum fiſtulæ, neque poſſit pertingere ad liquorem ſubjectum *q r*, qui proinde ea tantum preſſione afficitur, quæ proficiſci poteſt a cylindro aerio, diametrum *o p*, ſex duntaxat globulorum, obtinente. Aliter vero ſe res habet in cylindro aerio *e f g h*, extra fiſtulam aſſumto in alia quadam parte ſuperficiei ſtagnantis aquæ; ubi extremi globuli ab ejus lateribus *g e*, & *h f*, quæ pure ſunt imaginaria, non impediuntur, quin libere defluant, & tota ſua latitudine ſuper liquore ſubjecto gravitent. Cui conſequens eſt, ut liquor extra fiſtulam tanto majore preſſione afficiatur, quam qui intra fiſtulæ latera concluſus eſt, quanto numerus globulorum illi incumbentium excedit numerum globulorum ſuper hoc prementium: unde liquor, ab externa preſſione prævalente, ſemper nonnihil altius impellendus in tubum. Notabimus autem, hanc differentiam inſenſibilem eſſe debere in tubis laxioris diametri, propter extremam exiguitatem particularum aeriarum; & contra, quo ſtrictiores ſunt fiſtulæ, eo notabiliorem debere conſpici diverſitatem; eo quod portio aeris a marginibus tubi impedita, ad reliquam, cujus preſſio ſuper liquorem non impeditur, majorem habet rationem in anguſtioribus, quam in latioribus; id quod docebit calculus. Sit igitur primo cylindrus aerius externus, ſive fiſtula diametri (ut ita dicam) *ſeptemglobularis*, cylindruſque internus, dempto uno, qui a vitri margine intercipitur, æſtimetur *ſex globulorum* in diametro: capiet proinde illius baſis $38\frac{1}{2}$ hujus $28\frac{2}{7}$ globulos quadratos (ſit venia dicto;) totidem enim, non plures, recipiunt ob ſpatia triangularia inter globulos neceſſario relinquenda, quot reciperent quadrata, quorum ſingula la- No. II.

No. II. tera æqualia forent globuli diametro. Erit itaque differentia utriusque $10\frac{1}{14}$ globulorum, quos basis cylindri externi plus recipit, quam basis interni; adeo ut ille plusquam quarta sui parte fortius premat isto: Sit vero jam cylindrus externus, uti & fistula, duplo latior, nempe 14 globulorum; internus autem, uno globulo in diametro sua diminutus, 13 globulorum: illius basis area erit 154, hujus $132\frac{11}{14}$ differentia $21\frac{3}{14}$ globul. quadr. adeo ut pressio illius (quæ æstimatur ex numero globulorum) vix octava sui parte fortior nunc sit pressione hujus: unde patet, quod jam dictum fuit, differentiam pressionis, adeoque & altitudinis liquorum intra & extra fistulam, longe minorem debere esse in fistulis latioribus, majorem autem in strictioribus. Taceo nunc, quod ex eodem fundamento sequatur, cæteris paribus, liquores leviores gravioribus altius debere attolli, ea proportione, quæ est inter specificas ipsorum levitates. Cur vero argenti vivi superficies, in fistulis etiam gracillimis, non tantum non elevatior sit, sed & depressior superficie argenti extra fistulam, mox disquirendi dabitur occasio.

Vana spes motus perpetui. Prætereundum hic non est, multos fuisse, qui aquæ ascensum in gracilioribus fistulis observantes, sese vana spe lactarunt motus alicujus perpetui, ob non comprehensam veram phænomeni rationem. Videtur equidem, prima fronte, si fistula gracilior altitudinis tantillo minoris, quam est illa, ad quam aqua in fistula assurgere posset, aquæ sit immersa; tum aquam in illa ascensuram usque ad summum fistulæ orificium, ibique sese exoneraturam in vasculum, indeque reascensuram in fistulam, & sic motum perpetuum producturam. Sed qui phænomeni nostri causam perceperit, facile hujus conjecturæ vanitatem deteget: observabit enim, postquam aqua ad summum fistulæ orificium pervenerit, illam offendere globulos aerios margini fistulæ circumfusos, a quorum antea pressione immunis erat; atque ita nunc toti latitudini cylindri aerii expositam, tantundem ab illo repelli, & ab exitu e fistula coerceri debere, quantum a cylindro externo sursum impellitur, atque ad ascensum sollicitatur.

Diffi-

Difficultas interim non contemnenda sese offert circa allegatam phænomeni nostri rationem: Quamvis enim, sic cogitaret aliquis, cylindrus aerius *ghef*, secundum totam sui latitudinem, subjectum liquorem *ef* premat; ista tamen pressio non tota derivatur in tubum, sed quoad partem infringitur; quia globuli aquei *st* non poterunt ita accurate in tubum defluere, quin extremi illorum, *s* & *t*, marginibus tubi implicentur, eorumque proinde pressio ob eandem rationem inefficax reddatur, ob quam globulorum aeriorum, *a* & *b*, pressio intercepta fuit; quodque, de una serie globulorum aqueorum *st* hic dictum, pariter de omnibus aliis intelligendum. Videtur ergo, cum pressio desuper, & pressio ex imo sursum, parte aliqua incrustatæ & debilitatæ sint, nullam adhuc rationem esse, cur hæc illi prævaleat, liquoremque altius in tubum impellat. No. II. Fig. 27.

Cui objectioni ut satisfiat; ratio tantum adinvenienda est, quare pressio globulorum aqueorum ad tubum allidentium nullum debeat pati detrimentum. Ratio autem ista poterit esse, quod particulæ aqueæ sint volubiliores, flexibiliores, atque magis lubricæ ipsis particulis aeris; quo fiat, ut difficillime marginibus tubi detineantur, sed prompte intra ejus latera gliscant, atque ita totam tubi cavitatem pressione sua adimpleant: si contra aeris particulæ supponantur rigidiores, quæ non ita facile gliscere possint juxta fistulæ latera; evidens est, illarum summo tubi margini semel implicatarum pressionem perpetuo manere inefficacem. Possem quoque adjicere, particulas aqueas esse subtiliores & exiliores ipsis particulis aeriis; hinc fieri, ut quamvis duæ extremæ particulæ aqueæ, *s* & *t*, a margine fistulæ intercipiantur, non tanta pressionis ex imo sursum profectæ pars inefficax reddatur, quantam perdit pressio desuper, propter impeditas grossiores aeris particulas. Id vero neminem offendat, quod corpuscula aquea pono volubiliora & exiliora ipsis corpusculis aeriis; postquam Cl. BOYLIUS variis demonstravit experimentis, aquam penetrare poros & foramina, ipsi aeri omnino impervia, vid. *Experim.* 36. *Libri de nov. experim.*

In-

No. II. Cur vicissim in fistulis gracilioribus superficies mercurii semper depressior sit superficie ejus extra fistulam?

Intellectis istis, facile divinare licet rationem, quare superficies mercurii in fistulis gracilioribus sit vicissim semper depressior superficie ejus extra fistulas: nam cum contrariorum sit contraria ratio, sufficit supponere, particulas mercurii esse grossiores particulis aeris; hinc enim fiet, ut extremis, *s* & *t*, tubi margini implicatis, plus patiatur decrementi pressio mercurii ex imo sursum, quam pressio aeris desuper; unde ab hac prævalente necessario detrudetur humilius.

Fig. 28. Cur superficies aquæ in fistulis sit concava, mercurii convexa? Fig. 27. Fig. 28.

Evidens quoque ratio est, quare superficies aquæ, in fistula *qr*, debeat esse concava, id est, depressior in medio, altior circa latera; nimirum quia medium tantum hujus superficiei pressioni aeris desuper exponitur, dum latera ob impeditas in margine tubi aeris particulas ab hac pressione liberantur. Ob similem rationem superficies mercurii, in fistula *qr*, debebit esse convexa, id est, altior in medio, depressior circa latera; quoniam corpusculorum mercurialium *st* sola intermedia libere mercurium sursum premere possunt; dum extrema quælibet, a tubi margine impedita, nullam in illum pressionem exercent: hinc superficies *qr* necessario tumidior erit in medio, quam circa latera. Non nescio, alias adhuc dari solere horum phænomenorum rationes; sed fieri potest, ut una alteram non tam destruat, quam adjuvet.

Artificium mensurandi particulas aeris.

Magis autem forsan quis mirabitur, si artificium hic detexero, quo pacto particularum aeriarum magnitudo, juxta hypothesin nostram, investigari possit, ex cognita sola fistulæ latitudine, & altitudine inclusæ aquæ, qua supra aquam stagnantem eminet. Reperti sunt, qui muscis pedicas injecerunt, qui acari nervos fibrasve in numerato habere putant; sed elephantes sunt hæc animalcula, si comparentur cum corpusculis, quorum mensuram, quis credat, ad decempedam hic exhibere tentabimus. Si suppono in calculo omnimodam flexibilitatem particularum aquæ, qua pressio earum a margine inferioris orificii fistulæ nullatenus impediatur: si suppono item, a margine superioris orificii in quibuslibet fistulis unius præcise globuli aerii pressionem intercipi; fateor hæc incerta esse, sed talia, quæ a mente humana

humana sciri prorsus nequeunt; unde sufficit in hac incertitudine progredi, quousque licet, cæteraque cogitandum: No. II.

Esse aliquid prodire tenus, si non datur ultra.

Ponamus itaque pro *diametro fistulæ* . . . . a.

Pro *altitudine aquæ in fistula, supra superficiem aquæ restagnantis in vase* . . . . b.

Pro *altitudine similis cylindri aquei, æquiponderantis toti cylindro atmosphærico* . . . . c.

Pro *incognita diametro globuli aerii* . . . . x.

Erit, demto uno globulo, *diameter cylindri prementis super liquorem in fistula* . . . . $a - x$.

Area totius orificii fistulæ . . . . $\frac{11}{14} aa$.

Area basis cylindri prementis in fistula. $\frac{11}{14} aa - \frac{22}{14} ax + \frac{11}{14} xx$

Hac ab illa subducta, remanet pro *orbiculari illa portione aeris, cujus pressio per appulsum ad tubi latera inefficax reddita fuit* . . . . $\frac{22}{14} ax - \frac{11}{14} xx$

Jam, cum cylindrus totus atmosphæricus, respondens cylindro fistulæ, ad cylindrum illum orbicularem atmosphæricum inefficacem (pro quibus, quia sunt ejusdem altitudinis, eorum tantum bases assumemus) eandem debet habere rationem, quam habet cylindrus totus aqueus, ad parvum cylindrum aquæ in fistula suspensum, (pro quibus, ob similitudinem itidem, tantum altitudines assumimus) ut attendenti constabit, erit, Ut $\frac{11}{14} aa$ ad $\frac{22}{14} ax - \frac{11}{14} xx$ ita c ad b: & proportione reducta ad æqualitatem, $\frac{11}{14} aab = \frac{22}{14} axc - \frac{11}{14} xxc$, sive $aab = 2axc - xxc$, translatisque in alteram partem sub contrario signo quantitatibus xxc, & aab; erit $xxc = 2axc - aab$: factaque divisione per c, fiet $xx = 2ax - aab : c$ & $x = a - \sqrt{(aa - aab : c)}$ Unde regula talis:

Si parallelepipedum contentum sub quadrato diametri fistulæ, & altitudine aquæ in illa, dividatur per altitudinem integri cylindri aquei; quotiensque subtrahatur a quadrato diametri fistulæ; residui vero latus quadratum ab ipsa diametro fistulæ: indigitabit reliquum diametrum globuli unius aerii.

No. II. Magnitudo particulæ aeriæ.

Quare si pollice diviso in 100000 partes, seu scrupulos, orificium fistulæ in diametro supponatur continere octavam pollicis partem, id est, 12500 scrupulos; altitudo vero cylindri aquei in illa suspensi deprehensa fuerit dimidii pollicis, seu 50000 scrupul. altitudo vero integri cylindri aquei sit 33 pedum, i. e. pollicum 396, aut numero rotundo 400, sive scrupulorum 40000000, reperietur globuli aerei diameter quam proxime 8 scrupulorum, adeo ut constituat $\frac{1}{12500}$ partem unius digiti. Non omittendum mihi autem est, in calculo supponi, globulos immediate se tangere; sed quia verosimile est, particulas aerias omnes esse a se invicem discretas, interspersa magna adhuc inter illas copia materiæ subtilis; hinc credendum est, repertam illam magnitudinem non tam metiri diametrum unius globuli, quam vero distantiam a centro unius globuli ad centrum globuli proximi, in qua distantia etiam materia subtilior comprehensa; unde ipsæ aeris particulæ assignata distantia longe adhuc minores concipiendæ: quantæ autem præcise sint, cognoscemus, si rationem quantitatis aeris ad quantitatem materiæ subtilis compertam habeamus; recordor autem, nos illam jam in superioribus, occasione data, detexisse, deprehendisseque, inter duo quævis corpuscula aeria quatuor æquales materiæ subtilis portiones esse interjectas; unde, hac ratione, globulus aerius assignata magnitudine quinquies evadet minor, constituetque non nisi $\frac{1}{62500}$ pollicis unius partem.

Supra pag. 95.

Velim quoque observari, etiamsi particulæ aeriæ alterius forte supponantur figuræ, hac suppositione nihil detractum iri nostro calculo: si concipiantur enim per modum exiguorum cylindrorum, qui axiculis suis ad perpendiculum erectis ad fistulam appellant (qualis cylindrus depictus in *fig.* 27, lit. *u*,); tum quod modo dictum de globulis, nunc intelligendum tantum erit de crassitie cylindri, seu de distantia inter axiculos duorum proximorum cylindrorum. Et si cylindri isti quacunque inclinatione, imo transversis etiam axiculis fistulæ occurrant, (ut in *fig.* 29. & 30), salvum tamen manebit ex hypothesi nostra phænomenum, nempe aquam altius impulsum iri in strictioribus quam latioribus fistulis; eo quod multo majorem ta-

Fig. 27.

Fig. 29. & 30.

talium cylindrorum numerum respective ab illarum, quam harum lateribus intercipi necesse est. Repræsentent enim circuli duo A, & B, suprema orificia fistularum inæqualis diametri; applicentur in utroque circumcirca isti cylindri transversis suis axiculis *a b*, ita ut repræsentent chordas arcuum, quæ determinabunt limites, quousque cylindri aerii impune premere possunt; illorum enim tantum pressio efficax esse potest, qui intra figuram polygonam circulo mediantibus chordis inscriptam includuntur, dum illi, qui circuli segmentis intercepti sunt, lateribus fistularum incumbunt, atque inutiles redduntur; horum autem numerus longe major est in strictiore, quam ampliore fistula; quia multo majora segmenta abscinduntur in minori circulo per quascunque chordas, quam per æquales chordas in majori; quod vel ex oculari figurarum inspectione absque ulteriori calculo patescit. No. II.

Atque ista sunt, quæ impræsentiarum de instituto nostro dicta sufficiant: Examinavimus primo varias attractionis species; eas per pulsionem explicando, notavimus, in attractione baculi, connexionem partium illius non sufficienter explicari per uncinulos, vel quietem, sed recurrendum esse necessario ad pressionem alicujus materiæ externæ ambientis baculum; hinc parallelismum instituimus inter cohæsionem particularum duri corporis, & suspensionem liquorum in tubis, gravitatem aeris utriusque causam asserentes. Qua occasione, in prolixam excurrimus digressionem, exponendo quæ sit natura & causa gravitatis, quid aeris elaterium, quid ejus item resistentia passiva, atque utriusque leges statuminando, per quas experimentorum aeris gravitatem apparenter-impugnantium rationes reddere conati fuimus. Cum vero observaremus, aerem atmosphæricum non sufficiens habere pondus ad connectendas seu sustentandas partes longissimarum catenarum; exinde in cogitationem hanc incidimus, ætherem quoque ipsum sua præditum esse gravitate; quod paradoxum porro ex natura ipsius gravitatis fluere, atque per descensum aquæ in occluso recipiente manifeste demonstrari monuimus. Stabilita sic ætheris gravitate, plures enodavimus quæstiones; Recapitulatio.

No. II. paucisque regulis novæ cujusdam & absolutioris Mechanicæ fundamenta jecimus; tandemque fecimus periculum, hac nostra methodo & hypothesi, solvendi maxime insignia experimenta, quorum rationes hactenus non usque adeo in propatulo fuerunt.

Atque hanc Ætheris sive Gravitatem, sive Pressionem, sive arctam Compactionem aut Constipationem mavis, qua omni vacuo excluso partes ejus intime sibi junctæ hærent, incumbunt, & incumbendo premunt, existimo, non tantum Mechanicæ legibus optime convenire, sed & cum mirabili hujus Universi structura, necessario plane nexu, illigatam esse; sine qua si esset mundus, solidissima quæque corpora dissipata conspicerentur, brachia nobis deciderent ex humeris, manus a brachiis, digiti a manibus, articuli e digitis &c. omniaque denique corpora scopæ forent, ut loquuntur, dissolutæ.

Si in Experimentis hinc inde a me examinatis aliquando suppositiones feci, vel dubitanter loquutus sum; sciat Lector Benevolus, ea ab aliis accepta, nec mihi ipsi tentata esse, qui satis doleo, quod alienis tantum hic cernere cogor oculis, dum peregrinanti, nec locus, nec occasio, nec vires illa propriis subjiciendi oculis suppetunt. Si in ratiocinationum, qua usus sum, serie, præter spem meam, hallucinationem deprehendat; rogatur enixe, ut paralogismos, vel ore, vel scripto ostendat, & meliora erudiri cupientem instruere non dedignetur, nec invidus sibi soli sapiat. Inveniet me non præfractum, non contumacem; sed docilem, sed ingenuum, sed gratum. Veritatem in Antiquis & Modernis veneror; nullius authoritate moveor; errores aliorum modeste indicandi licentiam mihi sumo, quia ita mecum agi desidero. Hæc sola veræ sapientiæ via est, ad quam sectandam, ad quam scrutandam homines facti sumus.

IN Systemate meo Cometarum nuper impresso, annexa fuere ad calcem duo Problemata: Animadverto autem, in priori nonnullos offendisse, quod in ejus constructione supposuerim Tri-

Trisectionem anguli; & quod pro datis & quæsitis, angulos, non lineas rectas, contra morem Analystarum, assumserim; quare ut me explicem, sequentia hic adjungere necessum duxi: No. II. *I°*. Si supposui trisectionem arcus, nihil supposui, cujus constructio non sit inventa, si non per lineas rectas & circulos, saltem per sectiones conicas; qualis, omnium consensu, non minus geometrica censenda, quam illa quæ fit per lineas simpliciores. *II°*. Etiamsi non esset inventa, maneret tamen sua demonstrationi veritas & evidentia; alias e numero demonstrationum rejicienda quoque esset illa, quæ probat, rectangulum sub semidiametro & semiperipheria æquale esse circulo; quod tale rectangulum construi nequeat: sic quæ ARCHIMEDES demonstravit de tangente spiralis, & in universum pleræque illæ, quibus de curvis proprietates demonstrantur, e demonstrationum censu essent arcendæ; quia talia supponunt, quæ construi nequeunt. Itaque *III°*. in demonstrationibus, non constructionis, sed ratiocinii ἀκρίβεια, & unius ex altero evidens deductio spectanda; & si quando in problematis constructione occurrat aliquid factu impossibile, illud ad minimum per modum theorematis enunciari & demonstrari tuto poterit. *IV°*. Quod pro quantitatibus, tum notis, tum ignotis, angulos, non lineas rectas, assumserim; id inde factum, quia integrum esse duxi, viam quamlibet eligere, qua in quæsiti cognitionem compendiosissime devenitur; id quod hic præstitum: nam cognitis, in triangulo *mci*, latere *ci*, & angulis *c*, & *i*; non potest non dari *mi*, ejusque punctum *m*. Ratio autem, cur Geometræ in solvendis problematis lineas rectas, quam angulos, in usum adhibere maluerint, est quod persuasi fuerint, angulos non posse pro æquationis tenore in quascunque partes geometrice dividi instar linearum rectarum; unde illorum constructio redderetur impossibilis: nam alias si in problemate solvendo præscirem fore, ut inciderem in bisectionem vel quadrisectionem anguli; qualis tum foret necessitas, ut per lineas rectas rem conficerem, ubi idem longe commodius per angulos obtineri potest? cum ergo angulos, nostro seculo, non tantum bifariam & quadrifariam,

Vide *Fig.* 4. *Tab. II.* No. II.

No. II. ſed & trifariam, imo quintuſariam ſecare didicerimus, idque conſtructione vere geometrica; nullam video neceſſitatem, quæ nos in reſolutione problematum perpetuo ad lineas rectas aſtringat. V°. Sed ut ſine ulterioribus ambagibus rem totam adaperiam, non me latere poterat, in tribus illis problematis, quæ Auctor loco ibi citato proponit, arcus triſectionem & inventionem duarum continue proportionalium inter duas datas involvi; nullum tamen alium in finem rem per angulos hic expedire malui, quam ut, per inventam æquationem, quod Auctor diſſimulavit tacite in apricum producerem; ſignificaremque quæ ſit hujus problematis cum triſectione anguli affinitas; & quod nemo illius conſtructionem per circulos & lineas rectas unquam feliciter expedire poſſit, quin eadem opera triſectionem anguli invenerit, quamvis forte ipſe primo neſciat, ſibi hujus inventionis laudem deberi. Nam ſi trifariam dividendus eſſet arcus *hg*, ita id conſtrueretur: Ducta diametro *gc*, biſecetur arcus *hc*, in *o*; ductaque diametro *oe*, trajiciatur per illam (ducendo non niſi rectas lineas & circulos, ſi poſſibile ſit) recta *cr*, ita ut pars *rm* ſit æqualis radio: dico, rectam *cr* abſcindere *hr*, tertiam partem arcus *hg*: cujus demonſtratio per eadem veſtigia, ſed retrogrado ordine, incedit.

Alterum Problema fuit Aſtronomicum, cujus analyſin, quæ ob anguſtiam ſpatii illinc reſecanda erat, hic ſubnectere conſultum duximus:

Inſpecto ſchemate ibi depicto *Fig. 5. Tab. II.* inque illo Triangulis *abc*, & *cde*, ponamus

Pro *Sinu Toto* . . . . *a*.
Pro *Sinu* ab, ſeu *altitudinis Solis* . . . . *b*.
Pro *Sinu* cd, ſeu *elapſi temporis a momento obſervationis ad occaſum Solis*. . . . . *c*.
Pro *Sinu* ac, ſeu *declinationis Solis quæſitæ* . . . . . *x*.

Et quoniam, ſubtracto quadrato ſinus cujuſcunque a quadrato ſinus totius, relinquitur quadratum ſinus complementi, qui eſt ad ipſum ſinum rectum arcus, ut radius ad illius arcus tangentem, invenietur hoc beneficio

TAN-

Tangens a c, seu *declinationis Solis* . . . $xa : \surd(aa - xx)$ No. II.
Jam vero in Triangulo abc, Ut sinus declinationis Solis x, est ad sin. tot. a, ita sinus altitudinis Solis b, est ad sinum ang. acb, seu elevationis poli, qui proinde erit . . . . . . $ab : x$.

Iterum in altero Triangulo cde, Ut sinus elapsi temporis a momento observationis ad occasum Solis c, est ad sin. tot. a, ita tangens declinationis Solis $xa : \surd(aa - xx)$ est ad tangentem ang. dce, seu complem. elev. poli, quæ proinde erit . . . . $xaa : \surd(aacc - xxcc)$

Nunc, ut ad æquationem deveniamus; observandum, nos reperisse diversis operationibus *Sinum Elevationis poli*, & *Tangentem complementi ejus*; quare superest tantum, ut unum quoque eliciatur ex altero, hoc fine, ut alterutra harum quantitatum duobus modis possit exprimi, in quo consistit æquatio: Itaque cum sinus elevationis poli repertus sit $ab : x$, invenietur sinus complementi ejus $\surd(aa - aabb : xx)$: tangens vero complementi $\surd(aaxx - aabb :)\ b$. Quæ cum, alia modo via, reperta fuerit $xaa : \surd(aacc - xxcc)$; habebimus igitur æquationem inter $xaa : \surd(aacc - xxcc)$ & $\surd(aaxx - aabb) : b$; ad quam reducendam fiat multiplicatio per crucem, ut sit $aabx = (\surd a^4ccxx - aaccx^4 - a^4bbcc + aabbccxx)$; deinde ad tollendum signum radicale, multiplicetur utrumque membrum æquationis quadrate, eritque

$a^4bbxx = a^4ccxx - aaccx^4 - a^4bbcc + aabbccxx$.

Quantitates $aaccx^4$ & a^4bbxx, transponantur sub contrario signo, ut quantitas incognita plurimarum dimensionum ab una parte extet sola, fietque

$aaccx^4 = a^4ccxx + aabbccxx - a^4bbxx - a^4bbcc$;

Facta denique utrinque divisione per $aacc$, habebitur

$x^4 = aaxx + bbxx - aabbxx : cc - aabb$. Ubi patet, etiamsi quantitas ignota ad quatuor dimensiones ascendat, problema tamen tantummodo esse planum, propter defectum cubi quantitatis incognitæ, adeoque solvendum esse more problematum duarum tantum dimensionum. Unde Radix æquationis erit

$x = \surd \tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{2}bl - \tfrac{1}{2}aabb : cc + \surd(\tfrac{1}{4}a^4 + \tfrac{1}{4}b^4 - \tfrac{1}{2}aabb - \tfrac{1}{2}a^4bb : cc - \tfrac{1}{2}aab^4 : cc^4 + \tfrac{1}{4}a^4b^4 : c^4)$.

Ut

No. II. Ut tandem calculum applicemus ad ſpeciale exemplum nobis poſitum, aſſumamus Sinum totum a, partium . 10000 eritque Sinus altitudinis Solis b, quæ ponitur 12 graduum 2079 Sinus elapſi temporis inter obſervationem & Solis occaſum, c, horæ ſcil. unius, & 12 minut. quæ in æquatore gradus faciunt 18 3090

Quibus poſitis calculo deprehendemus porro pro

$\frac{1}{4}a^4$	$=$ 250000000000000000
$\frac{1}{4}b^4$	$=$ 4670441815520
$\frac{1}{4}a^4b^4:c^4$	$=$ 5122996371769 85
ſumma ſign. $+$	$=$ 301697007899 2505
$\frac{1}{2}aabb$	$=$ 216112050000000
$\frac{1}{2}a^4bb:cc$	$=$ 2263403713827882
$\frac{1}{2}aab^4:cc$	$=$ 97829763314592
ſumma ſign. $-$	$=$ 2577345527142474

Summa ſignorum minus ſubtracta a ſumma ſignorum plus relinquit 439624551850031
cujus Rad. quadr. 20967226

Iterum $\frac{1}{2}aa$	$=$ 50000000
$\frac{1}{2}bb$	$=$ 2161120
ſumma.	$=$ 52161120
ſubtr. $aabb:cc$	$=$ 22634037
reſid.	$=$ 29527083

Nunc quoniam Æquatio noſtra duas admittit radices, huic reſiduo radix nuper extracta ſemel addatur, ſemel ab illo ſubtrahatur.

Add.	Subtr.
29527083	29527083
20967226	20967226
50494309	8559857
Radix :	Radix :
x 7105 $\frac{13284}{14211}$	$x = 2925\,\frac{4232}{5851}$

In-

Invenimus ergo pro x, ſeu Sinu declinationis Solis quæſitæ, duos numeros 7105, & 2925: illius arcus in canone reperitur 45 gr. 16½ min. hujus 17 gr. 1 min. ubi notandum, priorem radicem ex accidenti falſam eſſe, eo quod maxima Solis declinatio 23½ gradus nunquam excedat; ſola igitur altera (quæ eſt 17 gr. 1 min.) quæſtioni ſatisfacit: hac autem data, uti & altitudine Solis in Triang. abc, vulgari Trigonometria innoteſcet angulus elevationis poli acb; ſi fiat, Ut ſinus declinat. Solis (17 gr. 1 min.) ad ſinum totum, ita ſinus altitudinis Solis (12 grad.) ad ſinum elevat. poli, quæ reperietur 45 gr. 16½ min. Ubi notatu dignum, elevationem poli & declinationem Solis reciproce ſe hic habere; adeo ut ad ſatisfaciendum problemati gemino modo reſponderi poſſet, nimirum obſervationem inſtitutam eſſe, vel ſub latitudine 45 gr. 16½ min. Sole declinationem obtinente 17 gr. 1 min. vel etiam ſub latitudine 17 gr. 1 min. Solis declinatione viciſſim exiſtente 45 gr. 16½ min. ſi modo poſſibile eſſet, ut unquam tanta exiſteret. No. II.



No. III.

NOUVELLE MACHINE POUR RESPIRER SOUS L'EAU,

Tirée du Livre récemment venu d'Italie, DE MOTU ANIMALIUM, *composé par* J. ALPHONSE BORELLI.

L'Art de respirer sous l'eau étant d'une nécessité absolue pour découvrir ce que la nature produit de singulier dans le sein de la Mer, & pour retirer de ses abimes ce que les écueils & les tempêtes y ont fait perdre, c'est donner au Public un secours très considérable que de trouver une invention si importante. Plusieurs personnes y ont travaillé; & nous avons expliqué au long, dans deux de nos Journaux de l'Année 1678, l'invention de la cloche, dont on s'est souvent servi pour ce sujet avec succès. Celle-ci est encore mieux imaginée, & des personnes intelligentes qui l'ont examinée mûrement, prétendent même qu'il sera bien difficile d'en trouver à l'avenir de plus parfaite. C'est au savant JEAN ALPHONSE BORELLI que nous sommes redevables de cette découverte. Comme son érudition & ses Ecrits lui ont acquis un rang glorieux entre les Savans, ce seroit dérober quelque chose de sa gloire, de lui refuser dans le Journal l'Eloge qu'il mérite; mais comme la description de cette machine nous méne assez loin dans celui-ci, nous le réservons pour un de nos premiers Journaux.

Journal des Sçavans 1682. 18e. Journal, du 6. Juill. p. 215. Edit. de Paris, & pag. 255. Edit. de Holl.

Cette Machine consiste en un vaisseau de cuivre en forme de vessie de deux piés de diamétre, comme B M H C, dans lequel un homme puisse loger sa tête A par l'ouverture B C. Ce vaisseau doit être affermi sur les épaules par un collier de cuivre B C, sur lequel on lie, par les tours redoublés d'une petite corde bien tissue, le collet d'un Pantalon de peau impénétrable à l'eau & à l'air, qui puisse couvrir exacement toutes les parties du corps qui ne sont pas couvertes par le vaisseau,

No. III. ſeau, ou caſque, qui ne ſert qu'à la tête. Un homme ainſi revêtu, étant plongé dans l'eau, y pourra vivre pendant pluſieurs heures, reſpirant l'air contenu dans la veſſie B M H C, pourvû qu'il ait ſoin de le renouveller de tems en tems, comme nous dirons enſuite.

Il faut avoir pour cette machine un tuyau de cuivre I Q K L, long de trois piés, & courbé, avec une bourſe de cuir capable de tenir près de chopine, telle que le point K la repréſente, attachée à la partie baſſe de la courbure. Sa matiére doit avoir les mêmes conditions que le Pantalon, & une communication avec le tuyau, de telle maniére que l'air, y étant une fois entré, en puiſſe librement ſortir pour ſe rendre dans le caſque par L. Il faut que l'autre bout I ſoit aſſez long, & recourbé, pour le pouvoir mettre à la bouche, afin de rejetter par là l'air qu'on a attiré dans ſes poulmons par le nez. Cet air, paſſant par ce tuyau, perd la chaleur qu'il avoit acquiſe dans les poulmons, & ſe refroidit enſuite; parce que pour reſpirer, l'on attire l'air par le nez, & qu'en le rejettant par la bouche dans le tuyau I Q K L, il arrive que le même air n'entre que long-tems après dans les poulmons, & ſe refroidiſſant en paſſant par le tuyau, les vapeurs qui le ſuivent ſe condenſent, & ſe résolvent en liqueur dans la bourſe K; & ainſi cet air rentre dans le caſque, non ſeulement refroidi, mais encore purifié de l'infection qu'il avoit contractée dans les poulmons.

Pour pouvoir renouveller l'air contenu dans le caſque, il faut faire le tuyau O M P, recourbé en P, avec un robinet en O, comme l'on en voit un en N: Ce tuyau doit être ſoudé en M au Caſque, ainſi qu'à l'égard du tuyau N. Celui qui ſe ſervira de cette invention, ſentant que l'air du caſque a beſoin d'être renouvellé, s'élévera au deſſus de l'eau, juſques à ce que le caſque ſe trouve dans l'air. Pour lors ouvrant les deux robinets O & N, il attirera l'air autant qu'il lui ſera poſſible, & le rejettera par le tuyau P M O; & dans ce moment l'air, par une circulation naturelle, entrera par N, pour occuper dans le caſque la place que l'autre air vient de quitter. Ces fortes reſpirations étant réitérées, & l'air reſpiré étant pouſſé hors de ce caſque par le tuyau P M O, (dont la partie recourbée P doit être miſe à la bouche à chaque fois) dans très peu de tems cet air ſe trouvera propre à la reſpiration: après quoi l'on fermera les robinets O, N, pour retourner au fond de l'eau, ce qui ſe fait de la maniére ſuivante.

Il faut avoir une ſeringue de cuivre Z R S, dont la concavité ſoit égale à un pié cubique. Elle doit être entiérement fermée par le bout S, & ouverte en Z R, afin que le piſton T V y puiſſe entrer librement. A l'axe du piſton doit être le cric V X, dont le pignon Z, avec ſa manivelle Y, ſoit à l'extrémité de la ſeringue, qu'on attachera au ceinturon D, de la maniére qu'on porte les épées. La longueur & le diamétre de la ſe-

ſeringue peuvent être à diſcrétion ; pourvû que ſa concavité puiſſe contenir un pié cubique d'air. No. III.

Toutes choſes étant ainſi préparées ; ſuppoſons qu'un homme avec tout cet appareil ait moins de peſanteur ſpécifique qu'un égal volume d'eau, de telle maniére que, lorsqu'il s'y eſt plongé, on voye encore au dehors une partie du caſque M G ; ſi on lui ajoute quelques piéces de plomb, on pourra rendre ſa peſantur ſpécifique égale à celle d'un ſemblable volume d'eau, & faire enſorte que l'on ne voie que le ſommet du caſque G, Pour lors cet homme tournant la Manivelle Y, d'Y en Z, le Piſton T V comprimera l'air Ω, & s'approchera du fond S. Dans ce moment l'eau venant à occuper ſa place, le volume de la ſeringue & du piſton ſera moindre qu'auparavant ; c'eſt pourquoi toute la maſſe de l'homme & de ſes machines, occupera un moindre eſpace dans l'eau qu'au commencement, ce qui augmentera la peſanteur ſpécifique. Que ſi l'on continue à tourner la manivelle Y, le piſton T s'aprochera encore plus de S, & l'homme devenant plus peſant en eſpéce que l'eau, il deſcendra lentement au fond ; d'où il remontera à la ſurface de l'eau, en tirant le piſton T vers Z R, par des raiſons contraires.

Mais il faut ſe ſouvenir de laiſſer une ouverture au devant du caſque pour y mettre une forte glace, dont les bords ſeront collés avec de la chaux vive & du blanc d'œuf, pour empêcher que l'eau n'entre par les jointures, & par ce moyen on pourra voir clair au fond & au milieu de l'eau. Cette glace eſt exprimée dans la figure en P 123. On pourroit auſſi ajouter aux piés des nageoires comme celles des canards, afin de ſe conduire plus aiſément, comme on peut le voir dans la figure.



N°. IV.

EXAMEN DE LA MACHINE
POUR RESPIRER SOUS L'EAU,
DU Sr. BORELLI,

Proposée dans le Journal du 6. Juillet de l'année derniére 1682, tiré d'une Lettre du Sr. BERNOULLI *écrite de* Bâle *à l'Auteur du Journal, & conçue à peu près en ces termes.*

*Journal des Sçavans.*1683. 21. Journal du 16. Aoust. p. 250. Ed. de Paris & p. 278. Ed. de Holl. *Acta Erud. Lips.* 1683. Dec. p. 553.

LEs personnes intelligentes qui ont jugé qu'il étoit difficile de trouver une machine plus parfaite, ne l'ont pas examinée assez mûrement. En voici les raisons.

L'homme qui plonge dans l'eau armé d'un casque, comme il paroit dans la figure, étant en cet état à une profondeur un peu considérable sous l'eau, y souffriroit la plus grande torture du monde, à cause que sa tête ne soutiendroit que la pression élastique de l'air naturel renfermé dans le casque, pendant que le reste de son corps seroit exposé non seulement à une pression équivalente de l'Atmosphére, mais aussi à la pesanteur d'une colomne d'eau d'autant plus haute que la profondeur seroit plus grande; ce qui feroit sortir avec violence le sang de tout le corps par les narines, les oreilles, & la bouche, & enfler horriblement la tête beaucoup plus que la chair ne s'enfle dans les ventouses. Je soutiens même, que lors que le casque sera à la profondeur de 31 piés, laquelle est requise pour faire que la pression du corps soit double de celle de la tête, la douleur sera tout à fait insupportable.

Mais ce n'est pas seulement la douleur qui fait ici toute la peine: il y a encore d'autres tourmens, C'est que pour faire enfoncer l'homme avec un casque de deux piés de diamétre, il fau-

faudroit lui attacher un poids de 200 livres : Et bien qu'en cet état l'homme demeureroit suspendu entre deux eaux, n'ayant ni plus ni moins de pesanteur spécifique qu'un égal volume d'eau ; si est-ce que le casque tendroit toûjours à monter avec une force de 200 livres, pendant que le plomb, qui fait le contrepoids, le traineroit vers le fond avec pareille force : ce qui lui déchireroit les membres & l'étrangleroit misérablement. Il est vrai qu'on pourroit prévenir en partie cet inconvénient, en attachant le contrepoids au casque même, au lieu de l'attacher à l'homme. Mais on ne sauroit l'éviter tout à fait, puisque l'homme seroit toûjours trainé en bas ou en haut, à mesure qu'il avanceroit ou retireroit le piston de la seringue. No. IV.

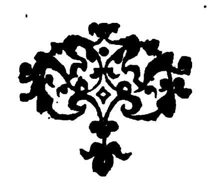
Ce n'est pas encore le seul embarras. Je ne parle pas de celui que causeroit une seringue, dont la concavité contient un pié cubique ; car sa longueur étant de deux piés, le diamétre aura $9\frac{1}{2}$ pouces ; & celle-là étant prise de 3 piés, la largeur aura près de 8 pouces. Je laisse à juger si le piston sauroit boucher une seringue d'une telle largeur aussi exactement qu'il le faut pour empêcher l'eau d'y entrer peu à peu. Je dis encore que si la bourse K étoit de cuir, comme la fait Mr. BORELLI, la pression prédominante de dehors ne trouvant pas assez de résistance au dedans de la bourse, en chasseroit tout l'air dans le casque, & le comprimeroit de telle sorte qu'il n'y pourroit plus passer le moindre atome d'air.

Mais je veux qu'on puisse remédier à tous ces défauts, la principale difficulté que j'ai touchée, & qui concerne l'inégalité des pressions dedans & dehors le casque, demeure toûjours. Car enfin je puis faire en général un tel raisonnement. Pour respirer sous l'eau, il faut, ou que tout le corps humain soit enfermé dans un vase & environné d'air, ou qu'une partie soit dedans & l'autre dehors. Tout le corps n'y peut pas être renfermé, à cause qu'il seroit inutile au fond de la mer, ne pouvant obtenir la fin pour laquelle on s'y plonge : si donc il y a une partie du corps qui soit hors du vase, il faudra nécessairement, pour éviter la douleur qui accompagne l'inégale pression,

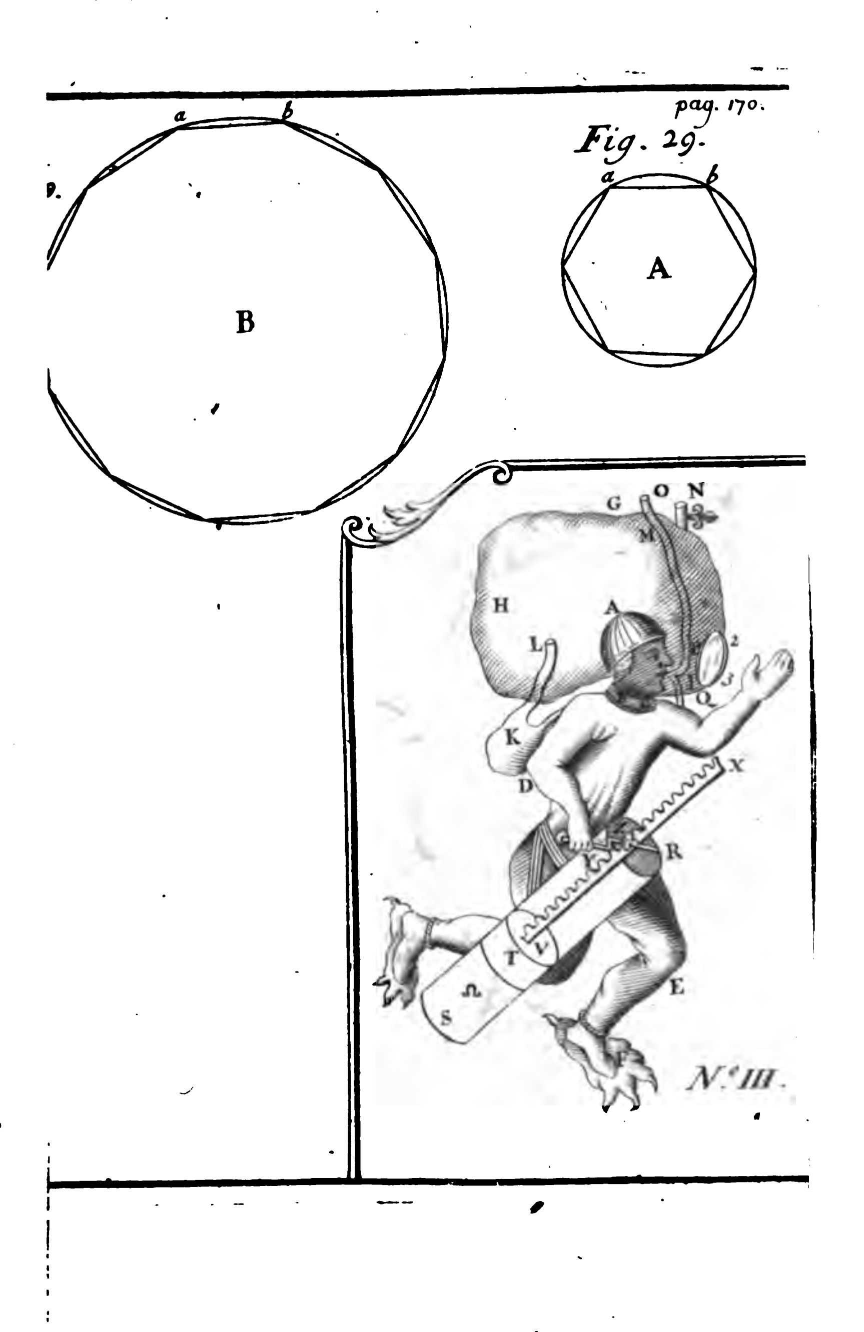
ou

No. IV. ou qu'il y ait quelque chose qui défende cette partie, qui sort hors du vase, du surplus de la pression de dehors (par exemple une espéce de cuirasse qui couvre entiérement cette partie, & qui non seulement ait assez de dureté pour résister au poids de l'eau, malgré sa figure irréguliére, mais qui soit en même tems assez souple & flexible, pour donner moyen par là au moins de manier le piston à travers, & de travailler au fond de la mer; ce qui est une chose absolument impossible): ou bien il faudra qu'on s'avise d'un moyen de renforcer la pression de dedans, ce qui ne se peut faire que par la condensation de l'air, en faisant faire le vase, au lieu de cuivre, d'un cuir mol & tendre, qui puisse se serrer, & céder à la pression du dehors; car par ce moyen l'air qui est dedans, se réduisant peu à peu en un moindre volume, prendroit d'autant plus de force que le vase descendroit plus bas. Le mal en ceci est que la seringue ne pourroit plus servir alors, pour hausser & baisser selon le besoin, à cause que le vase, aiant perdu par sa contraction, à la profondeur d'environ 30 piés, plus de deux piés cubiques de son volume, le plongeur auroit beau retirer le piston jusqu'au sommet de la seringue, & regagner un pié; il demeureroit entiérement enseveli sous l'eau.

Outre tout cela, cette machine n'auroit point d'avantage par dessus la cloche, étant assujettie à la même difficulté qui accompagne la respiration dans l'air condensé; & d'ailleurs on peut adapter le tuyau L, & la bourse K, aussi bien à la cloche qu'à ce casque: de sorte qu'après tout, il faut toûjours en revenir là. D'où je conclus que la machine ne vaut absolument rien.



N°. V.


pag. 170.
Fig. 29.
a
b
B
a
b
A
G
O
N
M
H
A
L
Q
K
D
X
R
T
S
E
F
N.° III.

N°. V.

MACHINE
POUR ELEVER LES EAUX,

De l'Invention de Mr. L. C. D. O.

CEtte Machine, qui eſt une eſpéce de Balance, comme l'on voit aſſez par la figure, eſt fort ſimple. L'on peut par ſon moyen élever l'eau à quelque hauteur que ce puiſſe être, parce que l'on n'aura toûjours que le ſeul poids de l'eau à élever, & cela ſe fera toûjours ſans frottement.

Journal des Sçavan 1682. 9e Journal du 30. Mars p. 107. Ed. de Paris, p. 132. Edit. de Holl.

A, eſt une piéce de charpente élevée perpendiculairement, de 20 piés de hauteur, ou plus, ſelon le beſoin; elle eſt retenuë dans cet état, & fortifiée par des arboutans qu'on ne repréſente pas ici, parce que cela n'eſt pas de la machine. Dans les points D D d'enhaut & d'enbas ſont ſuſpendus en équilibre deux balanciers, où les chaſſis B, & C, ſont attachés en égale diſtance des points D, D, pour les tenir en équilibre. Aux chaſſis B & C, ſont attachés de deux en deux piés des baquets en forme d'échelle, comme il paroit aux nombres 1, 2, 3, 4, &c. A chaque extrémité des bras du balancier ſupérieur, qui ſont plus longs que ceux d'enbas, eſt attachée une tringle de fer en charniére, avec laquelle, en faiſant baiſſer alternativement de chaque côté les bras du balancier, on fait jouer toute la machine de cette ſorte.

Lorſqu'en tirant la tringle E, l'on fait baiſſer le chaſſis B, le baquet inférieur puiſe dans l'eau, & ſe remplit. Tirant enſuite la tringle F, on fait baiſſer le chaſſis C, & hauſſer le chaſſis B; & en même tems que le baquet 20 puiſe dans l'eau, & s'en remplit, le baquet 1 ſe décharge de la ſienne dans le baquet 19, & ainſi conſécutivement; de ſorte que ſi en abaiſſant la verge E, l'on fait remplir d'eau pour la deuxiéme fois le baquet 1, pour lors le chaſſis C s'élevant fait verſer le baquet 20 dans le baquet 2, & le bacquet 19 dans le baquet 3. Enfin tous les baquets de la machine s'empliſſent de cette ſorte, ſi bien qu'il y a toûjours un chaſſis qui puiſe par le bas, & un autre qui jette par enhaut l'eau d'un de ces baquets dans le réſervoir.

Les 4 petites croix qui ſe voient au bas de la figure ſont les limites du

No. V. du mouvement alternatif qu'ont les chassis, & en marquent toute l'étendue, c'est-à-dire que les balanciers ne lévent jamais plus haut, & ne baissent pas plus bas, que d'une croix à l'autre; & c'est dans ce mouvement que les deux chassis s'aprochent, les baquets se remplissent, ou se déchargent de leur eau, les uns dans les autres.

Comme la nouveauté de cette machine, & les grands avantages qu'on prétend que le Public en peut recevoir, lui ont attiré selon la coutume, avec l'applaudissement de plusieurs personnes, la censure de quelques Critiques; l'Auteur a écrit un petit Livre, dans lequel il prouve qu'elle a toutes les perfections essentielles pour l'élévation des eaux; comme la solidité, la durée, l'avantage de fournir une grande abondance d'eau, & de l'élever à quelle hauteur on veut; enfin une extrême facilité, puis qu'elle n'a que le seul poids de l'eau à élever, sans danger d'aucun frottement étranger : ce qui manque dans les pompes, chaînes sans fin, chapelets, & autres inventions usitées.

No. VI.

DOUTES DU Sr. BERNOULLI, SUR LA MACHINE HYDRAULIQUE;

Dont il a été parlé dans le IX. Journal de l'année derniére.

Journal des Sçavans 1683. 22. Journal du 29. Nov. p. 311. Ed. de Paris & pag. 360. Ed. de Hol.

LA situation des baquets, dont cette Machine est composée, fait le principal doute de cet Auteur: car s'ils doivent être attachés à angles droits, & immobiles à l'égard des chassis B & C, il ne voit pas qu'ils se puissent décharger les uns dans les autres; soit que leurs côtés fussent tous d'une même hauteur, soit que ceux qui sont tournés vers la piéce de charpente DD,

D, D, fussent plus bas que les autres: puisqu'en ce dernier cas, les baquets 1, & 20, se déchargeroient en l'air, avant que les balanciers fussent derechef de niveau; au lieu que dans le premier, ces baquets ne se déchargeroient point du tout, ayant toûjours leurs surfaces d'enhaut horizontales. No.VI.

Outre cela la facilité d'élever l'eau de cette maniére, ne lui paroit pas si grande, que l'on pourroit penser; puisque tous les baquets d'un côté sont remplis, pendant que tous ceux de l'autre sont vuides, & qu'il y a toûjours beaucoup de frottement aux axes D, D.



N°. VII.

CENTUM
POSITIONUM PHILOSOPHICARUM
CENTO,

Quem

Ad diem XV Januarii M. DC. LXXXIV.

Speciminis loco excutiendum

offert

JACOBUS BERNOULLI, L. A. M.

Editum primo

BASILEÆ

1684.



CENTUM POSITIONUM PHILOSOPHICARUM CENTO.

THESES LOGICÆ.

I.

QUOD figura, situs, motus est corpori, illud Ideæ sunt animæ. No. VII.

II.

Et ut corpus non potest se determinare ad certam figuram, nisi occasione alterius corporis; ita nec mens sponte in se excitat ideas; sed eæ in mente successive eliciuntur objectu corporum (saltem ideæ rerum corporalium).

III.

Atque hactenus nihil est in intellectu, quod non prius fuerit in sensu.

IV. Cum

No. VII.

IV.

Cum autem Universalia a parte rei neque existant, neque sensus feriant, sed sola singularia; sequitur mentem primario percipere singularia.

V.

Objectum singulare corporeum ita perceptum vocatur *Imago*; ipsa perceptio *Imaginatio*.

VI.

Hæc autem imago eo distinctior est, quo pauciores in objecto partes, seu respectus, seorsim intueor; adeoque punctum imaginor distinctissime, lineam distinctius superficie, hanc corpore, lineam rectam circulari, triangulum polygono, circulum parabola, &c. Quo vero magis composita est idea alicujus rei, id est, quo plures includit respectus, eo confusius & difficilius rem imaginor; donec multitudine rerum comprehendendarum ita obruatur imaginatio, ut vacillet primo, tandem omnino labet. Sic octogonum, octaedrum difficulter, chiliogonum, icosaedrum nullo modo imaginari possumus.

VII.

Universalia non imaginamur immediate: non enim imaginor figuram planam, rectilineam, triangulum, isopleuron; sed isopleuron, cujus latus tot vel tot pedum &c.

VIII.

Cum Universalia apprehendere putamus conceptu puro; vel sola eorum nomina concipimus, vel singularia imaginamur, abstrahendo.

IX.

Item singularium valde compositorum, vel nuda nomina concipimus, vel imaginamur eorum partem, multiplicando.

X.

Conceptus ergo Universalium est imaginatio cum abstractione: Singularium compositorum, imaginatio cum multiplicatione.

XI. De-

XI.

Demonstrationes affectionum fiunt tantum circa singularia, sed redduntur universales, in quantum mens abstrahit ab illo, quod pecificat, vel individuat objectum.

XII.

Quo quid magis compositum est, eo minus habet extensionis.

XIII.

Itur, *statur* &c. sunt themata complexa.

XIV.

Si ab idea alicujus objecti, id, per quod in ultimo suo esse constituitur, abstraho; quod reliquum est, dicitur prioris ideæ *Genus*; quod abstractum est, *Differentia*: si quæ attributa alia deprehenduntur necessario nexu cum differentia cohærere, illa vocantur *Propria*; reliqua quæ non necessario cohærent, *Accidentia*.

XV.

Ergo Propria secundi, & quarti modi hujus tantum loci sunt; reliqua pertinent ad Accidentia.

XVI.

Exemplo res illustrabitur: *Circulus* per æqualitatem radiorum in esse suo completo constituitur; quare hæc æqualitas est ejus *differentia*: qua abstracta, remanet pro *genere* Figura plana curvilinea: quod vero ordinatim applicata sit media proportionalis inter diametri segmenta, est proprium quarti modi: quod quadrata ordinatim applicatarum sint in ratione rectangulorum sub segmentis diametri contentorum, est proprium secundi modi; cum & competat Ellipsi.

XVII.

Homo non est species specialissima; nec circuli omnes sunt ejusdem speciei.

XVIII.

Cum mens, in re confusius concepta, distincte considerat id, quod commune habet cum aliis, & id, per quod ab iisdem discrepat, definit rem.



No. VII.

I V.

Cum autem Universalia a parte rei neque existant, neque sensus feriant, sed sola singularia; sequitur mentem primario percipere singularia.

V.

Objectum singulare corporeum ita perceptum vocatur *Imago*; ipsa perceptio *Imaginatio*.

V I.

Hæc autem imago eo distinctior est, quo pauciores in objecto partes, seu respectus, seorsim intueor; adeoque punctum imaginor distinctissime, lineam distinctius superficie, hanc corpore, lineam rectam circulari, triangulum polygono, circulum parabola, &c. Quo vero magis composita est idea alicujus rei, id est, quo plures includit respectus, eo confusius & difficilius rem imaginor; donec multitudine rerum comprehendendarum ita obruatur imaginatio, ut vacillet primo, tandem omnino labet. Sic octogonum, octaedrum difficulter, chiliogonum, icosaedrum nullo modo imaginari possumus.

V I I.

Universalia non imaginamur immediate: non enim imaginor figuram planam, rectilineam, triangulum, isopleuron; sed isopleuron, cujus latus tot vel tot pedum &c.

V I I I.

Cum Universalia apprehendere putamus conceptu puro; vel sola eorum nomina concipimus, vel singularia imaginamur, abstrahendo.

I X.

Item singularium valde compositorum, vel nuda nomina concipimus, vel imaginamur eorum partem, multiplicando.

X.

Conceptus ergo Universalium est imaginatio cum abstractione: Singularium compositorum, imaginatio cum multiplicatione.

X I. De-

XI.

No. VII.

Demonstrationes affectionum fiunt tantum circa singularia, sed redduntur universales, in quantum mens abstrahit ab illo, quod pecificat, vel individuat objectum.

XII.

Quo quid magis compositum est, eo minus habet extensionis.

XIII.

Itur, statur &c. sunt themata complexa.

XIV.

Si ab idea alicujus objecti, id, per quod in ultimo suo esse constituitur, abstraho; quod reliquum est, dicitur prioris ideæ *Genus*; quod abstractum est, *Differentia*: si quæ attributa alia deprehenduntur necessario nexu cum differentia cohærere, illa vocantur *Propria*; reliqua quæ non necessario cohærent, *Accidentia*.

XV.

Ergo Propria secundi, & quarti modi hujus tantum loci sunt; reliqua pertinent ad Accidentia.

XVI.

Exemplo res illustrabitur: *Circulus* per æqualitatem radiorum in esse suo completo constituitur; quare hæc æqualitas est ejus *differentia*: qua abstracta, remanet pro *genere* Figura plana curvilinea: quod vero ordinatim applicata sit media proportionalis inter diametri segmenta, est proprium quarti modi: quod quadrata ordinatim applicatarum sint in ratione rectangulorum sub segmentis diametri contentorum, est proprium secundi modi; cum & competat Ellipsi.

XVII.

Homo non est species specialissima; nec circuli omnes sunt ejusdem speciei.

XVIII.

Cum mens, in re confusius concepta, distincte considerat id, quod commune habet cum aliis, & id, per quod ab iisdem discrepat, definit rem.

No. VII.

XIX.

Si rei distinctè conceptæ nomen imponit, dicitur *Nomenclatio*; si nomini significationem tribuit, est *Definitio nominis*.

XX.

In omni Definitione nominis, genus subintelligitur, & quod expressum est, meram continet differentiam: plerumque enim toto genere differunt Definitum & Definitio.

XXI.

Omnis Definitio rei fit per genus summum, & differentias subalternas.

XXII.

Ad Propositionem universalem parum refert, sive subjectum ad multa, sive ad pauca se extendat; modo de omnibus sub se contentis sumatur: Hinc singularis habetur pro universali, quia eo ipso quo subjectum singulare est, sumitur in tota sua latitudine.

XXIII.

Universalitas propositionum est, vel *metaphysica*; eaque vel absolute talis, ut, *Omnis homo vivit*, vel cum exceptione, ut, *Omnis homo est bipes*; quia, præter naturæ cursum, dari potest homo quadrupes: vel *moralis*, ut, *Omnes quæ sua sunt quærunt*; quia plerique hoc faciunt. Quædam propositiones sunt *universales generice* tantum, cum subjectum distribuitur duntaxat in genera singulorum; ut; *Omne animal fuit in Arca Noe*, &c. Quædam sunt *universales restrictive*, eatenus saltem, quatenus subjectum restrictum est per partem attributi, ut, *Omnes* (sc. qui vivificabuntur) *in Christo vivificabuntur*, I. Cor. XV. 22. Utrobique sufficere potest *universalitas quædam moralis*, ut ibi: *Christus in se suscepit omnes languores*, id est, non præcise singula, sed præcipua morborum genera: hic: *Helvetii sunt boni milites*, sensus est, Helvetii qui sunt milites, plerunque sunt boni milites, &c.

XXIV.

Propositiones indefinitæ, sive in materia necessaria, sive contingente, respondent universalibus. In materia enim contingente, propositio est, vel moraliter universalis, ut; *Matres amant liberos suos*, vel metaphysice universalis; sed falsa, ut, *Homines sunt nigri*, *corvi albi*, &c.

XXV. No-

XXV.

No. VII.

Nomina collectiva in subjecto faciunt propositionem singularem.

XXVI.

Præter propositiones compositas, in quibus plura sunt subjecta, vel attributa, aliæ dantur enunciationes *complexæ*, quæ proprie unum tantum habent subjectum & prædicatum, sed quorum alterutrum, vel utrumque, est terminus complexus cui aliæ propositiones includuntur, quas vocamus *incidentes*.

XXVII.

Inter has, & principales, hæc differentia: quod hæ primario intendantur, illæ ut propositiones jam antea factæ, sed conceptæ ut simplices ideæ.

XXVIII.

Si additiones, quæ terminum faciunt complexum, restrictiones sunt; nolim inde facere propositionem incidentem; sed saltem quando sunt explicationes: cum enim restringunt subjectum, non possunt de illo, qua tali, vere prædicari.

XXIX.

Non omnes enunciationes copulativæ sunt affirmativæ, nec omnes disjunctivæ negativæ.

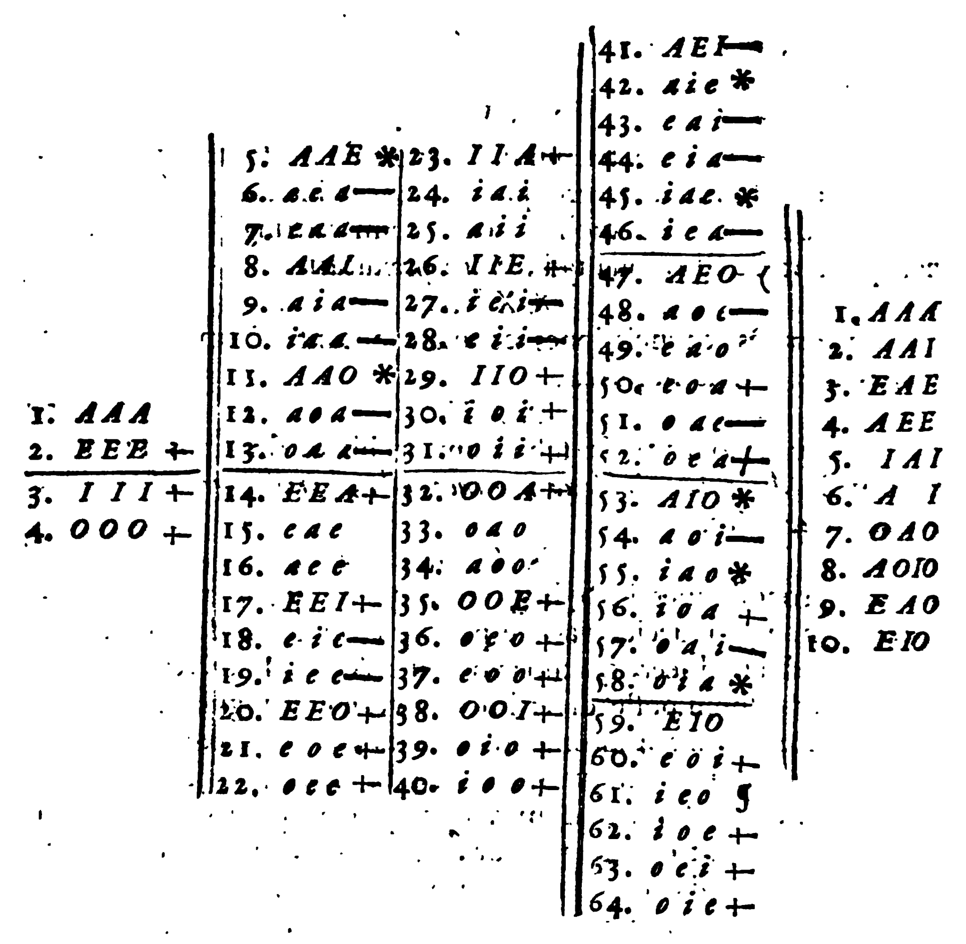
XXX.

Quæritur quodnam sit subjectum in his & similibus propositionibus? *Non dantur ubique homines albi, corvi nigri, Leones, Rhinocerotes*, &c.

XXXI.

Tres propositiones in Syllogismo, quoad quantitatem & qualitatem, non nisi decies variare possunt; quod sic demonstratur. Combinandi ars docet, quatuor vocalium A, E, I, O, ternas, sexagies quater disponi posse diversimode: vel enim singulæ ponuntur ter, unde exurgunt 4 primæ mutationes, A A A. &c: vel singulæ bis, cum una reliquarum; id est, cum præter illam quæ bis ponitur, tres sint, illarum autem quæ bis poni possunt, sint quatuor, poterunt omnes quatuor, ter quater, id est, duodecies diversimode jungi; cumque tertia vocali bis repetitæ ita possit adjungi, ut vel ultimum, vel medium, vel primum loca obti-

No. VII. neat, ut: AAE. AEA. EAA. &c. prodibunt in universum ter duodecim, id est, 36 diversi disponendi modi: vel denique singulæ semel tantum accipiuntur una cum binis reliquarum, quo pacto non nisi quater combinari queunt, nempe AEI, AEO, AIO, EIO, sed in singulis harum combinationum vocales sexies locum mutare possunt, veluti in prima, AEI, AIE, EAI, EIA, IAE, IEA; adeoque in omnibus 4 combinationibus vicies quater: qui modi, cum prioribus 4, & 36 juncti producunt summam 64. (*Vid. seq. Tabellam.*)



			41. *AEI* —	
			42. *aie* *	
			43. *eai* —	
	5. *AAE* *	23. *IIA* +	44. *eia* —	
	6. *aea* —	24. *iai*	45. *iae* *	
	7. *eaa* —	25. *aii*	46. *iea* —	
	8. *AAI*	26. *IIE* +	47. *AEO*	
	9. *aia* —	27. *iei* +	48. *aoe* —	1. *AAA*
	10. *iaa* —	28. *eii* —	49. *eao*	2. *AAI*
	11. *AAO* *	29. *IIO* +	50. *eoa* +	3. *EAE*
1. *AAA*	12. *aoa* —	30. *ioi* +	51. *oae* —	4. *AEE*
2. *EEE* +	13. *oaa* —	31. *oii* +	52. *oea* +	5. *IAI*
3. *III* +	14. *EEA* +	32. *OOA* +	53. *AIO* *	6. *A I*
4. *OOO* +	15. *eae*	33. *oao*	54. *aoi* —	7. *OAO*
	16. *aee*	34. *aoo*	55. *iao* *	8. *AOIO*
	17. *EEI* +	35. *OOE* +	56. *ioa* +	9. *EAO*
	18. *eie* —	36. *oeo* +	57. *oai* —	10. *EIO*
	19. *iee* —	37. *eoo* +	58. *oia* *	
	20. *EEO* +	38. *OOI* +	59. *EIO*	
	21. *eoe* +	39. *oio* +	60. *eoi* +	
	22. *oee* +	40. *ioo* +	61. *ieo*	
			62. *ioe* +	
			63. *oei* +	
			64. *oie* +	

XXXII. Ho-

XXXII.

Horum modorum excluduntur 28, hoc ſigno + notati, per quintam & ſextam legem generalem ſyllog. *Ex duabus negantibus vel particularibus nihil concluditur* : 6, hoc ſigno * conſpicui, quod *ex duabus affirmantibus non poſſit concludi negative* : 18, tranſverſa virgula inſigniti, per 7^{am}. legem generalem ſyllogiſmorum, *Concluſio debet ſequi partem debiliorem* : Unus, videlicet I E O, ſigno ſ affectus, propterea quod, *concluſione exiſtente negata, major nunquam poteſt eſſe particularis affirmans.* Unus denique nempe A E O, hoc charactere (conſpicuus, ideo *quia A, E, ſemper concludere poſſunt generaliter.* Summa ergo modorum inutilium eſt 54, qua ſubſtracta de 64, remanent pro utilibus non niſi 10. Q E D. (*Vid. columnam* 5 *Tabellæ.*)

XXXIII.

Horum decem modorum quintus & ſeptimus e prima figura excluduntur, per primam legem ſpecialem; quartus & octavus per ſecundam; ſecundus & nonus per hanc legem generalem, quod minor terminus ſemper eſt in concluſione, ſicut in præmiſſis: Reſtant ergo hi ſoli quatuor, A A A, E A E, A I I, E I O. E ſecunda figura exulant iterum quintus & ſeptimus per primam legem ſpecialem; primus, ſecundus, & ſextus, per ſecundam legem ſpecialem; nonus, ob eandem rationem, ob quam excluditur e prima: Remanent igitur ſoli hi quatuor EAE, AEE, AOO, EIO. E tertia rejiciuntur quartus & octavus per primam legem ſpecialem; primus, & tertius per ſecundam legem ſpecialem; unde relinquuntur ſoli iſti ſex, AAI, IAI, AII, OA O, EAO EIO, Q. E. D.

XXXIV.

Modi indirecti primæ figuræ in *Fapeſmo*, *Friſeſmo*, ſunt quartæ figuræ in *Feſpamo & Freſiſon.*

No. VII.

THESES ORATORIÆ.

XXXV.

Si Rhetorica ab Oratoria ſeparanda, quidni & Logica docens ab utente, & Matheſis abſtracta a concreta? pertinet enim Matheſis abſtracta non minus ad Philoſophiam Organicam, ac Rhetorica & Logica docens.

XXXVI.

Profeſſor Oratoriæ Orator eſſe nequit.

XXXVII.

Hæc definitio Oratoris; *Orator eſt vir bonus dicendi peritus*; ſimilis eſt huic, *Sutor eſt vir bonus, calceamenta conficiendi peritus.*

XXXVIII.

Mallem quoque Rhetorem & Oratorem diſtinguere, ut Sutorem theoreticum & practicum, qua ut Medicum Theoreticum & Practicum.

XXXIX.

Non datur perfectus Orator.

XL.

Ad perfectum enim Oratorem requiritur ut omnis eruditionis ἐγκυκλοπαιδείαν poſſideat.

XLI.

Quia objectum illius eſt τὸ ἕκαστον.

XLII.

Ut defectui tamen cognitionis humanæ quodammodo ſuccurrerent, excogitarunt methodum inveniendi argumenta ad diſſerendum de quavis re, per *locos communes*, de quibus agitur in parte Logicæ, dicta Topica.

XLIII.

Qua de methodo, utut ſua non deſtituatur utilitate, ſcite quidam

dam dixit, artem esse disserendi absque judicio de rebus, quas ignoramus. No. VII.

XLIV.

Ministri Verbi Dei sunt Oratores sacri.

XLV.

Plura dantur, quam tria causarum genera.

XLVI.

Plus ad encomium personæ conferet, si loco humili, Parentibus obscuris natam esse dicas.

XLVII.

Tropus nunquam est in copula.

XLVIII.

Omnis enunciatio impropria, etsi videatur simplex, est complexa.

XLIX.

Id præcipue curet Orator, ut perspicue dicat; qui secus enim faciunt, non persuadere, sed admirationi esse Auditoribus cupiunt.

L.

Importuni blateronis, non eloquentis, characterem prodit, qui quid dicat parum curat, dummodo copiose & ornate dicat; optime enim AUGUSTINUS, *Nullo modo mihi sonat diserte quod dicitur inepte.*

LI.

Memoria potior est Rhetoricæ pars, quam Inventio, & Pronunciatio.

LII.

Dantur plura, quam quinque Troporum genera.

THE

No. VII.

THESES MISCELLANEÆ.

L I I I.

Quibusdam rebus nomina etiam φύσει indita sunt.

L I V.

Multa tibi habeo dicere, Latinissime dicitur.

L V.

In voce *lebendig* media correpta est, quamvis in istis *beständig*, *verständig*, *inWendig*, *ausWendig*, *unbändig &c.* producatur.

L V I.

Quod Gallorum prosodia quantitates negligat, id imperfectionis illius est argumentum; quid enim turpius isto Iambico: *Un fidéle Chrêtien donnera tout pour Dieu.* In vernacula, id vitii, ne in pueris quidem, ferendum amplius est.

L V I I.

Spiritus operantur tantum volendo.

L V I I I.

Corpus æque agit in animam, atque anima in corpus.

L I X.

Voluptas est summum hominis bonum.

L X.

Retentiones mentales, & æquivocationes Jesuiticas toto corde detestamur.

L X I.

Execramur etiam calumnias & obtrectationes, ceu pestilentissimum in civili societate virus.

L X I I.

Quæritur quo loco habeamus illud vitium, quo quis, in conscientia de propriis convictus meritis, ambit munus, atque interim certo certius prævidens, male consultum iri publico, si alter

ter sibi præferatur; malis artibus, cum aliter nequeat, sese in No. VII.
illud intrudere conatur? Resp. ponimus in genere mendacii officiosi.

LXIII.

Omnia corpora sunt entia per aggregationem, & homo quidem potius, quam acervus lapidum.

LXIV.

Fieri non tantum potest, ut idem numero resurgat Petrus; sed etiam, ut potior sit inter Petrum hujus & illius sæculi identitas numerica, quam hic esse solet inter Petrum senem, & Petrum juvenem.

LXV.

CARTESIUM circa *demonstrationem existentiæ Dei, Mundi infinitatem, regulas motus, causam cohæsionis corporum, naturam reflexionis & refractionis &c.* hallucinatum esse, omnino mihi persuadeo.

LXVI.

Physica est pars specialis Matheseos.

LXVII.

Nullum corpus, per se, & sua natura durum est: imo omne corpus.

LXVIII.

Ignis non magis calore præditus est, quam acus dolore.

LXIX.

Nulla datur attractio, vel suctio, quæ non possit explicari per pulsionem.

LXX.

Helleboro opus habet, qui, visis nostris experimentis, de aeris gravitate dubitare adhuc audet. Quin totus aer globum terraqueum ambiens, minimum ponderat 6, 687, 360, 000, 000, 000, 000, libras, id est, centenariorum plus quam sexagies sexies mille millionum milliones.

LXXI.

Lacrymæ Hollandicæ Phænomenon, nec aeri, nec ætheri tribuendum videtur.

No. VII.

LXXII.

Naturam Gubernaculi primus explicui in Dissert. mea de Grav. Æth. p. 60. sqq.

LXXIII.

Machina BORELLI respirationi sub aqua inserviens, atque in *Ephem. Erud. Gall.* descripta ad d. 6. Julii 1682, nullius est momenti, ob rationes quas Ephemeridibus an. 1683 inseri curavi.

LXXIV.

Qui ad quæstionem: *Cur anser ostium horrei, quantumvis altum, intrans caput demittat*? acute sibi respondere videntur, *Quia anser est*; Anseres sunt.

LXXV.

Rota Basiliensis a desideratissimo nostro populari Dn. JEREMIA MITZIO p. m. inventa, atque in SCHOTTI *Technica Curiosa* p. 409. descripta, quamvis optatum non habuerit successum, spem tamen motus alicujus perpetui pure artificialis non exiguam facit.

LXXVI.

Majus est minus, & minus majus, si cætera sint paria.

LXXVII.

Linea recta potest dari rectior.

LXXVIII.

A puncto ad punctum aliquando plures dantur viæ brevissimæ.

LXXIX.

Unius lineæ, infinitæ dari possunt perpendiculares, in idem illius punctum incidentes.

LXXX.

Unicum circuli centrum est, quamvis plura sint puncta a quibus ductæ rectæ ad circumferentiam sunt æquales.

LXXXI.

Circulus infinita capit maxima, sed unum minimum.

LXXXII. An-

LXXXII. No. VII.

Angulus contactus, vel nullus est, vel est compages infinitorum angulorum rectilineorum.

LXXXIII.

Figurarum Isoperimetrarum una, altera infinities major esse potest.

LXXXIV.

Continens semper majus, semper minus: aliquando majus; aliquando minus: imo nunquam majus, nec minus est contento.

LXXXV.

Non in omni triangulo tres anguli sunt duobus rectis aequales.

LXXXVI.

Ex unica statione non datur mensio.

LXXXVII.

Titius agrum suum triangularem, cujus unum latus est 50; alterum itidem 50, tertium 60 perticarum, alio Sempronii commutat, cujus unum latus est 50, alterum 50, tertium vero 80 pertic. Dico commutationem esse justam.

LXXXVIII.

Compendium nostrum Geometriæ paralogismum committit in bisectione rectæ *Part.* 2. *C.* 2. *prop.* 2. ubi sumit quod probandum erat. Pariter HEINLINUS ἀγεωμέτρητος est, *Geom. Part.* V. *probl.* 21.

LXXXIX.

Circuli quadratura nondum inventa est; non vero hanc ob rationem, quod curvi ad rectum non detur proportio: revera enim & lineæ curvæ inventus εὐθυσμὸς, & figuræ curvilineæ πλατυσμός.

XC.

Copernicani Solem sentiunt moveri, Terram quiescere: Ptolemaici contra. Cæterum incredibilis rapiditas, quæ, in hypothesi Ptolemaica, Fixis adscribenda est, non est sufficiens argumentum mittendi nuntium huic hypothesi.

No. VII.

XCI.

Sol dum accedit ad nos, recedit a nobis; eodemque tempore ascendit & descendit.

XCII.

Si obliquitas Eclipticæ esset 90 gr. dies sub nostra elevatione foret continuus unius mensis & dimid. Sub ipsis autem polis æstus esset longe intolerabilior eo, qui nunc æquatorem infestat.

XCIII.

Fieri potest, ut incolis Zonæ torridæ Sol, per sat multos annos, non fiat verticalis.

XCIV.

Terra non est figuræ ellipticæ.

XCV.

Non dantur Antipodes.

XCVI.

Periodus Juliana tanti non est, quin illa Chronologi carere potuissent. Pro investigando autem anno currente periodi Julianæ, talem inveni methodum: Datum numerum cycli Solis duc in 4845, Lunæ in 4200, Indictionis in 6916; summamque trium productorum divide per completam Periodum Jul. 7980. Residuum indicabit annum ejus currentem.

XCVII.

Magnitudines æquales, si inæquales appareant, in Perspectiva non semper per inæquales repræsentandæ.

XCVIII.

Mathesis tantæ est præstantiæ, ut ejus usus latissime ad omnia opificia, ne ipsa quidem sartoria, vel sutoria excepta, se extendat; sic ut mirari satis nequeam, cur scientiarum utilissima tam paucos inveniat cultores.

XCIX.

Sic Analysin, seu Algebram speciosam, ejusque applicandæ artificium qui norit, totum secretum nostratis cujusdam in fabricandis stateris non difficulter deteget. Datis enim cylindricæ vel prismaticæ stateræ brachio breviori, *a*; longiori, *b*; distantia

punct

puncti applicationis majorum onerum ab hypomochlio, c; facomate No. VII.
brachii longioris æquipondium faciente cum onere explorando, d; minimo onere explorando, e; maximo, f; distantia facomatis ab hypomochlio æquiponderantis oneri maximo, g; minimo, h; & differentia inter duo onera majora vel minora, p. Quæruntur pondus jugi, x; distantia puncti applicationis minorum onerum ab hypomochlio, y; divisiones brachii longioris respondentes differentiæ p duorum onerum majorum, z; eidem differentiæ duorum minorum, ς. Totum autem mysterium in his latet æquationibus; $x = (2acf + 2bcf - 2adg - 2bdg):(bb - aa)$, $y = (dh + cf - dg):e$, $z = cp:d$, $\varsigma = (dhp + cfp - dgp):de$. Estque $y:c = \varsigma:z$. (*).

C.

Ad complendam centuriam, Cl. Dnn. Competitoribus sequens problema algebraice solvendum & construendum propono: Datis duabus pilis in mensa tudicularia; impellere unam in latus mensæ, ut post 2, 3, &c. reflexiones (*bricolles*) impingat in alteram: invenien-

(*) Sit AB [Tab. X. b. pag. 326. N°. 7.] jugum stateræ, cujus hypomochlium K; sitque brachium brevius KA $= a$, longius KB $= b$. Applicentur puncto C, cujus distantia ab hypom. CK $= c$, pondus F $= f$; & puncto G, cujus distantia GK $= g$, facoma D $= d$: erit, per notissimam Staticæ legem momentum ponderis F [cf] plus momento brachii KA [$\frac{1}{2}aax:(a+b)$, posito nempe x pondere jugi] æquale momento facomatis D [dg] plus momento brachii KB [$\frac{1}{2}bbx:(a+b)$]. Unde deducitur $x = (2acf + 2bcf - 2adg - 2bdg):(bb - aa)$, & $\frac{1}{2}(bb - aa)x:(a+b) = cf - dg$. Nunc, e puncto Y, cujus distantia YK $= y$, suspendatur pondus minus E $= e$, quocum sit in æquilibrio facoma D [d] suspensum ex H, cujus distantia HK $= b$; erit, ut supra, $ey + \frac{1}{2}aax:(a+b) = bd + \frac{1}{2}bbx:(a+b)$; seu $ey = hd + \frac{1}{2}(bb - aa)x:(a+b) = bd + cf - dg$, atque $y = (bd + cf - dg):e$. Minuatur pondus F quantitate p, ut sit nunc $f - p$, & ejus momentum erit $cf - cp$. Transeat, æquilibrii servandi gratia, facoma D ex G in g, positoque Gg $= z$ vel Kg $= g - z$, momentum facomatis erit $dg - dz$, sic ut, additis brachiorum momentis, habeatur hæc æquatio $cf - cp + \frac{1}{2}aax:(a+b) = dg - dz + \frac{1}{2}bbx:(a+b)$ vel $cf - dg + \frac{1}{2}(aa - bb)x:(a+b)$ [$= 0$] $= cp - dz$ aut $z = cp:d$. Quod si pondus E [e] minutum posuissemus eadem quantitate p, & facoma D ad hypomochlium accessisset distantia Hh $= \varsigma$, pariter invenissemus $ey - py + \frac{1}{2}aax:(a+b) = dh - d\varsigma + \frac{1}{2}bbx:(a+b)$; unde fit $\varsigma = py:d = (dhp + cfp - dgp):de$, & $\varsigma : z = \frac{py}{d} : \frac{cp}{d} = y:c$.

No. VII. niendum sit punctum incidentiæ in latere mensæ? Resp. (b).

(b) Id plurimis effici potest modis. Hunc accipe. Sit A pila impellenda, B ferienda; LC, DH latera mensæ. His normalem age DC per B, & sumta CE = BC & DG = DE, atque CK = CG, & sic deinceps; si vis pilam B post unam reflexionem ferire, impelle pilam A secundum AE; si post duas secundum AG; si post tres, secundum AK, &c. Demonstrationem, quæ facillima est, omittimus.

Si sit A pila ferienda, B mittenda, erunt F, I, N, &c. puncta incidentiæ, pro una, duabus, tribus, &c. reflexionibus; ac si vocetur BC $= b$, DC $= d$, demissæ ex A normales in latus CL $= a$, in transversalem CD $= c$, erit CF $= bc : (a + b)$; CI $= bc : (a - b + 2d)$; CN $= bc : (a + b + 2d)$; C &c. $= bc : (a - b + 3d)$ &c. uti facile patet.

No. VIII.

RELATIO

De Controversia quæ hactenus inter Dn. HUGENIUM *& Dn.* CATELANUM *agitatur*, De Centro Oscillationis:

Collecta ex Ephemeridibus Gallicis.

Acta Erud. Lips. 1684. Sept. p. 416. Clarissimus HUGENIUS in illius Tractatus, quem de *Pendulo* inscripsit, Parte IV, fundamenti loco, cui totum systema de Centro Oscillationis inædificet, hanc regulam posuit: „ Si pendulum, e pluribus ponderibus „ compositum, atque e quiete dimissum, partem quamcunque oscillationis „ integræ confecerit; atque inde porro intelligantur singula ejus pondera, „ relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quo„ usque possunt ascendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus com„ positæ ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam oscilla„ tionem obtinebat. Eam propositionem, anno 1681, in *Diario Gallico, mense Decembri*, aggressus est Dn. CATELANUS, Mathematicus Parisiensis; atque, ut parum firmam probaret, ostendit, cum pendulum e duobus ponderibus compositum descendit, altitudines, e quibus pondera connexa delabuntur, proportionales esse celeritatibus acquisitis; sed cum pondera, occursu plani resistentis separata, iterum ascendunt, altitudi-

nes.

nes illas, ad quas perveniunt, se habere ut quadrata celeritatum acquisitarum. Quae duae summae sane differentes, ut videntur, si per numerum ponderum divisae fuerint, altitudinem ad quam centrum gravitatis commune ascendit, differre demonstrabunt ab ea, unde initio descenderat. Cui objectioni Dn. Hugenius in *Ephemeridibus* itidem *Gallicis*, *mense Junio*, *Anni* 1682, breviter respondit; negando, summas illas altitudinum, quas Catelanus differentes esse supposuerat, revera tales inveniri: neque enim sequi, altitudines duas, quas inter non est ea proportio quae inter duas alias, necessario summam ab harum summa differentem efficere. *Mense Junio*, *Anni* 1682 excepit Catelanus, se non ignorare, quod quatuor magnitudines inaequales efficere duas summas aequales valeant; sed hoc solum se concludere, quod Hugenii propositio generalis vera esse non possit, nisi pars aequalis toti statuatur. Affirmat „celeritatem totalem penduli compositi, quae inter partes distributa sit proportionaliter ad arcus, quos ipsae describunt, semper „aequalem esse summae celeritatum, quas eaedem partes acquisivissent, „si una ab altera fuisset sejuncta, & omnes separatim ex iisdem altitudinibus, & in eadem distantia ab axe descendissent. Hoc & aliis nonnullis, de quibus ante dixerat, suppositis, controversiae statum ad hanc propositionem redire scribit: „si habeantur duae magnitudines inaequales aa & bb, summa radicum ipsarum $a+b$, & quadrata partium „illius summae, quae sint proportionales dictis magnitudinibus, quaeque „adeo pro communi denominatore habeant $aa+bb$, & pro numeratoribus differentibus a^3+aab & b^3+abb; ostendere, quod summa „harum duarum magnitudinum, quae altitudines, unde duo pondera aequalia uni pendulo alligata demittuntur, repraesentant, non possit esse „aequalis summae quadratorum illarum partium, quae altitudines exhibent, „ad quas duo pondera, postquam percussione facta fuerint sejuncta, redeunt, nisi minor harum magnitudinum aa & bb, sit aequalis majori; „hoc est, quia istae magnitudines in quaestione proposita semper inaequales sunt, nisi pars aeque magna sit ac totum.„ Atque ut intelligeretur, quod antea Hugenio objecerat Catelanus, id omnino cum his, quae modo ex ipso recensuimus, congruere, eodemque collimare, primam objectionem, anno 1681 factam, recudi, eidemque lineolas quasdam, prius omissas, adjici curavit. Hugenius, post duorum fere annorum silentium, exceptioni novae satisfacere, monentibus amicis, *in Ephemeridibus Gallicis* 3. *Julii praesentis anni* voluit, ne victas dedisse manus videretur. No. VIII.

Propositionem ergo, ad quam statum controversiae Catelanus reduxerat, primum terminis Algebraicis, paulisper clarius, ac a Catelano factum fuerat, repetit, deinde Algebra hic opus non esse innuens, numeris

No. VIII. ris eandem offert: „ Ponatur, inquit; aa æquale esse 1, & bb æquale „ 4; summa radicum $a+b$ sunt 3; & partes proportionales hujus summæ sunt $\frac{3}{5}$ & $\frac{12}{5}$: faciunt enim junctim $\frac{15}{5}$, quod est 3, & sunt inter se „ ut 1 ad 4. Quadrata earumdem partium sunt $\frac{9}{25}$, & $\frac{144}{25}$. Hoc igitur „ solum restaret demonstrandum, quod scilicet summa 1 & 4, non sit æ„ qualis summæ, quæ prodit ex $\frac{9}{25}$ & $\frac{144}{25}$, sive quod 5 non sint æqua„ lia $6\frac{3}{25}$; id quod sane per se clarum est. Negat autem HUGENIUS in hac propositione quadrata ipsarum $(a^3+aab):(aa+bb)$ & $(b^3+abb):(aa+bb)$ sive $\frac{9}{25}$ & $\frac{144}{25}$, ad repræsentandas altitudines, ad quas pondera sejuncta redierint, recte assumi. Et porro illud falsum esse, quod de celeritate totali penduli CATELANUS supposuerat, ostendit e principio Mechanico, vi cujus centrum gravitatis non ascendit altius, quam antea fuerat delapsum. Est & alia HUGENIO cum CATELANO controversia, circa generalem regulam, quam de centro oscillationis sive agitationis CATELANUS proposuerat: sed eam ne plura cumulemus, impræsentiarum dimittimus. Antequam vero HUGENIUS ad CATELANI exceptionem alteram responderet, suscepit in se Dn. BERNOULLI Basileensis HUGENII causam, eamque contra CATELANUM defendendam sumpsit. Ejus verba quoniam, quæ hactenus in lite Clarissimorum virorum diximus, plurimum illustrant, huc integra apponere ex *Ephemeridibus Gallicis die* 24. *April*. 1684. visum fuit.



No. IX.

N°. IX.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DU Sr. BERNOULLI,

Ecrite de Bâle à l'Auteur du Journal, sur le démèlé de Mr. l'Abbé CATELAN, *avec Mr.* HUGENS, *touchant le Centre d'Oscillation.*

N'Ayant pas encore remarqué que Mr. HUGENS ait répondu à la replique de Mr. l'Abbé CATELAN, que vous avez inférée dans vos Journaux de 1682, touchant sa principale proposition du centre d'oscillation ; je crois que vous ne trouverez pas mauvais que je vous écrive un mot, pour sa justification.

Journal des Sçavans 1684. 12. Journal du 24. Avr. p. 142. Ed. de Paris & pag. 157. Ed. de Hol.

Tout le discours de Mr. CATELAN ne tend qu'à prouver que *la somme des racines de deux grandeurs quelconques ne peut être coupée en deux parties, en sorte qu'elles soyent proportionelles aux grandeurs données, & que la somme de leurs quarrés soit égale à celle de ces mêmes grandeurs* : ce qui ne lui est pas contesté par Mr. HUGENS, qui soutient seulement que *la somme de ces deux grandeurs peut bien être égale à la somme de deux autres, qui ne sont que proportionelles aux quarrés des dites parties* ; ce qui est aussi très vrai. Et pour vous montrer que la dispute ne revient qu'à cela, je me servirai du même exemple de deux poids égaux, en rendant ces vérités abstraites plus sensibles par les nombres.

Soient A & B, deux corps suspendus à l'axe D, l'un à la di-

No. IX. diſtance quatre fois plus grande que l'autre : ainſi ſi la hauteur perpendiculaire B I, d'où deſcend le Corps B, en décrivant l'arc B G, eſt poſée de quatre piés, l'autre A H, d'où tombe le corps A, ſera d'un pié. Les viteſſes donc qu'ils acquerront en tombant ſéparément, étant comme les racines de ces hauteurs, ſeront en raiſon de 2 à 1 : la ſomme 3, qui marque la viteſſe totale du pendule, étant partagée proportionellement aux hauteurs, ou aux arcs B G, & A F, donne les degrés de viteſſe qu'obtiennent les poids lors qu'ils tombent conjointement ſur la planche D G, ſavoir $\frac{12}{5}$ & $\frac{3}{5}$, les quarrés deſquels ſont $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$, dont la ſomme eſt aſſurément différente de celle des hauteurs d'où les poids ſont deſcendus ; mais ces quarrés ne marquent que la proportion des hauteurs, O M, & N L, auxquelles montent les poids après la rencontre de la planche, & non pas les hauteurs mêmes ; leſquelles peuvent bien être en raiſon de $\frac{144}{25}$ à $\frac{9}{25}$, c'eſt-à-dire, de 16 à 1, ſans que leur ſomme laiſſe pour cela d'être égale à 5, qui eſt celle des hauteurs I B, & A H, d'où les mêmes poids ſont deſcendus ; car ſi je fais la hauteur O M de $4\frac{12}{17}$ piés, l'autre N L de $\frac{5}{17}$; O M ſera à N L, comme 16 a 1, & O M + N L ſera égal à B I + A H, & par conſéquent le centre de peſanteur commun des poids A, B, montés en L, M, ſera à même hauteur qu'il étoit devant que le balancement fût commencé ; ce qui paroit facilement par l'inſpection de la figure : car le poids M, étant autant au deſſus de la ligne horizontale B D, que L en eſt au deſſous, ſavoir de $\frac{12}{17}$ parties d'un pié, il s'enſuit que dans les triangles ſemblables M P Q, & L Q R, les côtés M Q, & Q L ſont égaux, c'eſt-à-dire, que le milieu de la ligne M L, qui joint les deux poids, ſe trouve dans l'interſection de la ligne horizontale. Voila, Monſieur, ce que j'avois à vous dire ſur ce ſujet.

N°. X.

No. X.

REPONSE
DE
Mr. L'ABBE' CATELAN,
à la Lettre de
Mr. Bernoulli,
Sur son démèlé avec Mr. Hugens *touchant* le Centre de Balancement,
inserée dans le XII. *Journal de cette année* 1684.

POUR répondre à cette lettre, je repéterai le même exemple dont Mr. Bernoulli se sert contre moi, d'un pendule composé de deux poids égaux, suspendus par un même axe, à un centre commun, qui soit quatre fois plus éloigné de l'un que de l'autre; en sorte que les hauteurs perpendiculaires, d'où ils descendent, soient comme 1 à 4.

Journal des Sçavans. 1684. 27. Journal du 11. Sept. p. 313. Ed. de Paris & p. 361. Ed. de Holl.

Nous sommes d'accord sur la proportion de ces hauteurs, & de la somme des vitesses que ces poids acquerroient, s'ils tomboient, séparément, de ces hauteurs: mais nous ne convenons pas ensuite dans l'expression de ces hauteurs, par rapport à une certaine partie d'espace, qu'on doit prendre pour leur commune mesure, & concevoir comme l'unité à leur égard.

Je prétens, selon tous ceux qui ont écrit avant moi sur de semblables questions, que les véritables nombres, qui doivent servir à exprimer les hauteurs, sont les quarrés mêmes des nombres exposans des vitesses,

No. X. toutes les fois qu'il n'y a de proportions données entre les unes & les autres, que celle qui nous est connuë en général par l'expérience.

Or selon mon expression, il est évident que 9 fois & 144 fois la 25 partie d'un pié; c'est à dire, six piés, un pouce, cinq lignes, & & quelque chose davantage, n'étant pas la même grandeur qu'un pié & quatre piés, ou cinq piés, la somme des hauteurs où les poids montent dans l'exemple proposé, n'est pas égale à celles des hauteurs d'où ils descendent; contre ce que Mr. HUGENS avance dans la proposition générale qui sert de principe à son Traité des Centres de balancement.

Mr. BERNOULLI répond à cette objection; que les quarrés des nombres, qui expriment les vitesses des poids, ne marquent que la proportion des hauteurs, auxquelles ils montent après leur séparation, & non pas les hauteurs mêmes, qui peuvent bien être en raison de $\frac{144}{25}$, & $\frac{9}{25}$, sans que leur somme laisse pour cela d'être égale à 5, qui est celle des hauteurs d'où les poids sont descendus, étant unis dans un même pendule; car les hauteurs, où ils remontent étant séparés, sont selon lui $4\frac{12}{17}$, & $\frac{5}{17}$, qui font ensemble 5, aussi bien que les nombres 1 & 4, exposans des premiéres hauteurs.

La Replique est facile. Je demande à Mr. BERNOULLI, qui prétend qu'on ne doit avoir ici égard qu'à la proportion des quarrés des nombres exposans des vitesses, par quelles loix du mouvement, & par quel principe de méchanique, les poids dont il est question remonteront plûtôt aux hauteurs qu'il marque, & qui l'accommodent, qu'à leurs proportionelles $5\frac{11}{17}$ & $\frac{6}{17}$ dont la somme est 6, ou bien à $3\frac{13}{17}$ & $\frac{4}{17}$ dont la somme est 4, ou à une infinité d'autres semblables qui ont entr'elles la même proportion de $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$, mais qui donnent la hauteur du centre de pesanteur remonté plus grande, ou plus petite à l'infini, que celle d'où l'on suppose qu'il soit descendu? Certainement ces poids ne remonteront pas à toutes sortes de hauteurs, proportionelles aux quarrés des vitesses qu'ils ont acquises en descendant; puisque leur pesanteur rallentit par degrés, & détruit à la fin ces vitesses, avec lesquelles ils sont réfléchis. Qu'arrivera-t-il donc alors? Je le demande à Mr. BERNOULLI? La Nature, incertaine par elle-même de ce qu'elle doit faire en cette occasion, se déterminera-t-elle enfin à agir dans ces poids selon sa volonté? Il me permettra d'en douter, jusqu'à-ce qu'il nous en donne de bonnes preuves, tirées des principes de la Physique. Et cependant je crois pouvoir conclure, que les raisons, qu'il apporte ici en faveur de Mr. HUGENS, ne servent qu'à confirmer, que sa proposition générale & fondamentale des centres de balancement, n'est ni si bonne, ni si incontestable qu'il le pense.

Voyez N°. XXIII.

N°. XI.

NOUVELLE MACHINE POUR PESER L'AIR,

inventée par

le Sr. BERNOULLI,

Mathématicien de Basle, *& envoiée à l'Auteur du Journal.*

DE toutes les diverses maniéres de peser l'air, qu'on nous a données jusqu'ici, celle de Mr. BOYLE est sans doute la plus estimée, comme étant la plus exacte. Il prend des phioles, ou bouteilles de verre, de la grosseur d'un œuf ou d'un ballon, avec un col fort menu, qu'il fait scêler hermétiquement au moment qu'elles sortent de la fournaise. Les ayant laissé refroidir, il les pése dans une balance très juste. Il en rompt ensuite le bout; donnant par là moyen à l'air d'y entrer. Après cela, il les pese derechef avec le bout rompu, & trouve ainsi le poids de l'air qui y est entré.

Journal des Sçavans 1684. 28. Journal du 31. Juil. 1684. p. 259. Ed. de Par. & p. 293. Ed. de Hol. *Acta Erud. Lips.* 1685. Sep. p. 435.

On peut se servir plusieurs fois pour cet effet d'une même phiole, sans la scêler hermétiquement, si après en avoir chassé l'air, par la chaleur d'une braize, on en bouche l'ouverture seulement avec de la cire; après quoi on la pése, & puis on perce la cire avec une épingle, pour la repeser encore. J'ai laissé quelquefois ces phioles 4 ou 5 mois, ainsi bouchées avec de la cire, après lesquels je m'en servois encore avec le même succès.

Cependant il est aisé de remarquer, que cette maniére de peser l'air a trois défauts considérables. Car 1°. il ne peut y avoir

No. XI. aucune exactitude, en pesant une aussi petite portion d'air; que sauroient contenir de semblables phioles; d'autant plus que, dans l'examen des petites choses, une différence imperceptible peut souvent causer une erreur fort notable dans la proportion.

Mais si, pour éviter ce défaut, on choisit un plus grand verre, l'on se jette dans un autre inconvénient, qui est que la balance étant trop chargée par la pesanteur de la phiole, elle ne tourne plus aussi librement qu'il faudroit qu'elle tournat, pour marquer jusqu'à la moindre différence du poids: Ensorte que Mr. Boyle ne gagne guéres, quand pour faire remarquer la justesse de sa balance, il dit que la quarantiéme partie d'un grain lui faisoit perdre l'équilibre: car ce n'est pas à dire, qu'elle doive être aussi juste, après l'avoir chargée de la bouteille; ayant trouvé par expérience, que si la dixiéme partie d'un grain suffit pour faire pancher sensiblement d'un côté un trébuchet d'orfévre qui n'est pas chargé, il faut pour le moins ajouter, à l'un de ses bassins, dix, ou douze grains, pour le faire pancher comme auparavant, lors même que chaque bassin n'est chargé que d'une once, ou de deux.

Le 3e. défaut est encore plus considérable que les deux autres; en ce qu'en cette maniére on ne peut connoitre, quelle quantité d'air a été chassée hors de la phiole; ce qu'il faut pourtant savoir pour trouver la juste proportion de sa pesanteur à celle des autres corps.

Pour remédier donc à tous les inconvéniens qui peuvent arriver là-dessus, il faut venir à ce probléme qui peut tenir lieu de paradoxe, savoir de trouver moien de peser un fort grand volume d'air, à une balance très déliée & très fine, sans que le vase contenant cet air empêche, par sa pesanteur, que la balance ne tourne aussi librement, que si elle n'étoit point du tout chargée, & sans que l'évacuation du vase cause aucune altération dans le vase même.

Pour résoudre en un mot ce Probléme, il ne faut que peser un grand récipient dans l'eau; puis en aiant tiré l'air, par le moien de la machine du vuide, le peser derechef. Comme cette ma-

maniére est très simple, & très aisée, il y a lieu de s'étonner No. XI. que Mr. BOYLE, qui savoit bien que les corps perdoient leur pesanteur dans l'eau, & qui n'ignoroit pas l'usage de la Machine du vuide, ne s'en soit jamais avisé. Mais pour en faire l'expérience, avec toutes les précautions nécessaires, il faut observer ce qui suit.

Il faut prendre d'abord un Récipient A, des plus grands qui se puissent faire, & souder à son goulet une clé de robinet B, avec son tuyau C. On entoure ensuite le récipient, au dessous de son goulet, d'un cercle, ou anneau de fer D, bien large, & dont les bords soient retroussés en haut, pour empêcher que ce que l'on y met n'en puisse tomber facilement. Aux 4 cotés opposés de ce cercle, on attache des lames de fer EE, assez épaisses, qui se croisent au bas du récipient, pour y recevoir le crochet du bassin F, dans lequel on mettra du poids autant qu'on le jugera nécessaire pour faire enfoncer le récipient dans l'eau. Il vaut mieux toutefois y en mettre trop peu que trop, parce qu'il sera plus aisé d'en ajouter que d'en ôter.

Cela fait, il faut plonger le récipient avec tout cet apareil dans le tonneau renversé G, qui est presque rempli d'eau : puis aiant passé trois fils de soie dans les petites anses *a a*, qui sont autour du tuyau du robinet immédiatement au dessus de la clé, il en faut attacher le bout au bras d'un trébuchet bien subtil & bien juste, & à l'autre bras le bassinet H, dans lequel on ne mettra qu'autant de poids que vous jugerez à peu près nécessaire, pour contrepeser le seul air du récipient, c'est à dire, 4 ou 6 dragmes, ou une once, suivant la capacité du récipient : après quoi, l'on achevera de mettre du poids autour du cercle D, pour faire enfoncer le récipient avec son robinet, jusqu'à ce qu'il soit tout couvert d'eau, & parfaitement en équilibre avec le contrepoids du bassinet H. Ensuite de cela, il faut lever, avec deux doitgs, tout doucement le récipient, pour faire sortir l'ouverture du tuyau C, hors de l'eau jusqu'en C; puis ayant succé, à travers un chalumeau, l'eau contenuë dans la concavité du robinet, & l'ayant bien essuyé par dedans, de peur qu'en ouvrant le robinet il

No. XI. il ne tombe quelque goute dans le récipient; il en faut tirer l'air, autant que l'on peut, par le moien de la pompe I; & afin qu'il ne soit pas nécessaire de changer la situation perpendiculaire, ni du récipient, ni de la pompe, on peut se servir du Syphon recourbé K, attaché d'un côté avec de la cire au robinet du récipient, & de l'autre à celui de la pompe.

Ayant tiré l'air, il faut tourner la clé du robinet, détacher le Syphon K, & racler toute la cire du bout du robinet C; mais quand il en resteroit quelque peu, on ne doit pas penser que cela apporte du changement au poids du récipient, selon tout le poids de cette masse au dessus de celui d'un égal volume d'eau; & l'excès ne sauroit aller à la centiéme partie d'un grain; la différence des pesanteurs spécifiques de l'eau & de la cire étant très petite.

Après cela, il faut plonger le récipient sous l'eau du tonneau, & ôter du contrepoids H, jusqu'à-ce que le reste se mette derechef parfaitement en équilibre avec le récipient. Ainsi ce que vous aurez ôté marquera le poids de l'air, qui a été tiré hors du récipient. Enfin il faudra tirer tout le récipient hors du tonneau, & l'ayant délivré de l'embarras du cercle D, des lames E, & du bassin F, l'y replonger le goulet devant; ayant soin que la concavité du robinet C se remplisse d'eau; puis tournant la clé, on laissera monter l'eau, qui remplira l'espace qu'avoit occupé l'air tiré, & se mettra au dessous de la surface extérieure du tonneau. C'est pourquoi il faut plonger plus bas le récipient, jusqu'à-ce que l'eau vienne par dedans à niveau avec celle de dehors; autrement l'eau, qui entre dans le récipient, ne sauroit exactement remplir l'espace qu'avoit occupé l'air tiré; puisqu'elle en seroit empêchée par l'air qui y est resté, qui seroit rarefié, un peu davantage qu'il ne l'est dans son état naturel; comme savent ceux qui entendent les loix de la vertu élastique de l'air.

L'eau du récipient ainsi de niveau avec celle du tonneau; on doit tourner la clé du robinet; puis tirer le récipient hors du tonneau, le bien essuyer par dehors; le peser, avec l'eau renfermée, dans une balance exacte, proportionnée à ce poids; & enfin

enfin le peser encore vuide, pour trouver le poids de l'eau qu'on aura jettée, qu'il faut comparer avec ce qu'on avoit ôté du contrepoids H, pour avoir l'exacte proportion de la pesanteur spécifique de l'air à celle de l'eau. No. XI.

On peut objecter, que cette maniére de peser l'air n'est pas si exacte qu'elle pourroit sembler d'abord, en ce que l'eau du tonneau, résistant beaucoup au balancement du récipient, empêche que le trébuchet ne tourne assez librement pour marquer les moindres différences des poids, quoique d'ailleurs il ne soit chargé que très peu. A cela Mr. BERNOULLI répond, qu'à la vérité, en cet état, pour faire perdre l'équilibre au trébuchet, il faut ajoûter plus de poids au bassin H, qu'il ne faudroit, si ce qui contrepése à ce bassin étoit dans l'air; mais il croit aussi, qu'il ne faut pas tant pour vaincre la résistance de l'eau, & pour faire hausser & baisser sensiblement le récipient, qu'il faudroit pour vaincre le frottement de l'axe, que causeroit la pesanteur d'un tel récipient, si on le pesoit dans l'air, à une balance plus forte & capable de soutenir ce poids sans plier: Ainsi cette maniére de peser l'air du récipient à un trébuchet dans l'eau est toûjours plus exacte, que celle de le faire dans l'air à une balance plus grossiére.

N°. XII.

PROBLEME PROPOSE[1]

Par Mr. BERNOULLI, *Mathématicien de* Basle.

AIant pris un Arc AB,[Tab.X.b.N°.12] qui soit une partie aliquote quelconque de la circonférence; [comme un arc de 30, 45, 60 degrés ou autre] mener de son extrémité B, une ligne BC, sur quelque point du Diamétre AD, hors le centre, en sorte qu'on puisse démontrer que le segment ACB, est commensurable au Cercle.

Journal des Savans 1685. 16e. Journal du 14. Mai p. 206. Ed de Paris, pag. 262. Ed. de Holl.

Ce Probléme est d'autant plus considérable, que s'il étoit une fois ré-

No. XII. *solu, on auroit bientôt la quadrature du Cercle *.*

* Soit mené le raion BK, & BL le sinus de l'arc AB. Puisque AB est partie aliquote de la circonference, le secteur A K B est partie aliquote du cercle, & lui est commensurable. Si ACB est aussi commensurable au cercle, le triangle B K C lui est donc commensurable, & le raport de ½ BL× KC [mesure du triangle] à ABD× A K [mesure du cercle] est donné. Mais A B étant partie aliquote de la circonférence, le raport de son sinus BL au raion AK est donné. Donc aussi le raport de KC à ABD sera donné. Mais la droite KC seroit donnée, par la résolution du Probléme. Donc la demi circonference ABD seroit donnée, & partant la Quadrature du Cércle.

No. XIII.

EXAMEN DE LA MANIERE DE PESER L'AIR DANS UNE VESSIE,

*Envoyé à Mr. l'*Abbé DE LA ROQUE,

Par Mr. BERNOULLI, *Mathématicien de* Basle,

en ces termes.

Journal des Savans 1685. 19e. Journal du 18. Juin p. 241. Ed. de Paris. pag. 304. Ed. de Holl.

AVANT de vous avoir envoié cette nouvelle Machine pour peser l'air, dont vous avez fait part au Public dans vôtre Journal, j'en avois examiné avec soin les maniéres ordinaires; entr'autres celle de le faire dans une vessie, dont RICCIOLI, Mr. STURM d'Altorf, & plusieurs autres ont fait l'essai, & que Mr. BOYLE même semble vouloir soûtenir dans les Prolégoménes de ses *Paradoxes hydrostatiques.* Après l'approbation de tant de savans hommes, on sera surpris d'apprendre

dre que, suivant les principes hydrostatiques, une vessie ne doit No. XIII.
peser ni plus, ni moins, quand elle est enflée, que quand elle est vuide, supposé même que l'air ait de la pesanteur.

Il est visible qu'une phiole remplie d'eau ne pése pas davantage dans le bassin d'une balance, que si cette eau étoit répanduë dans le bassin, & que la phiole fût mise auprès : il en est presque de même d'une vessie enflée, dont on exprime l'air ; d'autant qu'à mesure qu'elle se réduit en un moindre volume, elle céde par sa contraction à l'air, qui en sort, autant d'espace qu'il en avoit occupé auparavant dans la vessie, si bien qu'il pése, avant & après, la même quantité d'air sur le bassin. Et afin qu'on ne s'imagine pas qu'il en soit autrement, lors qu'on a suspendu la vessie au bras de la balance, ou au dessous du bassin, que lors qu'elle est couchée dessus; figurez-vous, en tout cas, une colomne perpendiculaire d'air, qui renferme en soi cette vessie suspenduë, & une autre colomne purement d'air, de pareille hauteur & grosseur, à côté, qui tâche de soulever la premiére.

Il est constant selon les principes hydrostatiques, que la vessie, quoi qu'elle soit accompagnée de tout le poids de la colonne qui la renferme, ne doit faire baisser le bras de la balance, qu'avec la force qui correspond à l'excès du poids, dont la substance de la vessie surpasse celle d'un égal volume d'air : ensorte qu'il ne faut charger l'autre bras, que d'autant de poids qu'il faut pour contrebalancer ce seul excès ; soit que la vessie soit enflée, ou qu'elle soit vuide d'air : parce que tout l'air de la colonne, tant déhors que dedans la vessie, est empêché de faire son effet par autant d'air de la colonne qui est à côté.

Pour voir si la raison s'accorderoit avec l'expérience, je pris une vessie de porc, que j'enflai d'air naturel, par le moyen d'un soufflet, plûtôt qu'avec la bouche, dont le soufle est rempli de beaucoup de parties aqueuses ; puis laissant le col de la vessie ouvert, pour être assuré, par la communication de l'air enfermé avec l'extérieur, qu'il n'est pas plus comprimé que celui-ci ; j'attachai cette vessie, avec une feuille de papier, au bras d'une balance très exacte, & la pesai. Ensuite j'en exprimai l'air, pre-

 nant

No. XII. *solu, on auroit bientôt la quadrature du Cercle* *.

* Soit mené le raion BK, & BL le sinus de l'arc AB. Puisque AB est partie aliquote de la circonference, le secteur AKB est partie aliquote du cercle, & lui est commensurable. Si ACB est aussi commensurable au cercle, le triangle BKC lui est donc commensurable, & le raport de $\frac{1}{2}$BL× KC [mesure du triangle] à ABD× AK [mesure du cercle] est donné. Mais AB étant partie aliquote de la circonférence, le raport de son sinus BL au raion AK est donné. Donc aussi le raport de KC à ABD sera donné. Mais la droite KC seroit donnée, par la résolution du Probléme. Donc la demi circonference ABD seroit donnée, & partant la Quadrature du Cercle.

No. XIII.

EXAMEN DE LA MANIERE DE PESER L'AIR DANS UNE VESSIE,

*Envoyé à Mr. l'*Abbé DE LA ROQUE,

Par Mr. BERNOULLI, *Mathématicien de* Basle,

en ces termes.

Journal des Savans 1685. 19e. Journal du 18. Juin p. 241. Ed. de Paris. pag. 304. Ed. de Holl.

AVANT de vous avoir envoié cette nouvelle Machine pour peser l'air, dont vous avez fait part au Public dans vôtre Journal, j'en avois examiné avec soin les maniéres ordinaires; entr'autres celle de le faire dans une vessie, dont RICCIOLI, Mr. STURM d'Altorf, & plusieurs autres ont fait l'essai, & que Mr. BOYLE même semble vouloir soutenir dans les Prolégoménes de ses *Paradoxes hydrostatiques*. Après l'approbation de tant de savans hommes, on sera surpris d'apprendre

dre que, suivant les principes hydrostatiques, une vessie ne doit No. XIII.
peser ni plus, ni moins, quand elle est enflée, que quand elle est vuide, supposé même que l'air ait de la pesanteur.

Il est visible qu'une phiole remplie d'eau ne pése pas davantage dans le bassin d'une balance, que si cette eau étoit répanduë dans le bassin, & que la phiole fût mise auprès : il en est presque de même d'une vessie enflée, dont on exprime l'air ; d'autant qu'à mesure qu'elle se réduit en un moindre volume, elle céde par sa contraction à l'air, qui en sort, autant d'espace qu'il en avoit occupé auparavant dans la vessie, si bien qu'il pése, avant & après, la même quantité d'air sur le bassin. Et afin qu'on ne s'imagine pas qu'il en soit autrement, lors qu'on a suspendu la vessie au bras de la balance, ou au dessous du bassin, que lors qu'elle est couchée dessus; figurez-vous, en tout cas, une colomne perpendiculaire d'air, qui renferme en soi cette vessie suspenduë, & une autre colomne purement d'air, de pareille hauteur & grosseur, à côté, qui tâche de soulever la premiére.

Il est constant selon les principes hydrostatiques, que la vessie, quoi qu'elle soit accompagnée de tout le poids de la colonne qui la renferme, ne doit faire baisser le bras de la balance, qu'avec la force qui correspond à l'excès du poids, dont la substance de la vessie surpasse celle d'un égal volume d'air : ensorte qu'il ne faut charger l'autre bras, que d'autant de poids qu'il faut pour contrebalancer ce seul excès ; soit que la vessie soit enflée, ou qu'elle soit vuide d'air : parce que tout l'air de la colonne, tant déhors que dedans la vessie, est empêché de faire son effet, par autant d'air de la colonne qui est à côté.

Pour voir si la raison s'accorderoit avec l'expérience, je pris une vessie de porc, que j'enflai d'air naturel, par le moyen d'un soufflet, plûtôt qu'avec la bouche, dont le soufle est rempli de beaucoup de parties aqueuses ; puis laissant le col de la vessie ouvert, pour être assuré, par la communication de l'air enfermé avec l'extérieur, qu'il n'est pas plus comprimé que celui-ci ; j'attachai cette vessie, avec une feuille de papier, au bras d'une balance très exacte, & la pesai. Ensuite j'en exprimai l'air, pre-

 nant

No.XIII. nant entre les doigts ce papier, afin qu'il ne reſtât point de graiſſe aux doigts, & la repeſai encore. Moyennant cela, je trouvai, qu'à la vérité la veſſie peſoit deux grains moins qu'elle ne peſoit auparavant; mais cette différence étoit trop petite, pour croire qu'elle marquât le poids de l'air qui en étoit ſorti: d'autant que je jugeai, par la comparaiſon de la capacité de cette veſſie à celle d'une phiole de verre dont j'avois peſé l'air, que la veſſie en devoit contenir, pour le moins, 14 ou 16 grains. D'où je conclus, que ces deux grains de différence ne procédoient que des exhalaiſons, dont le dedans de la veſſie eſt toûjours rempli, & qui s'échapent, de compagnie avec l'air, lors qu'on l'exprime; témoin la mauvaiſe odeur qu'on ſent alors, en y approchant le nez. Pour voir encore plus clairement que ce n'étoit pas l'air que j'avois peſé, je remplis la veſſie une deuxiéme fois avec le ſoufflet; mais bien loin que ſon poids augmentat par là, je le trouvai diminué encore plus d'un grain; ce que je crois provenir, de ce qu'il ſe détache toûjours, tant par le maniement de la veſſie, que par le vent que cauſe le ſoufflet, quelques petites parties graſſes & volatiles, qui s'évaporent en l'air.

On connoit aiſément par ce que je viens de dire, pourquoi ceux qui ſe ſervent de cette maniére de peſer l'air, ont été obligés de lui attribuer beaucoup moins de peſanteur qu'il n'en a en effet; vû que le P. Riccioli le fait dix mille fois plus leger que l'eau, & Mr. Boyle, ſuivant l'expérience qu'il a faite avec une veſſie, eſt contraint de l'eſtimer du moins 7500 fois plus leger que l'eau.

Il eſt donc conſtant, que ceux qui prétendent peſer l'air, dans un Vaſe, qui ne retient pas, avant & après l'évacuation, la même quantité d'extenſion, ſe trompent aſſûrément, ſans en excepter même Aristote, qui a été de ce nombre.

No. XIV.

N°. XIV.

PROBLEME
PROPOSE' PAR
Mr. BERNOULLI
Mathématicien de la Ville de Basle.

A & B jouënt avec un dez, à condition que celui qui jette le premier as aura gagné. A jouë une fois, puis B une fois; après A jouë deux fois de suite, puis B deux fois, puis A 3 fois de suite, & B aussi 3 fois, &c.

Journal des Sçavans 1685. 25. Journal, du 26. Août. p. 314. Ed. de Paris. pag. 406. Ed. de Holl.

Ou bien, A jouë une fois, puis B deux fois de suite, puis A trois fois de suite, puis B quatre fois, &c. jusqu'à-ce que l'un d'eux gagne.

On demande la raison de leur sort?

Voyez ci-après N°. XL.

N°. XV.

EXTRAIT D'UNE
LETTRE
DE Mr. BERNOULLI.

MONSIEUR BERNOULLI nous écrit de Basle en Suisse, que le Samedi 18 Août dernier, il arriva dans cette Ville une chose assez surprenante. Il y a, dans la cave d'une maison, une source d'eau vive, entourée d'un enclos

Journal des Sçavans 1685. 29. Journal du 17. Sept. p. 361. Ed.

No. XIII. de Paris, & pag. 465. Ed. de Hol. clos quarré, de la hauteur de sept piés, & de la largeur d'environ quatre. L'eau est conduite par des tuyaux de bois à une fontaine publique, qui est à quelque cent pas de là, dans le marché aux poissons. Ces tuyaux reçoivent en chemin l'eau d'une autre source qui est plus élevée; & afin que cette eau, au lieu de couler vers la fontaine, ne regorge vers l'enclos, quand l'eau est basse, & ne passe par l'orifice du tuyau, comme il est souvent arrivé dans les grandes sécheresses, l'homme, qui en a le soin, a accoûtumé de boucher cet orifice avec une grosse cheville de chêne: ce qu'il fit aussi, il y a deux mois, que l'eau de la source se trouvoit au dessous de l'orifice: L'ayant voulu déboucher, le jour ci-dessus, parce que l'eau passoit la hauteur de cet orifice d'un bon demi-pié, à peine eut-il frapé deux ou trois fois sur le bouchon, qu'il sauta avec une telle violence, qu'il eût infailliblement tué ce Fontenier, s'il l'eût touché, étant poussé par une flamme de feu, qui sortit en même tems avec un furieux éclat. Cette flamme lui brula les cheveux, les poils de la barbe, & ses habits; éteignit sa chandéle, nagea quelque tems sur l'eau avec sifflement, & remplit tout l'enclos, & toute la cave d'une fumée épaisse, qui pensa le suffoquer, aiant été trouvé à demi-mort, & avec plusieurs marques de brulure au visage, par le Maître du Logis, qui y survint.



N°. XVI.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE Mr. BERNOULLI,

Ecrite de Bâle à l'Auteur du Journal,

concernant

La maniére d'aprendre les Mathématiques aux Aveugles.

LA maniére dont nous avons dit autrefois que l'on avoit apris à écrire à une fille aveugle de Genéve *, a donné lieu à Mr. BERNOULLI de nous écrire depuis peu là-dessus. Il nous marque, que ce que nous en aprit alors Mr. SPON, sur ce qu'on lui en avoit écrit, n'est pas tout à fait le même que ce qui fut exécuté dans cette rencontre. Il est d'autant plus croyable, que c'est lui même, qui enseigna à cette Fille à former les premiers traits de l'écriture. Cependant voici comment il pense qu'il lui seroit aisé de lui montrer & à toute sorte d'autres aveugles, l'Arithmétique, la Géométrie, l'Algébre, & par conséquent toutes les Mathématiques.

Journal des Sçavans 1685. 31. Journal du 19. Nov. p. 386. Ed. de Par. p. 498. Ed. de Hol.

Comme la quantité, qui en est l'objet, est exprimée, dans ces sciences, par des caractéres qu'on peut aussi bien apercevoir par l'attouchement que par la vuë; il lui feroit faire, dit-il, plusieurs morceaux de bois de la grosseur des Parallelepipedes de NEPER, afin que le chifre gravé sur la base de chacun, pût être

* *Mlle. Esther Eliz.* DE WALDKIRCH.

No.XVI. tre ſenti & diſtingué avec les doigts. Ces morceaux de bois ſeroient gardés en dix laiettes, ou petites cellules, ſeparées ſuivant le nombre des chiffres. On auroit, outre cela, un treillis, composé comme les Caſſes de lettres d'Imprimerie, de pluſieurs rangs diſtingués, ou pluſieurs caſſetins, qui ne pourroient contenir qu'un ſeul de ces parallelepipedes: & c'eſt dans ces caſſetins, ou cellules (dont les premiéres vers la droite ſignifieroient les nombres ſimples, les ſuivantes vers la gauche leurs dizaines, les troiſiémes leurs centaines, & ainſi des autres,) que la perſonne aveugle placeroit chaque chifre, de même que nous avons accoutumé de les écrire ſur du papier.

Pour ce qui eſt de la Géometrie; il dit qu'il lui feroit ſentir par l'ouverture d'un compas, ou de deux régles jointes par un bout avec une cheville, les différences de tous les angles, & tout ce qui en dépend; pourvû qu'elle eût d'ailleurs aſſez de capacité pour le comprendre.

Il ajoute, ſur le chapitre de la Demoiſelle de Geneve, une choſe qui mérite bien de n'être pas oubliée. C'eſt que ſur ce qu'il demandoit quelquefois à cette fille, ſi elle ne rêvoit point en dormant, comme nous, & s'il ne lui paroiſſoit point d'images, ou de phantaſmes; elle lui répondit qu'elle ne ſavoit ce que c'étoit que ces ſortes d'images; mais que quelquefois en dormant, il lui ſembloit qu'elle manioit les objets, de même qu'elle faiſoit en veillant.



No. XVII.

N°. XVII.

PARALLELISMUS RATIOCINII LOGICI ET ALGEBRAICI,

Quem,

Una cum Thesibus Miscellaneis,

Defendendum suscepit

Par Fratrum

JACOBUS & JOANNES BERNOULLI,

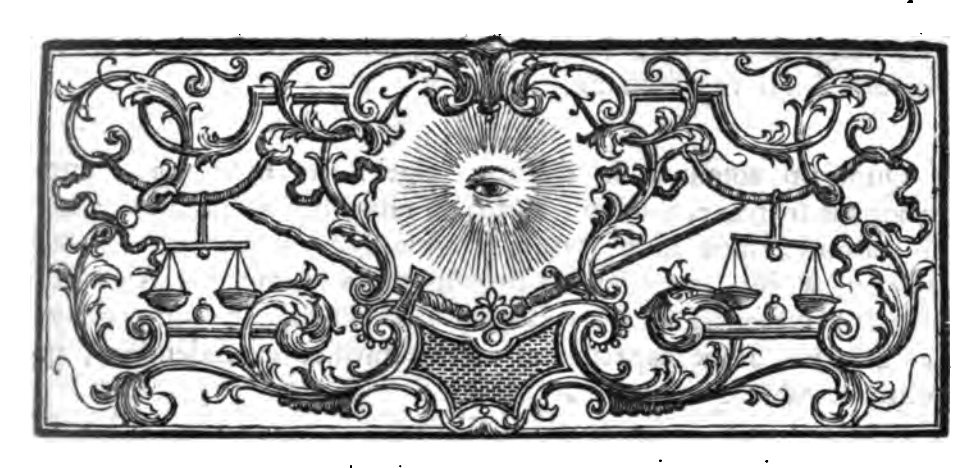
Ille Præsidis, Hic Respondentis vices agens.

Ad diem 9 *Septembris Anni* M. DC. LXXXV.

Editum primo

BASILEÆ

1685.



PARALLELISMUS RATIOCINII LOGICI ET ALGEBRAICI.

I.

IDEÆ rerum, de quibus judicare & ratiocinari docet Logica, Vocibus, quales sunt, *Homo*, *Equus*, *Petrus*, &c: Ideæ quantitatum, quarum proportionem inter se contemplari docet Mathesis, Literis Alphabeti, *a*, *b*, *c*, *x*, *y*, *z*, &c. significari solent. No. XVII.

II.

Quanquam enim ideæ mentis, quandoque vultu gestibusque, quod mutis ordinarium; & quantitates lineis, quod Geometris usitatum est, exprimi soleant; idque naturæ rei convenientius sit, attentionemque magis juvet: satius tamen est vocibus quam gestibus, literis quam lineis, id fieri; cum hæc signa

No.XVII. utut magis arbitraria, longe clarius, distinctius & expeditius signatum suum repræsentent.

III.

Quoniam autem, in discursu algebraico mediocri, longe major vis mentis requiritur, quam in ratiociniis vulgaribus, etiam difficillimis; hinc ideæ rerum integris quidem vocibus denotari solent: at pro quantitatibus singulis unica adhibenda Alphabeti literula; quod ad ideas, quantum fieri potest, in compendium redigendas, atque capacitatem mentis mirifice extendendam, apprime conducit.

IV.

Ut cujuslibet rei idea peculiari indigitatur voce, quæ ad illam solam significandam adhibetur; ita quælibet quantitas, in præsenti negotio, peculiari charactere insignitur; quod tamen non impedit, quo minus iste character in alio diversam significet.

V.

Cum plurium rerum ideæ componuntur, absque vel affirmatione vel negatione, id fit vocula *&*, ut *Virtus & Eruditio*: Cum plurium quantitatum ideæ componuntur, citra comparationem, id fit signo +, ut $a + b$.

VI.

Si a conceptu ideæ magis compositæ conceptum minus compositæ auferas, relinquitur prioris differentia; ita, quia in conceptu hominis, præter animalitatem, involvitur rationalitas, sequitur, ablato animalitatis conceptu, relinqui rationalitatem, ceu differentiam. Pariter si a quantitate majore subtrahatur minor, relinquitur utriusque differentia; quæ indigitatur signo —, ut $a - b$ significat differentiam inter a & b.

VII.

Cum duæ ideæ, inter quas convenientiam, identitatemve, aut disconvenientiam, vel diversitatem deprehendit mens, affirmantur vel negantur de se invicem, mediantibus particulis *est*, vel *non est*, dicitur *Enunciatio*, ut *Homo est animal*, *Homo non est brutum*.

tum. Cum duæ quantitates, inter quas æqualitatem percipit mens, junguntur signo æqualitatis $=$, dicitur *Æquatio*, ut $a = b$: at inæqualitatem denotant hæc signa $<$ & $>$, ut $a < b$, vel $a > b$. No. XVII.

VIII.

Quoniam hic comparationem instituimus inter convenientiam duarum rerum, & æqualitatem duarum quantitatum; apprime observanda est diversitas utrinque intercedens, quæ magnam huic negotio lucem affundet. Ut una quantitas dici possit *æqualis* alteri, debet communis mensura, illis eodem vicium numero applicata, utramque exhaurire; ita linea recta decem pedum, & curva pedum totidem dici solent *æquales*, quia pes decies applicatus, vel decempeda utrique semel applicata, eas accurate exhaurit. At ad hoc ut unum dicatur *esse* alterum, sufficit (qui linguarum genius est) si communis quasi mensura juxta posita, vel applicata subjecto & prædicato, deprehendatur exhaurire prædicatum, quamvis non exhauriat subjectum. Ita *transgressio legis* est communis mensura *furti*, *&* *peccati*, scil. id in quo conveniunt ambo; sed sufficit, ut exhauriat conceptum *peccati*, ad hoc ut possit dici, *Furtum est peccatum*; dummodo idem reperiatur etiam in conceptu furti, quamvis præter id adhuc aliud aliquid sit in hoc conceptu.

IX.

Ergo, cum convenientia, seu identitas subjecti & prædicati; plerumque sit inadæquata, ita quidem ut totum, quod comprehenditur in conceptu prædicati, comprehendatur quoque in conceptu subjecti, sed non vicissim; hinc fit ut enunciatio affirmativa converti non possit simpliciter: *Furtum est peccatum*, Ergo *Peccatum est furtum*. Secus atque se res habet in quantitatibus æqualibus: cum enim æqualitas sit reciproca, bene sequitur, Si $a = b$, Ergo conversim $b = a$.

X.

Observandum autem, cum attributa accidentalia prædicantur de

No.XVII. ſubjecto, conceptum prædicati non reperiri in natura ſubjecti: adeoque non tam prædicari debere indefinite de ſubjecto, qua tali, quam de inferioribus ſub ſubjecto contentis, iiſque vel omnibus, vel quibusdam. Nam ſi diceremus, *Homo eſt peccator*, *Homo eſt doctus*, videmur velle dicere, hominem, qua hominem, eſſe peccatorem, & doctum; ſive in conceptu hominis includi doctrinam, & peccatum; quod falſum: hinc additis notis univerſalitatis, aut particularitatis, diſtribuere ſolemus ſubjectum in individua, dicendo, *Omnis homo eſt peccator*, *Quidam homo eſt doctus*; Quarum propoſitionum ſenſus eſt, Petrus, Paulus & reliqua individua humana ſunt peccato infecta; Ariſtoteles, Plato, & plures alii ſunt docti. Neque enim peccatum & eruditio ingrediuntur conceptum naturæ humanæ, ſed tantum individuorum.

X I.

Ergo ſubjectum enunciationum univerſalium, & particularium, non tam eſt illud ipſum, quod expreſſum eſt, in natura ſua generica conſideratum, quam ſpecies, & individua ſub illo contenta; ſecus quam indefinitarum: unde quamvis hæ propoſitiones veriſſimæ ſint: *Omnis homo eſt peccator*, *Quidam homo eſt doctus*; iſtæ tamen, *Homo eſt peccator*, *Homo eſt doctus*, in rigore ſumtæ non ſunt veræ; quia utrobique non eſt idem ſubjectum.

XII.

Concludimus præterea, enunciationes univerſales, & particulares, quamvis expreſſione ſimplices, ſenſu tamen complexas, imo & compoſitas eſſe; ita quia hæc, *Omnis homo eſt peccator*, æquivalet huic; *Petrus*, &c. *qui eſt homo*, *eſt peccator*; includit tum incidentem hanc, *Petrus* &c. eſt *homo*; tum principalem iſtam: *Petrus* &c. *eſt peccator*, eaſque ambas copulativas; *Petrus*, *&* *Paulus*, *&* *Johannes*, &c. *eſt homo*: *Petrus*, *&* *Paulus*, *&* *Johannes*, *&c.* *eſt peccator*.

XIII.

In enunciationibus negativis res perinde ſe habet: Ad hoc ut

ut unum dicatur *non esse* alterum, non requiritur, ut nullam habeant communem mensuram, seu nihil in quo conveniant; sed saltem ut id in quo conveniunt non exhauriat prædicatum, quamvis conceptum subjecti exhaurire quandoque possit; ut, *Homo non est brutum*, *Animal non est homo*. Hæc enim posterior propositio non minus vera est, atque ista; *Animal non est lapis*; propterea quia conceptus hominis non reperitur totaliter in conceptu animalis; etsi pars hujus conceptus, nempe animalitas exhauriat integrum animalis conceptum. Interim hæc falsa foret: *Nullum animal est homo*; quia subjectum hujus propositionis non tam est animal, quam species, vel individua, animalis; quorum aliqua homines sunt; adeoque & hæ propositiones sensu complexæ & disjunctivæ sunt. Atque hinc petitur fundamentum conversionis propositionum, indeque natæ diversitatis syllogismorum; de quibus fusius agendi forte brevi dabitur occasio. No. XVII.

XIV.

Ratiocinatio Syllogistica nititur, ceu fundamento, Regula de Omni & de Nullo, item Regula Proportionis: Ratiocinatio Algebraïca axiomatibus: *Quæ uni tertio æqualia sunt, inter se sunt æqualia*; *Quod uno æqualium majus vel minus, altero quoque æqualium majus minusve est*, ut si $a = b$, & $c = b$, erit etiam $a = c$.

XV.

Omnis diversitas modorum & figurarum provenit a diversimoda extensione & comprehensione subjecti & prædicati, & varietate conversionis propositionum; At quia quantitates, quæ objectum sunt ratiocinii algebraïci, semper adæquate & secundum se totas sumuntur, atque æquatio earum simpliciter convertitur; hinc fit ut ratiocinium, circa illas occupatum, respondeat ex parte syllogismis expositoriis, eademque sit sequelæ necessitas, quomodocunque disponantur termini: Perinde enim est, sive ita colligas:

$a = b$

No. XVII.						
	$a = b$	$b = a$	$a = b$	$a < b$	$b > a$	$a < b$
	$c = a$	sive $c = a$	sive $a = c$	Item $c = a$	sive $c = a$	sive $a = c$
	Ergo $c = b$	E. $c = b$	E. $c = b$	E. $c < b$	E. $c < b$	E. $c < b$

quarum dispositionum prima primæ, secunda secundæ, tertia tertiæ respondet syllogismorum figuræ.

XVI.

Quia omnis ratiocinatio syllogistica solis recensitis regulis nititur; cum in negotio algebraïco, præter allata axiomata, alia plura in subsidium adhibenda sint, v. gr. *Si æqualibus æqualia addas, ab æqualibus æqualia auferas, æqualia æqualibus multiplices vel dividas; tota vel residua sunt æqualia*, &c. quibus nititur varia reductio per additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem, extractionem radicum, &c. hinc fit ut, in reductione minimæ æquationis algebraïcæ, plus lateat ingenii & judicii, quam in difficillimis ratiociniis, in communi alias vitæ usu obviis.

XVII.

Concludimus cum celeberrimo Authore *Scrutinii veritatis*, qui Lib. VI. cap. V., ita infit: *Algebra est vera Logica, ad detegendam veritatem, omnemque menti, quanta capax est, extensionem dandam utilis.*

THESES MISCELLANEÆ.

I.

In tanta Idearum multitudine, ut confusio vitetur, opus est; ut in certas referantur classes; velut Typothetæ solent suos typos in loculamenta: sed parum refert in quot, cum possit Typotheta distinguere loculamenta, vel juxta linguas, vel juxta formas, vel juxta characterum magnitudines, &c.

II.

Sagacitas mentis in inveniendo & apprehendendo, appellatur *Ingenium*; in discernendo & judicando *Judicium*.

III. Er-

III.

No. XVII.

Errores hominum plerumque oriuntur, non tam ex eo quod male ratiocinentur, quam quod male judicent de rebus non evidenter perſpectis.

IV.

Author *Artis cogitandi* male in exemplum proprietatis circuli affert æqualitatem radiorum, cap. 6. Part. 1. cum ſit ejus differentia, ut in *Centone* meo, Th. 16. monui.

V.

Riſibilitas eſt riſibilis proprietas.

VI.

Præcipuus Regularum & Canonum abuſus conſiſtit in eo, quod, cum plerunque mille laborent ambiguitatibus terminiſque vagis, & obſcuris ſint concepti, ex illis male intellectis ſoleamus concluſiones inferre; cum potius ex re perſpecta canones deberent explicari. Ita canon iſte, *Nihil poteſt alteri dare quod non habet*, anſam dedit errori, quo ſibi perſuaſit vulgus Philoſophorum, ignem non poſſe calefacere, niſi ipſe ſit calidus, id eſt, niſi poſſideat intra ſe ſimile quid illi rei, quam in nobis producit.

VII.

Luxuries & prodigalitas, non minus ac avaritia, redolent animum humi defixum & terrenis immerſum; quoniam iſta in poſſeſſione, illa in uſu rerum, ſummum bonum quærit.

VIII.

Quare Philoſophus nec comeſſator, nec potator; item nec avarus, nec parcus; ſed nec liberalis, nec prodigus eſſe poteſt.

IX.

Avarior eſt, qui muneribus Judices corrumpit, quam qui non corrumpit.

X.

Neglectus veſtium non ſemper ſordidæ avaritiæ, ſed quando-

No. XVII. que virtutis illi maxime adversæ, nempe contemptus rerum terrenarum, signum est.

XI.

An si quis in causa filii novercæ judicare possit, nequeat in causa fratris novercæ? Neg.

XII.

Circa saltationes, & choreas mixtas, scrupulus hæret, Si licitæ & honestæ, cur antehac prohibitæ? Si illicitæ & turpes, cur nunc concessæ? Si adiaphoræ, cur a quodam pio Patre definiuntur, Circulus, cujus centrum est Diabolus?

XIII.

Multa lectura in illis scientiis, quæ rationis vi addiscuntur, eo solummodo nomine commendanda est, quod per illam nobis innotescat, quid inventum sit, quidque inveniendum restet; ne breve vitæ curriculum, scientiarum promotioni destinatum, impendamus inveniendis illis, quæ alii ante nos invenerunt: quod alias plerumque fit, ubi hac lectura sumus destituti. Ita de PASCALIO refertur, eum adhuc puerum demonstrationem plurimarum EUCLIDIS propositionum proprio marte adinvenisse, priusquam de Mathesi quicquam inaudivisset. Pariter HUGENIUS se primum credidit inventorem novi illius Baroscopii, in *Ephemerid. Erud. Gall.* anni 1672. ad diem 12. Decembr. descripti; cujus tamen constructionem CARTESIUS, recensente alicubi PASCALIO, diu ante tentaturus fuerat. Hoc & mihi (si parva magnis componere fas est) in multis usu venit; præcipue in iis, quæ de angulo contactus, de invenienda Periodo Juliana, de gravitate ætheris &c. meditatus fueram, antequam varias Eruditorum Ephemerides, aliosque libros evolvissem.

XIV.

Licet autem inventionis gloria iis, qui sic tempore & fortuna posteriores existunt, a primis inventoribus prærepta sit; arte tamen & ingenio hisce neutiquam impares censendi sunt.

XV. Præ-

XV.

No.XVII.

Præter usum memoratum, nescio quem alium lectura haberet, nisi forte apud illos, qui propria industria & ingenio destituti, ex aliis sapere opus habent.

XVI.

Omnes Disciplinæ Mathesi indigent; Mathesis nulla; sed per se sola sibi sufficit.

XVII.

Qui sibi, Mathesi duce, formavit judicium, nihil invenit tam arduum, quin dicto citius determinare queat, quid circa illud dici, fieri, aut sciri possit, vel non possit.

XVIII.

Quocirca, nullum certius indicium, an ad aliquid arduum suscipiendum quis idoneus sit, quam si rebus mathematicis percipiendis aptus sit: unde juventus ante omnia Mathesi initianda; ut si inepta deprehensa fuerit, a difficili studio mature removeatur.

XIX.

Quanto cæteris scientiis præstet, vel ex eo constat, quod cum reliquæ de rebus, in se certissimis ac constantissimis, non nisi probabiliter, illa de rebus maxime fortuitis & casualibus, v. gr. sortitionibus, apodictice & certissimo ratiocinio discurrit. Exempla sunto.

XX.

Sempronius amicos Titium & Caium præmio centum Imperialium mactare vult; jubetque ut de illo æqua sorte certent: quare hi, assumentes singuli 12 nummos, ludunt tribus tesseris, hac conditione, ut si 11 puncta jaciantur, Titius tradat nummum Caio; at si jaciantur 14 puncta, Caius tradat nummum Titio; & ut ille præmium reportaturus sit, qui primum omnes nummos habuerit. Promittit tamen insuper Caius, si perdiderit, centum alios Imperiales de suo erogare collusori, propterea quia deprehensum fuit, sæpius evenire posse 11 quam 14 puncta. Ludunt,

No. XVII. dunt, vincit Caius; Titius putat se circumventum esse; rem defert ad Judicem, qui pronunciare debet, utrum æqua sorte sic contenderint, necne. Quotusquisque nunc Judicum est, qui crederet Caium impostorem? Ego interim, depositis, quandocunque libuerit centum Imperialibus contra unum, Titii personam sustinebo.

XXI.

Titius Caiam ducit uxorem; Pater utriusque conjugis, superstes adhuc & opulentus. Titius ita format contractum matrimonialem, ut si nata fuerit ex conjugio proles, uxorque ante maritum vita cesserit, maritus bonorum communium, tam in matrimonium utrinque allatorum, quam hæreditate acquisitorum, auferat duas tertias, utriusque videlicet parente, vel superstite adhuc, vel mortuo: vel, ut dimidiam tollat, si Caiæ pater vita functus fuerit, superstite altero: vel denique, ut tres quartas partes accipiat, reliquam liberi, si suus Pater obierit, superstite vicissim Caiæ parente. Cum autem Parenti Caiæ hic ultimus articulus videretur iniquior; proponit futurus gener, ut absque distinctione casuum, omnia uno includantur articulo, ejus tenoris, ut viduus duas tertias auferat, quicquid futurum sit de conjugum parentibus. Annuit Caiæ Pater. Quæritur utrum contractus matrimonialis, hoc posteriori modo conceptus, sit faventior Caiæ liberis, quam priori, quem initio proposuerat Titius; & quem recusaverat Caiæ Pater? Neg. Nam, si futuræ portiones hæreditariæ Titii, Caiæve, propemodum æquales æstimentur, vocenturque singulæ, a; & summa bonorum in matrimonium utrinque allatorum, b: erit expectatio Titii, juxta primitus propositum articulum, $(47a + 47b) : 72$: at, juxta initum contractum, $(48a + 48b) : 72$; quæ priore major est $(a + b) : 72$; nec poterit utraque expectatio æqualis esse, nisi portio hæreditaria Titii plus quam duplo major ponatur portione Caiæ.

XXII.

Patet hinc, quam J Cto necessaria sit Mathesis. Taceo vulgarem quem illi præbet usum in componendis litibus, circa divisiones agrorum, &c.

XXIII. Ra-

XXIII.

No. XVII.

Rationes Professoris MONTRÆI adversus systema meum Cometicum allatæ, & *Ephemeridibus Erudit. Gall.* anni 1682 insertæ, nullius sunt pretii.

XXIV.

Etiam Abbas CATELANUS **, circa doctrinam de oscillationibus funependulorum fallitur.

XXV.

Nemo naturam Reflexionis & Refractionis hactenus citra omnem scrupulum explicuit : prioris explicationem inveni nuper, quæ mihi plene satisfacit ; alteram si quis explicabit, huic habebo gratias.

XXVI.

Sciatherica, atque hinc etiam automata nostra publica motum Solis, bonum horæ semiquadrantem, tardius insequi, certissimo mihi constat indicio.

XXVII.

Si quis de admirando flammæ, nuper, hic Basileæ, ex cavitate Siphonis per medias aquas ex improviso erumpere visæ, phænomeno nobiscum conferre voluerit ; inveniet nos paratos. ††

** *Vide supra* Nos. VIII. IX. X.

†† *Vide supra* Num. XV.

* *Ad Thesin* XX. Vide *Artem Conjectandi*, Part. I. Probl. 5.

† *Ad* XXI. Problema generalius propositum vide N°. seq. pag. 236, 237. Solutionis ratio hæc est. Sit summa bonorum in matrimonium utrinque allatorum $= b$; portio hereditaria Titii $= a$, Caiæ $= c$; numerus casuum quibus accidit Caiam ante Patres mori $= m$; quibus accidit primum mori Titii patrem $= n$; patrem Caiæ $= p$. Ergo probabilitas ejus eventus quo Caia ante senes moritur, erit $= \frac{m}{m+n+p}$; ejus quo Caia utrique superstes est $= \frac{n}{m+n+p} \times \frac{p}{m+p} + \frac{p}{m+n+p} \times \frac{n}{m+n}$; illius, quo Caia patri suo, non patri Titii superest $= \frac{p}{m+n+p} \times \frac{m}{m+n}$; ejus denique quo non suo, sed patri Titii, superest $= \frac{n}{m+n+p} \times \frac{m}{m+p}$.

Jam autem, secundum propositos articulos, primus casus Titio dat $\frac{2}{3}b$; secundus $\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c$; tertius $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$; quartus $\frac{3}{4}b + \frac{1}{4}a$. Ejus itaque ex-

No. XVII. pectatio eſt $\frac{m}{m+n+p} \times \frac{2}{3}b + \left(\frac{np}{(m+n+p)(m+p)} + \frac{np}{(m+n+p)(m+n)}\right) \times \left(\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c\right) + \frac{mp}{(m+n+p)(m+n)} \times \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c\right) + \frac{mn}{(m+n+p)(m+p)} \times \left(\frac{3}{4}b + \frac{3}{4}a\right) = ((8m^3 + 17m^2n + 14m^2p + 9mn^2 + 24mnp + 6mpp + 8n^2p + 8np^2)b + (9m^2n + 9mn^2 + 16mnp + 8n^2p + 8np^2)a + (6m^2p + 16mnp + 6mpp + 8n^2p + 8np^2)c) : 12(m+n+p)(m+n)(m+p)$.

Sed, juxta contractum initum, primus caſus & ſecundus Titio dant, ut ſupra, ille $\frac{2}{3}b$, iſte $\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c$; at tertius dabit $\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c$, quartus $\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a$. Igitur expectatio Titii erit $\frac{m}{m+n+p} \times \frac{2}{3}b + \left(\frac{np}{(m+n+p)(m+p)} + \frac{np}{(m+n+p)(m+n)}\right) \times \left(\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c\right) + \frac{mp}{(m+n+p)(m+n)} \times \left(\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c\right) + \frac{mn}{(m+n+p)(m+p)} \times \left(\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a\right) = ((8m^3 + 16m^2n + 16m^2p + 24mnp + 8mn^2 + 8mp^2 + 8n^2p + 8np^2)b + (8m^2n + 8mn^2 + 16mnp + 8n^2p + 8np^2)a + (8m^2p + 16mnp + 8mp^2 + 8n^2p + 8np^2)c) : 12(m+n+p).(m+n)(m+p)$.

Expectationum itaque differentia eſt $((-m^2n - mn^2 + 2m^2p + 2mp^2)b. - (m^2n + mn^2)a + 2(m^2p + mp^2)c) : 12(m+n+p)(m+n)(m+p)$.

Hinc, ſi, ut in N°. præſenti, fiat $a = c$, & $m = n = p = 1$; erit expectatio prior $= (94b + 50a + 44c) : 12.3.2.2 = 47(b+a) : 72$, poſterior $(96a + 48a + 48c) : 12.3.2.2 = 48(b+a) : 72$; differentia $(2b - 2a + 4c) : 12.3.2.2 = (b+a) : 72$.

Si velis æqualem eſſe utramque expectationem; fac differentiam $(2b - 2a + 4c) : 12.3.2.2 = 0$, habebiſque $a - 2c = b$; hoc eſt $a > 2c$.

At ſi ponas, ut in N°. ſequenti, $a = c$, ſed $m = 1$, $n = p = 2$; invenies expectationem priorem $= (354b + 246a + 228c) : 12.5.3.3 = (59b + 79a) : 90$; poſteriorem $= (360b + 240a + 240c) : 12.5.3.3 = (60b + 80a) : 90$; differentiam $(a+b) : 90$.



N°. XVIII.

N°. XVIII.

THESES LOGICÆ
DE
CONVERSIONE
ET
OPPOSITIONE ENUNCIATIONUM,

Quas,

CUM ADNEXIS MISCELLANEIS,

Ad diem 12 *Februarii Ann.* M. DC. LXXXVI,

Tertii Speciminis publici loco

Cl. Competitoribus ventilandas sistit

JACOBUS BERNOULLI, L. A. M.

Editæ primum

BASILEÆ

1686.



THESES LOGICÆ
DE
CONVERSIONE & OPPOSITIONE
ENUNCIATIONUM.

I.



ONVERSIO & Oppositio Enunciationum sunt affectiones earum relatæ, quibus partes alicujus propositionis varie immutantur. Num. XVIII.

II.

Conversio transponit subjectum in locum prædicati, & vicissim: *Oppositio* utrumque suo relinquit loco.

III.

In *Illa* salva manere debet veritas utriusque Propositionis, & convertendæ & conversæ: in *Hâc* minime.

IV.

Ibi enim explicatur, quibus legibus, quantitas & qualitas E-

N.XVIII. nunciationis immutanda veniat, eo fine, ut conversa necessario vera maneat: *Hic* exponitur, quid fiat de veritate & falsitate alicujus Propositionis, ubi secundum quantitatem & qualitatem modis omnibus immutatur.

V.

Quæ ut manifesta fiant, requiritur duntaxat, ut naturam Enunciationum tam affirmantium, quam negantium propius intueamur, prout eam in nupero nostro *Parallelismo* quadantenus excussimus.

VI.

Ea est Propositionis Affirmantis natura, ut attributum uniat cum subjecto, non quidem quoad omnem attributi *Extensionem*, sed tamen quoad ejus omnem *Comprehensionem*: quod ibidem innuimus, quando diximus, communem mensuram subjecti & prædicati exhaurire debere totum prædicatum; analogia petita a quantitatibus æqualibus, quas eadem communis mensura metitur. Sensus est: omne id, quod *comprehenditur* in idea prædicati, reperiri debet in subjecto; non item omne id, ad quod *extenditur* prædicatum. Cum enim istud subjecto plerumque latius sit, ejus extensio restricta esse intelligitur per extensionem subjecti, adeo ut non nisi eam extensionis suæ partem significet, quæ subjecto competit. Ex. gr. cum dico: *Rhombus est Parallelogrammum*, innuere volo, totam ideam Parallelogrammi comprehensam esse in idea Rhombi (quoniam destructa unica ideæ hujus parte, Parallelogrammum exuet naturam suam, & cessat esse Parallelogrammum); &, quanquam illa idea extendatur quoque ad alias figuras præter Rhombos, me tamen illam nunc in sola Rhombi specie considerare.

VII.

Negantis contra Propositionis genius est, ut attributum a subjecto separet, quoad omnem attributi *Extensionem*, non autem præcise quoad totam ejus *Comprehensionem*; quod in *Parallelismo* nostro significavimus, dicendo, communem mensuram subjecti & prædicati non exhaurire debere totum prædicatum, tametsi

con-

conceptum subjecti exhaurire quandoque possit. Sensus est: Idea totalis prædicati non debet reperiri in subjecto, utut ejus partes aliquæ subjecto competere possint; adeoque omne id, ad quod idea totalis attributi *extenditur*, a subjecto excludi necessum est. Ex. gr. Cum dico; *Rhombus non est Parallelogrammum rectangulum*, non significo subjectum & prædicatum nihil habere commune, (conveniunt enim in eo, quod ambo sint *Quadrangula*, ambo *Parallelogramma*,) sed ideam totalem *Parallelogrammi rectanguli* non comprehendi in idea Rhombi, & proinde omnes quoque species in extensione ideæ totalis contentas, nempe Quadratum, & Oblongum, de Rhombo negandas esse. N.XVIII.

VIII.

Patet hinc, attributum omnis Propositionis affirmantis, vi affirmationis, sumi peculiariter; negantis, universaliter.

IX.

Ex hactenus dictis, si angustia chartæ nobis permitteret esse prolixiores, facile deinceps reddi posset ratio, cur Universalis affirmans converti tantum queat *per accidens;* Universalis negans & Particularis affirmans *simpliciter*; Particularis autem negans converti nequeat omnino.

X.

Id in universum verum est, affirmantem non posse converti in negantem, neque negantem in affirmantem; ex eo enim quod duarum rerum ideæ quoad se totas, vel quoad partem, inter se conveniunt, non sequitur, illas secundum se totas, vel secundum partem aliam disconvenire. De Conversione *per contrapositionem;* ubi non manent iidem utrobique termini, sermo hic nobis non est.

XI.

Quod *Oppositionem* Enunciationum spectat, non est ut illi immoremur; satis enim attendenti manifestum est, *Contrarias* simul posse esse falsas, non veras: *Subcontrarias* vice versa posse simul esse veras, non falsas: *Utriusque generis* interdum unam veram

N.XVIII. esse, alteram falsam: *Contradictoriarum* autem alteram semper veram esse, alteram falsam.

XII.

Contrariarum & *Subcontrariarum* una vera, altera falsa est; quando vel de specie prædicatur genus, differentia, proprium secundi aut quarti modi; vel accidens quoddam inseparabile, de subjecto; vel etiam quando opposita de se invicem prædicantur: *Illarum* utraque falsa, & *Harum* utraque vera est, quando species prædicatur de genere, vel accidens separabile, de subjecto, &c.

XIII.

Occasione ejus, quod de *Contradictoriis* monuimus, coronidis loco Lectori monstrabimus, quo pacto verum quandoque ex falso directe elici possit. Ex vera propositione, directo & legitimo ratiocinio, non nisi vera inferri potest. Ex falsa propositione elicitur quidem plerumque falsa conclusio (quo referendæ sunt Geometrarum ἀπαγωγαὶ, seu deductiones ad absurdum, quibus assumpta falsa assertione adversarii devenitur tandem ad propositionem aliquam notorie falsam, ut, partem esse æqualem toti, aut ad similes absurditates;) sed quandoque etiam propositionis falsæ, initio assumptæ, contradictoria, adeoque vera. Ita EUCLIDES *Lib.* IX. *prop.* 12. ex eo, quod E *dicatur non metiri ipsum* A, directa & legitima consequentia infert, *Ergo* E *metitur ipsum* A. Sic THEODOSIUS *Lib.* I. *prop.* 12. *Spharic.* ex eo, quod G *dicatur non esse centrum Sphara*, evidenti sequela deducit, Ergo G *est sphara centrum.* Atqui hic demonstrandi modus mirabilis valde & peringeniosus est, quo ex contradictorio assertionis assertio ipsa directa demonstratione infertur. Quod vero æque scientificus sit, nec minorem pariat certitudinem, ac reliqui, sic demonstrari poterit. Adversarius contradictoriam assertionis meæ, aut falsam putat esse, aut veram: Si concedat esse falsam, eo ipso assertionem meam veram esse agnoscere debet; sin contra putet esse veram, oportet, ut omne id, quod exinde legitima infero consequentia, adeoque (per hypothesin) ipsam meam assertionem quoque veram agnoscat, & consequenter ut utrumque contradicto-

tradictoriorum fateatur esse verum; quod cum sit absurdum, N.XVIII.
evidenter sequitur, contradictoriam assertionis meæ, ex qua fluxit hoc absurdum, falsam esse, adeoque assertionem ipsam, quæ illata fuerat, veram. Q. E. D.

XIV.

Unde formari posset hoc Paradoxum: Ex falso nonnunquam sequitur verum, & tamen semper absurdum.

THESES MISCELLANEÆ.

I.

Differentia, quæ constituit tertium prædicabile logicum, est illud quod, præter genus, primo in qualibet re concipio, quodque proin nulla opus habet demonstratione: at *Proprium* est, quod ex natura rei sic conceptæ demum fluere intelligo, per præviam demonstrationem.

II.

Quare unum idemque, pro vario respectu, ejusdem rei nunc differentia potest esse, nunc proprium; prout videlicet vel hoc, vel illud, *primo* inibi concipio. Ita si *Parabolam* considerem, ceu Figuram ex cono sectam, sectione parallela lateri opposito; ista sectio erit Differentia Parabolæ; e qua deinceps fluit hæc Proprietas, quod axis segmenta sint inter se, ut quadrata ordinatim applicatarum. Sin vicissim Parabolam contempler, ceu Figuram in plano projectam, cujus segmenta axis sint in duplicata ratione ordinatim applicatarum, attributum hoc erit Differentia; posse autem talem figuram secari ex cono, hoc erit ejus Proprium.

III.

Locutiones forenses, quæ fundantur in imputatione; ut cum Sponsor solvit, & Debitor solvisse dicitur, vel cum Filius adoptivus dicitur Filius: Item *Locutiones secundum apparentiam, aut opinionem vulgi*, quæ fundantur in sensuum testimonio; ut si Co-

N.XVIII. pernicanus quis diceret, Sol movetur, volens dicere, Terra movetur; aut cum Poeta canit, *Terræque, urbesque recedunt*, dicturus, navigantes recedere: Hæ, inquam, Locutiones & similes, si ad aliquod receptum Troporum genus referendæ sunt, ad Metaphoram referuntur.

IV.

Ad quæstionem, *Utrum Monarchia præferenda sit Aristocratiæ?* cum distinctione videtur respondendum: Si illi, penes quos suprema est potestas, in utroque regimine sunt boni, Illa Huic; si mali, Hæc Illi præferenda erit: propterea, quoniam Princeps majoribus viribus opibusque pollet, tum ad salutem populi procurandam, si bonus est; tum ad tyrannidem exercendam, si malus, quam Magistratus in Republica, cujus reditus sunt modici, potestas, partim in se limitatior, partim adversarum factionum obice impedita.

V.

Omnis Democratia, nisi Anarchia sit, Aristocratia esse debet.

VI.

Ubi proprii emolumenti aviditas, & partium studium in Rempublicam irrepsit; satius est, vacantia munia publica sorte, quam suffragiis redintegrari. Quanquam autem hoc optandum sit, ob id ipsum tamen, quia lues illa irrepsit, sperandum vix est.

VII.

De bonitate vel malitia alicujus facinoris, plerumque ab eventu, qui perversus hominum mos est, judicare solent. Si subditi armis sua jura tueri velint, sinistroque fruantur successu, audient seditiosi & rebelles; si prospero, erunt assertores libertatis, propugnatores fidei, &c.

VIII.

Regulæ accrescendi & decrescendi, quas in Testamentorum executione præscribunt Jurisconsulti, similes sunt *Regulæ* Arithmeticæ, quam *Pigri* vocant, in illorum inventæ gratiam, qui Abacum Pythagoricum memoriæ imprimere, vel nolunt, vel nequeunt.

IX. Ad

IX.

N.XVIII.

Ad reddendam causam phænomeni naturalis, non sufficit talem exhibere, ex qua quomodocunque sequatur effectus; sed requiritur, ut ex illa effectus præcise ea, qua conspicitur, quantitate sequatur: Ita ad explicandam Reflexionis naturam, non sufficit ostendisse, cur corpus, offendens firmum obicem, reflectatur quomodocunque; fieri namque posset, ut causa quæ sic affertur, si revocaretur ad calculum, exhiberet angulum reflexionis inæqualem angulo incidentiæ: Id quod indicium præberet, non imperfecte, sed omnino falso explicatam esse.

X.

Quare Physicus, absque Matheseos ope, suarum assertionum nunquam certus esse potest; nec Mathesis, ob majorem saltem perfectionis gradum, sed absolute, ad Physicam necessaria est.

XI.

Disciplinæ Mathematicæ concretæ, quales sunt, Physica, Medicina, Astronomia, Optica, Statica, Balistica (& si vis Astrologia) &c. Mathesi abstractæ certa tantum principia, ceu fundamenta, superaddunt, partim alibi probata, partim sola experientia hausta, super quibus deinceps non minus in rigore geometrico ratiocinandum, atque in Mathesi abstracta super notionibus communibus, ceu Axiomatibus nobiscum natis: Ita Physica supponit *Leges motus*: Medicina *Fabricam corporis humani*: Astronomia *Fabricam*, *seu Systema mundi*: Astrologia *influxum Astrorum in sublunaria, & quod Fata hominum, urbium, regionum, dependeant ab illa cæli configuratione, quam obtinuit, cum in lucem ederentur, vel primordia sumerent*: Catoptrica, *Quod anguli incidentiæ, & reflexionis sint æquales*: Dioptrica, *Quod Sinus angulorum incidentiæ & refractionis sint proportionales*: Statica, *Quod momenta crescant pro ratione distantiarum ab hypomochlio*: Balistica, *Quod spatia a gravi cadente percursa sint in ratione duplicata temporum*.

XII.

Patet hinc, certitudinem harum scientiarum unice dependere a certi-

N. XVIII. certitudine ipsorummet principiorum, non a modo formandi conclusiones, quæ omnes evidentissimo ratiocinio ex principiis deduci debent. Quæ ratio est, cur Mathesis abstracta sit invictæ certitudinis; Astrologia vana & futilis; Cæteræ vero, mediæ certitudinis inter utramque: quoniam talia sunt principia, quibus illæ superstructæ sunt.

XIII.

Patet etiam, ad quascunque scientias quæ quantitatem pro objecto habent, addiscendas, paucorum principiorum prærequiri cognitionem, ex quibus, qui Mathesin abstractam callet, reliqua proprio marte & exiguo labore adinvenire & eruere potis est.

XIV.

Motum Projectorum, non tantum seclusa, sed etiam posita consideratione resistentis medii, fieri deprehendo in curva parabolica, contra assertum WALLISII, *Cap.* X. *Prop.* 8. *Mechan.*

XV.

Pulex insultum faciens in Terræ globum, illum loco dimovere valet; contra quartam Regulam motus *Cartesianam*.

XVI.

Non datur Centrum magnitudinis, sicut Centrum gravitatis.

XVII.

Fieri potest revera, & citra verborum lusum, ut globus perfecte rotundus super perfecte lævigato plano declivi in superficie Terræ constitutus, non descendat rotando.

XVIII.

Liquor homogeneus in ambobus siphonis cruribus, sive ea sint æqualis, sive inæqualis crassitiei, propterea ad eandem se componit altitudinem, quia tum demum commune gravitatis centrum utriusque liquoris infimum, quem potest, locum occupat.

XIX.

Non dantur Puncta, Lineæ, Superficies physicæ, sed mathematicæ.

XX. Per

XX. N.XVIII.

Per vulgarem Regulam alligationis, certus tantum & determinatus invenitur solutionum numerus; animadverto autem ejusdem quæstionis (saltem ubi plusquam duo miscibilia miscenda sunt,) infinitas dicto citius, & quidem in meris integris, reperiri posse solutiones: Dico enim, si binæ differentiæ alternæ æque multiplicentur juxta quemvis numerum, & binæ aliæ juxta alium numerum, & ita porro; quod hi æque multiplices exhibituri sunt novam rationem, qua mixtio optata perfici poterit.

XXI.

In *Stereometria* G. F. M. *Propp.* IX. XI. XX. male mensurantur Pyramides & Coni decurtati, (quales sunt vasa illa vinaria, quæ nostrates vocant *Bockten*,) reducendo illos per æquationem basium ad Prismata & Cylindros. Quam enim ille reperit truncatæ pyramidis soliditatem 312 pedum, revera duntaxat est pedum 304. Differentia satis sensibilis, quæ toleranda non est.

XXII.

Nec doliorum capacitas (etiamsi perfecte cylindrica forent) virga visoria cubica hic usitata accurate exploratur.

XXIII.

Species visibiles ex omnibus punctis in omnia radiare; & Animam esse totam in toto, & totam in qualibet parte: Mysteria sunt antiquæ Philosophiæ, nostrum hoc tempore captum superantia.

XXIV.

Cæcus quandoque melius de coloribus judicat vidente.

XXV.

Modum docendi Cæcum scribere, qui in *Magia naturali*, seu *Jocoseriis naturæ & artis*, *Centur.* 3. *Prop.* 22. ex CARDANO lib. 17. *Subtil.* depromptus legitur, in praxi non succedere, tum ratio, tum experientia me docuerunt. Feliciorem inivi antehac viam cum lectissima Virgine E. E. a W.

N.XVIII.

XXVI.

Oculorum suffusio non provenit ab opaca humoris crystallini pellicula, ut existimat ROHOLTUS *Part. pr. Cap. ult.* sed a sedimento in ipso humore aqueo collecto.

XXVII.

Cuspidem enim acus, qua sedimentum removetur, non solum non attingere humorem crystallinum, docet experientia: sed & extra humoris crystallini focum constitutum esse, colligitur ex eo, quod cuspis, durante operatione, a patiente oculo distincte videatur. Cur vero inversa apparere debeat, ejus quidem rei causam nondum satis assequor.

XXVIII.

Eo momento, quo ambo oculi conjunctim objectum inspiciunt, uterque separatim peculiare inspicit.

XXIX.

Ex unica observatione umbræ, de stylo normaliter infixo quovis tempore projectæ, declinationem Plani quomodolibet inclinati investigare licet. *

XXX.

Invenienda sit analytice universalis Regula, quæ exhibeat, quo anni tempore, sub data Poli elevatione, contingant maxima & minima crepuscula? †

XXXI.

Solutio Problematis de Pactis dotalibus nuperi mei *Parallelismi* Adnexis inserta, supponebat, æque facile accidere posse, ut Senes Caiæ supervivant, ac Caia senibus. At quoniam probabilius est, Caiam ut juvenculam Senibus supervicturam; hinc excessus, quo expectatio Titii, juxta articulum initio propositum, superatur ab ejus expectatione, juxta articulum correctum, revera quidem minuitur; attamen hæc perpetuo superat illam, quantacunque ponatur etiam probabilitas pro vita diuturniore Caiæ: quod generali comparatione ostendere facile esset. Unicum tantum moneo: Si duplo probabilius sit, Caiam supervicturam Seni,

* *Videatur Numerus* XXXVI. † *Vid. Numerus* LIII.

ni, quam Senem Caiæ, prior expectatio Titii erit $(79a+59b):90$; posterior $(80a+60b):90$; quarum differentia $(a+b):90$. Unde patet ad habendas veras Titii expectationes, requiri ut præcise determinetur, quanto probabilius sit, Caiam alterutri Seni supervicturam. Quanquam autem id determinatu videri posset omnino impossibile, erui tamen quodammodo potest, insperato calculo, ex observationibus factis super catalogis demortuorum, quales *Parisiis* & *Londini* menstruatim & hebdomadatim distribui solent. Observatum fuit ex collatione plurium istiusmodi catalogorum (ut narrant *Ephem. Erud. Gall.* Ann. 1666. Nº. XXXI.) quod ex centum infantibus eodem tempore natis, elapso sexennio, superstites remaneant 64: elapsis annis XVI, 40: annis XXVI, 25: annis XXXVI, 16: annis XLVI, 10: annis LVI, 6: annis LXVI, 3: annis LXXVI, 1: annis LXXXVI, 0. Quo posito, & subducto calculo, deprehendo, contra 59 casus, qui juvenculam annos XVI egressam, ante Senem LVI annorum, vita privant, non nisi 101 casus esse, quibus accidit contrarium; unde colligo non plane duplo probabilius esse, ut juvencula Seni supervivat, quam ut hic illi; adeoque expectationem Titii, juxta inita pacta, superare eam, quam habuisset juxta primitus propositum articulum, quantitate omnino majore, quam est $(a+b):90$. N.XVIII.

XXXII.

Coronidis loco placet hic adjungere, quæ circa ludum pilæ reticularis, a nemine hactenus observata, minime vulgari calculo reperi:

I. Si quatuor, verbi gratia, lusibus constare debeat victoria, duoque Collusores A & B æqualium sint virium; A evicerit jam tres lusus, & B duos; A poterit deponere 3 imperiales contra 1: Si A tres lusus & B unum; deponet A 7 contra 1: Si A tres lusus, & B nullum; deponet A 15 contra 1: &c. Si A duos lusus & B unum, deponet A 11 contra 5: &c. Si A tres lusus, & præterea puncta quindecim, B vero duos lusus & puncta 45; deponet A 9 contra 7: &c. Atque hac ratione construxi Tabel-

N.XVIII. Iam ad singulos casus, qui accidere possunt inter collusores pares.

II. At si Collusorum unus altero sit peritior, danda est imperitiori prærogativa aliquot numerorum, ut æquo marte certetur: Reperio autem, Si A duplo peritior sit; illum Collusori concedere posse puncta 30, (& quidem cum aliquali adhuc lucro pro se;) Sin triplo; illi concedere posse minus quam 45, sed multo plus quam 30; adeoque ad æquandam, quantum fieri poterit, sortem, dare debere ipsi B 45, sumendo sibi 15: &c.

III. Quod si A concedat ipsi B prærogativam aliquot punctorum, eoque ipso sors æquata supponatur; atque vicissim indagandum sit, quanto ille hoc peritior sit: animadverto, subducto calculo, peritias Collusorum esse incommensurabiles inter se, id est, veram illorum rationem nullo numero posse exprimi, tametsi id fieri prope verum possit. Ita si A concedit ipsi B semi-quindecim; erit ipso peritior $1\frac{1}{10}$: Si quindecim; erit peritior $1\frac{3}{10}$: si semi-triginta; superabit ejus peritiam $1\frac{3}{5}$: si triginta; erit agilior ipso $1\frac{9}{10}$: si semi-quadraginta-quinque $2\frac{3}{5}$: si quadraginta-quinque; $4\frac{1}{5}$ vicibus circiter; &c.

IV. A concedit ipsi B semi-triginta, & ipsi C 45: Quantum concedere potest B ipsi C? Resp. Semi-quadraginta-quinque.

V. A concedit ipsi B semi-triginta, & B ipsi C semi-quadraginta-quinque. Quantum concedet A ipsi C? Resp. Quadraginta-quinque.

VI. Si agilitates trium Collusorum A, B, C, separatim spectatorum sint in ratione 3, 2, 1; ludatque A contra B & C, illis concedere potest paulo plus quam triginta.

VII. Si agilitates quatuor Collusorum A, B, C, D, separatim spectatorum habeant se, ut 1, 5, 2, 3, ludantque conjunctim A & B contra C & D: hi illis concedere fere possunt semi-quindecim.

VIII. Si A possit concedere B 45 puncta; malit autem largiri prærogativam in lusibus integris, quam in punctis; quæritur, quot integros lusus ipsi concedere debeat? *Resp.* Non pauciores quam 35 ex lusibus 36.

FINIS.

Videatur de hisce Calculis Epistola Auctoris *Gallice scripta & ad calcem* Artis conjectandi *edita.*

N°. XIX.

Dni. BERNOULLI

DUBIUM CIRCA CAUSAM GRAVITATIS a rotatione Vorticis Terreni petitam,

Communicatum in litteris Lipsiam missis ad .....

CONSULEBAM antehac per litteras Cl. STURMIUM Professorem Altorfinum, super quædam non exigui momenti dubia physica. Palmarium eorum, quod me semper torserat, & torquet etiamnum, spectabat explicationem mechanicam causæ gravitatis a Terreni Vorticis gyratione petitam. Respondebat paulo post perhumaniter & ingeniose Eruditus Vir; non ita tamen, ut pertinacius hærentem scrupulum prorsus exemerit. Quare secunda vice ejus lacessivi oraculum, alteris ad ipsum datis litteris, quas frustra expectato diu responso, ad manus ejus pervenisse subdubito. Ille interim, quæ privatim inter nos acta fuerant, impertivit publico, insertis, cum Dubio meo, tum sua ad illud Responsione, paragrapho XXIII. Epistolæ suæ ad *Henricum* MORUM exaratæ, annexæque secundæ parti Collegii Curiosi, quod non ita pridem publicum aspicere passus est. Id cum vidissem, judicabam haud ægre laturum Virum Celeberrimum, si & instantiam meam publici juris fieri paterer: ut si vel ille, vel quispiam alius nodum solveret, ei haberent omnes mecum naturæ Curiosi gratias. Dubium autem meum primitus propositum sic habebat. „ Inter varias Doctorum opinio-„ nes, illa mihi maxime videtur plausibilis, quæ gravitatem cor-

Acta Erud. Lipf. 1686. Febr. p. 91.

Hh 2 po-

No. XIX. „ porum terrestrium derivat a gyratione materiæ Terram ambien-
„ tis, ejusque conatu recedendi ab ejus centro. Vereor tamen, ne
„ non & hæc cum Mechanicæ legibus accurate satis conspiret:
„ Posita enim hac hypothesi, certum esse puto, corpora gra-
„ via secundum illam lineam detrusum iri, secundum quam ma-
„ teria subtilis a Terra recederet: recedere conatur autem quæ-
„ libet particula, (qui genius est rotationis) secundum li-
„ neam talem, quæ in eodem jacet plano cum circulo per
„ rotationem particulæ descripto, idest, secundum lineam pa-
„ rallelam Æquatori. Ita dum punctum A (*Vide Fig.* I.)
„ circa punctum B motu diurno describit parallelum A C, acqui-
„ rit conatum recedendi secundum lineam A D in eodem plano
„ jacentem cum A C, parallelamque Æquatori F E. Quare neces-
„ sum omnino esset, ut corpora gravia vicissim per lineam D A
„ repelleret, non vero per perpendicularem G A; sicque sub no-
„ stra latitudine gravium lapsus a perpendiculo ad horizontem in-
„ clinaret 48 gradibus, augereturque subinde cum sphæræ obliqui-
„ tate.“ Ad quæ ille respondit sequentia: „ Quod naturam spectat
„ gravitatis, in eo primum inter nos convenit, quod non alia
„ plausibilior videatur, aptiorque explicandæ rei difficillimæ hypo-
„ thesis ea, quæ gravitatem corporum terrestrium derivat a gyra-
„ tione materiæ Terram ambientis, ejusque conatu recedendi *ab*
„ *ejus centro*, quæque, si verbis hisce, quibus eam recte con-
„ cepisti, firmiter inhæreas, ea quam deinceps adjungis, difficulta-
„ te nihil urgebitur, ut pote quæ supponit conatum recedendi
„ non a centro Terræ, sed a centro circuli Æquatori paralle-
„ li, quo posito, necessum est illud ἄτοπον sequi quod tu in-
„ fers, quodque idem *Hobbianæ* hypothesi pluribus objicit *Hen-*
„ *ricus* MORUS, *Enchiridii* sui *Metaphysici* pag. 115. seqq.
„ (Edit. prioris). Enimvero, cum ista ætheris circa Terram sup-
„ posita gyratio, vorticesque mundani omnes, ad explicanda
„ plurima phænomena alias inexplicabilia valde accommodi, cau-
„ sam naturalem habere non possint, sed ad arbitrium ac sapien-
„ tissimam Dei dispositionem veniant reducendi; talis ipsorum
„ concipi debet coordinatio, quæ fini obtinendo possit apta vi-
„ deri.

„deri. Quod si ergo vorticum aut orbium istorum cælestium No. XIX.
„fluidorum talem gyrationem supponamus, qualis in orbibus „aut globis solidis contingit, ut partes singulæ singulos etiam „circulos, circa singula centra describant, totusque adeo vortex „non tam circa centrum, quam circa axem aliquem convolva„tur, non solum hoc, de quo nunc sermo nobis, incommodi „sequetur; sed necessum etiam foret, hoc motu vorticoso stel„las & corpora mundana, non sphærica, sed cylindrica potius „facta; sub polis gravitatem non esse, &c. Quamobrem in vor„ticibus hisce fluidis, in quibus particulæ singulæ gyrare suppo„nuntur, ita singulorum circulos Æquatori parallelos oportet sta„tuere, meo judicio, ut omnes tamen gyrationis suæ impetum „ex uno eodemque Æquatoris centro nactas concipiamus, ea„rundemque adeo conatus recedendi ab uno eodemque puncto de„pendeat: quo posito, ea quæ te urget difficultas sponte sua eva„nescet; prout adjectam figuram nostram cum tua comparanti „manifestum erit. Posse autem corporis alicujus motum circula„rem conjunctum esse cum conatu recedendi, non solum a cen„tro proprio, hoc est, puncto in ipso plano circuli medio, sed „etiam ab alio quodam puncto tanquam polo suo, exemplo fundæ „constare potest, qua circumactus (*Fig.* 2.) in orbem IKL, lapis L, „non solum a centro O, sed etiam, ac vel maxime, a manu rotan„tis M, recedere nititur, conatu in ipsa manu abunde sensibili.

Hæc tum ille. Instantia vero, quam huic responsioni deinceps opposui, his concepta erat verbis: „Quod quæstionem de natu„ra gravitatis, quam a gyratione materiæ Terram ambientis, „ejusque conatu recedendi ab ejus centro probabilissime derivari „dixeram, lusum quæris in verbis, *ab ejus centro*: agnosco non „satis circumspecte me locutum, dicendumque fuisse, *a centro* „*circuli Æquatori paralleli*: utut interim verum sit, materiam „illam non posse ab isto centro recedere in directum, quin si„mul a centro Terræ recedat, quamvis oblique: ita dum punc„tum *c* (*Vide Fig.* 3.) recedit a *b*, in directum per lineam *cd*, „recedit eadem opera a centro Æquatoris *a*, linea *ad* existente „majore quam *ac*: adeo ut quamvis dixerim, ætherem habere

rece-

No. XIX. „recedendi *a centro Terræ* conatum, ſubintellige *obliquum* ex *c* „in *d*, eadem tamen maneat difficultas; quare videlicet æther re„pellat corpora gravia verſus idem centrum, via directa potius „per lineam *da*, quam iterum obliqua per lineam *dc*. Ad tol„lendam hanc difficultatem, Vorticum diſpoſitionem ais conci„piendam eſſe talem, quæ fini obtinendo poſſit eſſe apta, cir„culoſque a ſingulis particulis deſcriptos ita ſtatuendos, ut om„nes gyrationis ſuæ impetum ab uno ſphæræ centro nactæ intel„ligantur. Veriſſime ſane! Atque id unicum eſt, quod concipi „a me non poſſe conqueror, nec poſſe a quovis alio puto; „non magis atque concipere poſſumus, ſingula puncta in ſphæ„ræ convolutione deſcribere circulos maximos, quorum utrum„que Mechanicæ legibus æque adverſari judico: ſive enim Vor„tices fingantur ſphærici, ſive cylindrici, ſolidi ſive fluidi, nul„la eorum concipi poterit ratio alia, quam quæ fiat circa axem „immotum, cujus ſingula puncta ſint centra totidem circulorum „parallelorum in ſuperficie ſphæræ deſcriptorum, atque gyratio„nis impetum non a centro ſphæræ, ſed a propriis centris nan„ciſcentium; uti patere potuit, granis arenæ in globum velociſ„ſime in gyrum actum conjectis, quorum unumquodque reſiliet „per planum ſui circuli.

„Ad exemplum Fundæ, dubito illud cum ſucceſſu tentari poſ„ſe, ut ſcribis; quin crediderim potius, fruſtraneum fore cona„tum rotandi, in manu extra planum circuli a lapide deſcriben„di conſtituta; propterea quod hoc caſu mihi perſuadeam, non „tenſum fore funem, ſed remiſſum, atque eo ipſo probaturum, „nullum talem eſſe in lapide a manu recedendi niſum; cum ſi „quis eſſet, is utique funem extenderet. Pone vero funem ex„tendi, ſentirique in manu lapidis conatum, cui conſtabit co„natum iſtum directe tendere a manu rotantis, non ſecundario „& oblique tantum, primario niſu facto per planum circuli a „lapide deſcripti? Sed demus æque fortiter recedere conari la„pidem, tum a manu rotantis, tum a centro gyri ſui; nulla „foret ratio tamen, cur ſi aliud repelleret corpus, id faceret „verſus manum potius, quam verſus gyri ſui centrum; uti ſup„po-

„ ponimus ab æthere repelli gravia, versus Terræ centrum dun- No. XIX.
„ taxat, non versus centrum circuli paralleli. Accipe Clar. Vir, „ quæ mihi inciderunt hac de re conjecturæ. Consideravi duos „ in sphæra circulos, in quodam puncto (quod locum habitatio- „ nis nostræ referat) sese tangentes, alterum maximum, mino- „ rem alterum; quales depicti sunt in Sphæra Tropicus & Eclip- „ tica: deprehendique sectionem mutuam planorum utriusque „ circuli incidere in lineam aliquam, quæ est communis utrius- „ que circuli tangens: dum ergo punctum contactus, rotari in- „ cipiens juxta ductum Tropici, conatum acquirit recedendi per „ tangentem, hactenus æque æstimari poterit recedere a centro E- „ clipticæ, atque a centro Tropici; cum eadem sit utriusque tangens. „ Deinde attendi, quamvis portio ætheris in loco habitationis nostræ „ conatum habeat recedendi per tangentem, posse tamen fieri, ut „ actualis trusio communicetur non per tangentem quæ horizonta- „ lis est, sed per perpendicularem, ductam a centro circuli maxi- „ mi ad Zenith, uti globus *a* (*Vid. Fig.* 4.) veniens ex *d* conatum „ habet eundi in *b*, trudit tamen globulum *e*, quem oblique offen- „ dit, non juxta lineam *a b*, sed juxta seriem *a c*. Interim non dis- „ simulandum, pristinam hic redire difficultatem: nam 1°. Nul- „ la est ratio, cur pulsio globulorum fiat in plano verticali po- „ tius, quam in plano circuli paralleli, aut quovis alio; cum „ tangens illa, secundum quam recedere conatur globulus, in- „ finitis planis sit communis. 2°. Neque causa manifesta est, cur, „ si pulsio illa fit in plano verticali, fiat potius juxta lineam tan- „ gentis *a b* perpendicularem, quam juxta quamvis aliam; eo „ quod globulus *a* undique circundatus infinitis globulorum se- „ riebus, subinde eos impelleret in alias & alias partes.

Forte non tædebit Lectorem, si hic subjungam quæstionem alteram ad propagationem radii visivi, in eadem posteriore Epistola Cl. Viro propositam; quoniam non parvam causarum latentium analogiam utrinque intercedere suspicor.

Quæstio erat; *Cur visio fiat in instanti, sonus propagetur successive? Cur item radius deferatur linea tantum recta, sonus autem per quasvis etiam ambages, aures feriat?* „ Cui discrimini (sic ha- „ bebant

No. XIX. „ bebant verba mea) aliter satisfieri posse non puto, quam si „ corpuscula, quæ sunt vehiculum luminis, supponantur immediate se tangere; quæ vero sunt vehiculum soni, a se mutuo „ intervallulis separata esse; quod ita concipio: Suppono vehiculum soni, particulas scilicet aeris subtiliores *a, a, a* (*Vide Fig.* 5.) „ vel singulas seorsim, vel plures conjunctim, per impetum, „ aut primigenium, aut a materia subtili sibi communicatum, „ describere gyros quosdam, certæ ac natura præfinitæ magnitudinis 1, 2, 3, 4; sitque corpus sonum edens A B, quod concussum tremulo motu subinde accedat in C D: hoc igitur propellet omnes sphærulas, 1 in *α*, 2 in *β*, 3 in *γ*, 4 in *δ*; ubi „ manifestum est, si istæ sphærulæ eandem servarent amplitudinem, necessum esset, ut eodem tempore, quo A B fertur ad „ C D, *m* perveniret in *n*, ibique aurem feriret. Notandum ergo, cum particulæ aeriæ, in circumferentia sphærulæ rotatæ, „ a corpore A B percutiuntur, illas condensari primum, sphærulamque angustari; qua coarctata, particulæ debitum suæ gyrationi spatium reposcentes, propellunt particulas sequentis sphærulæ 2, quæ iterum coarctatur, sed non adeo valide ac prior; „ coarctata propellit tertiam, hæc quartam, &c. sic ut præcipuum, quod in sono fit, sit aeris condensatio; major equidem circa corpus sonorum, minor autem in spatio remotiori. „ Hinc enim planum fit, cur sonus non deferatur in instanti ad „ aurem; cur fortior sit prope corpus sonorum, & tandem „ languescat; cur item feratur oblique, siquidem sphærulæ condensatæ ex omni parte sese dilatent, atque omnes circumjacentes sphærulas propellant. In visu quidem etiam facile capio, „ cur lumen vicissim deferatur in instanti; nam si globuli secundi „ Elementi E F (*Vide Fig.* 6.) sint solidi, ac sese immediate contingant, condensari nescii; sequitur ut quo momento primus „ globulus impellitur a corpore luminoso E, eodem sentiatur impulsus ab oculo G. Sed divinare nequeo, cur oculus constitutus in H, quo radii directi propter corpus opacum K interjectum pertingere nequeunt, non videat tamen lumen per radium „ E F H; siquidem globulus F non possit pergere ad G, quin si-

„ mul

n.° 8 9 & 10
M
P
B
Q
R A
D
L
N H
F
O
I
G

n.° 19.
Fig. 1
G
D
A
B
F
H
E
L
K
O
I
M
Fig. 3.
d
c
b
a
A
Fig. 5
B
1
a
a
C
a
a
D
2
α
3
β
γ
4
m
δ
n
E
Fig. 4
d
a
b
e
c
Fig. 6.
K
F
H
G

„ mul impellat seriem F H. Similis fuit difficultas, ubi de descen- No. XIX.
„ su gravium quaesivi, cur fiat secundum lineam perpendicularem
„ potius, quam secundum quamvis aliam: atque dubito, annon
„ eadem utriusque ratio sit, quam profunde ignoro.

No. XX.

SPECIMEN LIBRI
DE MOMENTIS GRAVIUM &c.
Autore J. F. V. * *Lucensi.*

INSIGNES Mathematici, GALILAEUS, TORRICELLIUS, WALLIS, MARCHETTUS, ac plures alii, existimant esse veram hanc Propositionem: *Momentum totale gravis, ad momentum quod habet super plano declivi, est ut longitudo plani declivis ad perpendiculum:* cujus contradictoriam sic demonstro. *Acta Erud. Lips. 1684. Nov. p. 511.*

Si grave conformatum in globum, nitatur plano horizontali (*Fig.* 1) radius I K, perpendicularis horizonti, est linea directionis per quam centrum I exigit descendere perpendiculariter. Si vero idem globus (*Fig.* 2) nitatur duobus planis inaequaliter declivibus X C, Z C (quae pro hac demonstratione sint aequalis longitudinis, & faciant angulum rectum X C Z; cum perpendiculo vero X N, quod sit aequale rectae C O parallelae horizonti, & cum recta N C horizonti parallela, quae sit aequalis perpendiculo Z O, constituant triangula rectangula X N C, C O Z, invicem aequalia) radius I H, parallelus plano X C, per quem centrum I exigit descendere super X C, est linea directionis, respectu descensus super X C, ac radius I F, parallelus ad Z C, est linea directionis, respectu descensus super Z C.

Jam, sicut planum horizontale sustinet pondus aequale momento, quo globus exigit descendere perpendiculariter; quia globus momentum suum totale censetur exercere in radio I K, planum vero horizontale, applicatum in K, ac totaliter impediens descensum perpendicularem, resistit illi momento per virtutem aequalem; ita planum Z C, sustinet pondus aequale momento, quo idem globus exigit descendere super X C, quia

* JOHAN. FRANCISCUS VANNIUS, e S. J.

No. XX. momentum globi ut descendat super XC censetur exerceri in radio IH; & planum ZC tangens globum in H, & totaliter impediens ejus descensum super XC, toti illi momento (quod respectu totalis est solum partiale) resistit per virtutem æqualem: planum vero XC, sustinet pondus æquale momento, quo globus exigit descendere super ZC, quia momentum globi ut descendat super ZC, censetur exerceri in IF, ac planum XC, tangens globum in F, & impediens descensum super ZC, resistit momento globi per virtutem illi æqualem. Itaque momentum totale globi, sustinetur plano horizontali; momentum super XC, sustinetur plano ZC; momentum super ZC, sustinetur plano XC. Quia vero, *momentum totale globi super plano horizontali, æquatur momentis partialibus simul sumptis ejusdem globi super planis declivibus* XC, ZC; sicut pondus globi, quo gravatur planum horizontale, æquatur partibus ponderis ejusdem globi simul sumptis, quibus gravantur plana ZC, XC: Si momentum totale ad momentum super plano declivi XC, sit ut XC ad XN; ac momentum idem totale, ad momentum super ZC, sit ut ZC ad ZO, nimirum ut XC ad NC: (quia ex hypothesi XC est æqualis ZC, & NC est æqualis ZO); momentum totale ad momenta partialia simul sumpta, est ut hypotenusa XC, ad latera XN & NC in directum posita, ejusdem trianguli XNC. Atqui hypotenusa XC, non est æqualis lateribus XN & NC, sed est illis minor. Ergo si totale momentum ad partialia, sit ut XC ad XN & NC, momentum totale non æquatur, sed est minus momentis partialibus simul sumptis. Ergo momentum totale, ad momentum super plano declivi XC, non est ut longitudo plani XC, ad perpendiculum XN.

Hæc demonstratio non videtur obnoxia ulli exceptioni; quia si momentum totale, ac momenta partialia, considerentur in uno & eodem globo, vel in globis æqualibus; velocitas, qua globus descendit perpendiculariter, ad velocitatem, qua descendit super plano declivi XC; impulsus, quo globus conatur deprimere planum horizontale, impediens descensum perpendicularem, ad impulsum quo conatur deprimere planum ZC, applicatum in linea directionis, & impediens descensum super XC; onus quo gravatur planum horizontale, ad onus quo gravatur planum ZC; momentum totale, ad momentum super XC; habent unam, & eandem rationem: quod sufficiat indicasse.

Ex his aliisque principiis legitime demonstratis, in *Exegesi de momentis gravium* deprompta est proportio momenti totalis ad partiale, ac cæteræ quæstiones resolutæ sunt. Quum autem tum vectis communis, tum ille, quem continent gravia impedita ne descendant super planis declivibus, se ipsos non agnoscant in quorundam libris: idcirco utriusque natura, in *Exegesi de vecte*, nova methodo indaganda visa est; ac voto exitus respondit. Demum in *Exegesi de motu æqualiter accelerato*, præter

ter motum ipſum facilius ac brevius expoſitum : propoſitiones, quæ antea nitebantur falſis principiis de momentis gravium, emendatæ ſunt, novæ nonnullæ additæ. No. XX.

* * *

Viri cujuſdam μαθηματικολάτου *Cenſura.*

OBJECTIO Viri, ut apparet, peringenioſi, contra receptum &, mea ſententia, demonſtratum Staticorum Theorema, non contemnenda eſt quidem; ſolvi tamen omnino poteſt negando momenta in planis X C & Z C in unum poſſe addi, ut componant momentum gravis abſolutum; & fraudi Viro docto fuiſſe videtur, quod illa vocavit partialia, hoc totale. Quid enim, ſi grave ſuſtentetur a duobus planis, X C inclinato, & A C verticali (*Fig.* 3)? utique momenta in ambobus planis in unum addita non poſſunt æquari uni ex ipſiſmet, totum parti; quod tamen ſecundum objicientis ſententiam fieri deberet: momentum enim in plano verticali utique eſt ipſum momentum gravis abſolutum.



No. XXI.

Dn. BERNOULLI
SOLUTIO DIFFICULTATIS
CONTRA PROPOSITIONEM QUANDAM MECHANICAM.
Authore J. F. V. Lucensi propositæ,
insertæque Actis Lipsiensibus Mense Novembri 1684.

Acta Erud. Lips. 1686. Febr. p. 96. PROPOSITUM est huic Autori ostendere, *Momentum totale gravis, ad momentum quod habet super plano declivi, non esse ut longitudinem plani declivis ad perpendiculum*; argumento petito a globo duobus planis declivibus normalibus innixo, cujus momenta partialia, quæ utrumque planum sigillatim sustinet, excedere deberent simul sumpta momentum ejus totale; id quod Autor judicat absurdum.

Subjuncta est loco citato ad difficultatem hanc brevis Cl. cujusdam Viri Responsio, qua recte quidem negat absurdum esse, momenta in ambobus planis simul sumpta excedere momentum globi absolutum: at cum negationem deinceps suam conatur illustrare exemplo duorum planorum, inclinati XC, & verticalis AC; videtur negligere præcipuum objectionis nervum, qui in eo situs est, ut momentum globi super utrolibet plano statuatur sustineri ab altero *totaliter & adæquate*; quod hic non fit: Cum enim planum AC (*Vide Fig.* 3.) sit obliquum ad lineam directionis

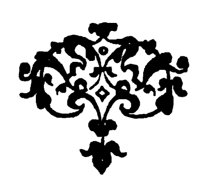
tionis I H, ſecundum quam globus exigit deſcendere ſuper X C; No. XXI.
itemque ſit obliquum Planum X C ad lineam directionis I F, ſecundum quam globus exigit deſcendere ſuper A C: ſequi videtur, momenta deſcenſuum alterna alternis planis ſuſtineri non tota, ſed *imminuta*; unde quis colligeret, etiamſi *tota* excedant momentum globi abſolutum, *imminuta* tamen illi æquari poſſe: quod Autorem objectionis in ſua potius opinione confirmaret.

Itaque plenius ſolvenda difficultas eſt, dicendo, confundi in illa pondus & momentum ponderis. Poteſt enim fieri, ut pondus maneat unum idemque, variet tamen ſubinde momentum, quod exercet in premendo alio corpore, pro diverſitate applicationis utriuſque, indeque natæ reſpectivæ celeritatis. Ita pondus, applicatum longiori vectis brachio, majus utique exerit momentum in obicem breviori applicatum, quam eſt momentum ſuum abſolutum, cujus menſura eſt ipſummet pondus. Quantum autem momentum exerceat quodcunque pondus in premendo obice, determinatu facile eſt; dummodo conſideretur, quid fieret, ſi deſcenderet pondus. Ita ſi globus I, (*Vide Fig.* 1.) plano horizontali K innixus, deſcenderet in L, ſpatio K L; ipſum planum eodem tempore per idem ſpatium K L ferri deberet; adeoque cum celeritates forent æquales, requiritur in plano, ad hoc ut globi deſcenſum impediat, tanta reſiſtendi vis, quantum eſt ipſum globi pondus; tantumdemque proin æſtimatur momentum quo globus in planum agere intelligitur: unde etiam vocatur momentum abſolutum. At ſi deinceps globus ſuſtentetur duobus planis, res ſecus ſe habebit. Quod ut manifeſtum fiat: ſunto (*in Fig.* 4.) plana X C & Z C, æqualiter declivia, quorum igitur utrumlibet a ſuſtentati globi pondere dimidio prematur; ſed quanto momento, ſic explorabimus. Fingamus globum deſcendere ex I in L; quod dum facit, conatum premendi plana, tranſmittit per rectas I F & I H, planis iſtis perpendiculares: quare globo exiſtente in L, reperientur iſta in Q P & R P, ſitu priori parallelo, ſiquidem cujuſlibet plani reſiſtentia ultra citraque globum æqualiter diffuſa ſupponatur. Eo ergo tempore, quo globus permeat rectam I L æqualem

CP;

No. XXI. CP, planum XC non nisi transigit spatium CQ, brevissimam videl. distantiam inter XC & QP, id est, celeritas globi ad celeritatem plani est, ut CP ad CQ. Unde ne loco moveatur planum XC, requiritur in illo tanta resistendi vis, quæ sit ad dimidium ponderis globi quo urgetur, ut reciproce celeritas globi CP, ad celeritatem plani CQ. Censetur autem resistendi vis cujusque obicis æquipollere momento, quod in illum exercetur. Quare etiam momentum globi super plano XC, est ad dimidium ponderis ejusdem, ut CP ad CQ. Simili ratione momentum super plano ZC est ad alteram ponderis medietatem, ut CP ad CR; id est, ut CP ad CQ. Adeoque jam momentum globi super utroque plano simul sumptum, est ad totum ejus pondus (seu momentum absolutum) ut CP ad CQ. Est vero CP major CQ. Igitur momentum &c. Q. E. D.

Concludimus, quo acutiorem angulum ambo plana invicem constituunt, eo magis, & quo obtusiorem, eo minus momenta partialia excessura esse momentum totale; ratione rectæ CP ad CQ, illo casu, existente majore; hoc, minore: donec tandem apertura anguli tanta fiat, ut ambo plana coalescant in unum horizontale; quo facto, concident quoque rectæ CQ & CR cum CP, sustinebitque planum non nisi ipsum momentum globi absolutum. Patet etiam hinc, globum inter duo plana ita sustentatum, non male referre cuneum, cujus vim ingentem in findendis corporibus multis vicibus superare notum est absolutum momentum virium, quibus adigitur.



No. XXII.

N°. XXII.

METHODUS RATIOCINANDI,

SIVE

USUS LOGICÆ

In præclaro aliquo Phænomeno Physico enodando,

Speciminis loco

In Academia Patria

IX. *Calend. Aprilis* M. DC. LXXXVI,

Publica Prælectione ostensus

A

JACOBO BERNOULLI, Basil.

Editum primo

BASILEÆ

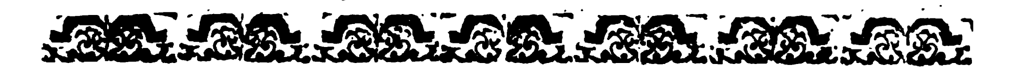
1686.

ALMÆ UNIVERSITATI
BASILIENSI,
MAGNIFICO RECTORI,
SPECTATISS. FACULTATUM DECANIS
CÆTERISQ. ACADEMIÆ PROCERIBUS
AMPLISSIMIS,

*Quorum nutu & indultu hæc naſcuntur
nobis otia,*

Præſentes Pagellæ ſacræ ſunto!

LEG



LECTORI S.



ON *semper* Hugeniis *scribimus, & Wallisiis, vel Philosophiæ novis ditandæ inventis operam navamus; sed quandoque animum a severioribus ad jucundiora & faciliora deflectimus, inque iis, quæ jam novimus, studiosæ Juventuti methodice proponendis vires nostras experimur, præsertim quando jubet Superiorum voluntas, qui publico destinatos suorum profectus specimine explorare satagunt; ubi non tam in inveniendo acumen & industriam, quam in docendo solertiam spectant. Huc igitur & præsens collimavit Exercitium Academicum, quod cum nata occasio Dialecticum esse voluerit, non potui non, ut scopo accommodarem meo, plurima vix alias condonanda Logicalia illi immiscere. Sed quoniam, hoc non obstante, benigna satis Auditorum judicia expertum est, cæteraque, si fateri verum licet, totius solidioris Philosophiæ*

facile fundamenta continet, amicorum quorundam hortatu motus haud gravate, ut videret lucem, & si posset, etiam prodesset exteris, annui. Vale.



MAGNI-



Magnifice Domine Rector,

Proceres Academici, Experientissimi, Sapientissimi, Clarissimi,

Hospites cæteri Reverendi, Exoptatissimi, Præstantissimi, Nobilissimi.



OMNE Trinum, quod aiunt, perfectum. No.XXII.
Tertia jam intra biennium vice has premo cathedras, Specimina Vobis editurus ejus Artis, quæ Rationem formare docet. Ut igitur omne ferrem punctum, & postremis hisce laboribus, quousque licet, perfectionis colophonem imponerem, omnino consultum esse duxi, ut (qui præcipuus Artium Propædeuticarum scopus est) abstractas Ideas, quibus toties aures replevi vestras, tandem etiam ad praxin aliquam referrem, atque sic declinarem familiare illud Logicorum fatum, qui postquam inanibus technolo-

No. XXII. gematis & notionibus secundis totam sæpe ætatem triverunt; nihilo vel in rebus agendis prudentiores, vel in cognoscendis sagaciores inde evasisse deprehenduntur. Ab hoc, inquam, ut caveam mihi vitio, constitutum mihi est, Methodum ratiocinandi, Usumque Logicæ in præclaro aliquo Phænomeno Physico feliciter enodando, hac Prælectione Vobis ostendere, adhibito simul in auxilium alterius Logicæ, cujus *Parallelismum* nuper dedi, puta Algebræ, ratiocinio; partim ut eos, qui non ita pridem calculum istum me manuductore addidicerunt, illius quoque applicandi doceam methodum; partim ut aliis etiam salivam moveam, ad hanc divinioris auræ particulam sibi comparandam. Ita vero ad institutum meum isthæc accommodabo, ut & Usum vulgaris Logicæ, ratiociniis subinde in formam redactis, Vobis commonstrem. Quod dum facturus sum, Auditores, attentas præbete dicendis aures, oculosque in Schemata chalcographica Vobis exhibita defigite.

Phænomenum, quod in Dissertat. mea *de Gravitate Ætheris*, *p.* 100. *seqq.* concisius pertractavi; nunc vero ut Methodus Ususque utriusque Logicæ eo clarius patesceret, prolixius enodandum mihi proposui, istud est: *Si Fistula cylindrica 29 pollicum longitudinem non excedens, una extremitate clausa, altera patula, repleta sit ex parte mercurio seu argento vivo, reliquo spatio aeri concesso, eaque postmodum obstructo digiti pulpa orificio invertatur, atque erecta perpendiculariter immergatur cum obstruente digito in stagnantem alicubi mercurium; explorandum est, an & quousque remoto digito mercurius in fistula descensurus sit?*

Quicquid ab humana mente cognosci potest, vel cognoscitur ut Principium seu Axioma, vel ut Principiatum seu Conclusio. Illa, quorum veritas adeo est in propatulo, ut intellecta sola terminorum significatione in dubium revocari nequeant, cognoscuntur priori modo, neque proin ullo ratiocinio vel demonstratione opus habent. Ex horum autem numero satis constat non esse præsens Phænomenum, cum neminem Vestrum putem esse, Auditores, qui audita & percepta vocum vi, determinare statim ausit Phænomeni eventum. Sequitur ergo, illum non nisi ut conclusio-

sionem, adeoque prævio ratiocinio, cognosci posse; & quandoquidem omnis conclusio elici debeat ex præmissis, quarum veritas ut concessa, vel aliunde cognita supponitur, hinc utique patet, ad præsens negotium expediendum, necessario aliqua debere dari sive ex insitis notionibus, sive ab experientia hausta principia, super quibus deinceps debito modo ratiocinandum est, & sine quibus quæsiti cognitio obtineri nequit. Si quis enim me juberet divinare numerum, quem quis mente concepit, neque adjiceret conditiones, quibus vestitus esse debeat, quibusque ceu characteribus ipse mihi sese prodat, is ἀδύνατον profecto mihi præciperet: Pariter quoque, antequam quis perspectam habeat naturam Aeris, reliquaque Principia hydrostatica ad præsentem quæstionem necessaria, is illius solutioni frustra insudabit; & si paulo sit morosior, usu fere illi veniet, quod antehac celebri cuidam Professori Amstelodamensi, * primo CARTESII Discipulo, juxtaque Defensori acerrimo, *Clave Philosophica* claro, cujus tanto libentius, quanto opportunius mentionem hic injicio. Cum ante quadriennium scribendæ modo dictæ dissertationi in Belgio vacarem, atque inter peregrinandum, experiundi destitutus ipse copia, hærerem circa eventum hujus ipsius, quod nunc præ manibus habemus, Phænomeni; Amstelodamum concessi, consulturus ibidem hac de re celebre illud Oraculum. Ille, intellecta mei adventus causa, subticuit primo, sed ne quid nescire videretur, argentum in tubo non descensurum, sed in eadem, qua prius, hæsurum altitudine, magistraliter asseveravit. Ego, qui descensurum certo prænoveram, & scire saltem efflagitabam, utrum major minorve Aeris copia in tubo relicta illud humilius detrusura esset, modeste Philosopho regessi; ad quæ ille torvo me statim intueri vultu, dehinc percontari quis essem, postea indignari, stomachari, in Philosophiam Experimentalem invehi, eamque histrionicam nuncupare, & me tantum non vi ex ædibus suis expellere. Hæc erat tum solutio celebris istius Cartesiani. Nos vero ut minus militariter, ac magis philosophice rem aggredi-

* Joh. DE KAY.

No. XXII. grediamur, stabiliemus ante omnia Principia quædam; solvendo nostro Problemati apta, quorum veritatem ab Auditoribus meis suppono ut concessam, non quasi probatione non indigeant (agimus enim hic de Problemate aliquo Matheseos concretæ, puta Physicæ vel Hydrostaticæ, cujus Principia immediata non sunt Axiomata illa, vel Notiones communes nobiscum natæ, quæ abstractæ Principia constituunt †:) verum quoniam partim Principiorum horum veritas mille Experientiis, & forte etiam Rationibus probata jam abunde est, partim etiam & præcipue, quia Auditorum illi, quos hæ tum experientiæ tum rationes latuerint, ex conclusionis meæ veritate, quam ipsismet eorum oculis spectandam & usurpandam exhibebimus, ipsorum quoque Principiorum, ex quibus illa fluxit, veritatem, actu cognitionis, ut sic dicam, reflexo colligere tuto poterunt. Principia autem sunt sequentia:

I. *Omnes partes cujuscunque liquoris æqualiter a centro Terræ remota, a pondere perpendiculariter sibi incumbente premi debent æqualiter: & si premuntur æqualiter, eo situ quiescunt; sin minus, non prius componuntur ad quietem, quam res ad æquipondium reducta fuerit, assurgentibus hinc partibus quibusdam, subsidentibus inde aliis.* Celebratissimum hoc Principium hydrostaticum fluit ex ipsa natura Liquidi, cujus particulæ non instar partium corporis duri sibi mutuo connexæ, sed a se mutuo separatæ & disjunctæ sunt, adeoque aliæ aliis cedere aptæ, nimirum minus pressæ validius pressis. Ex. gr. Esto (*Fig. I.*) Vas A, impletum liquore quocunque usque in BC: dico, liquorem hoc statu quieturum. Assumta enim quavis planitie horizontali DE; quoniam singulæ partes hujus planitiei æqualem sibi superincumbentem habent liquidi molem, æquali quoque urgentur pondere, nullaque proin ratio est, cur una alteri cedere debeat. Ponamus jam, concusso vase assurrexisse liquorem ex una parte in F, ex altera descendisse in G: dico, illum in hoc situ nequaquam permansurum; quoniam planitiei DE pars H majus sibi nunc incumbens habet pondus, quam

† Vid. nuper ventilatarum mearum Miscellanearum Thes. 11. 12. 13. (sup. pag. 233. 234.)

quam pars I: quare huic accedere debet pars quædam alterius ponderis, donec aucta hinc molis incumbentis quantitate, illinc diminuta, liquor pristinum recuperet situm BC, atque ita planities DE utraque sui parte æqualiter iterum prematur, fiatque perfectum æquipondium. No.XXII.

II. *Atmosphæricus noster, quem spiramus, Aer, non minus atque argentum vivum, Pondere seu Gravitate aliqua instructus est;* quod infinitis experimentis, & nostris quoque sæpius iteratis, compertum est. * Mirabimini profecto, Auditores, si Vobis dixero, pondus istud Aeris, totam Globi terraquei superficiem cingentis, indeque ad extimos atmosphæræ limites expansi, adeo non contemnendum esse, ut revera centenariorum plus quam sexagies sexies mille millionum milliones conficiat.

III. *Aer, secus quam alia Fluida, præter Gravitatem insigni quoque præditus est Elaterio, seu Virtute sese expandendi & contrahendi.* Ut vero distinctam habeamus notionem de isthoc aeris Elaterio, atque cognoscamus, in quantum conveniat, & in quantum differat ab ejus Gravitate, res ita concipienda: Fingite vobis ingentem Lanæ acervum, cujus partes quo inferiores, eo compressiores existunt, ita tamen ut compressio ista non continuetur in indefinitum, sed ad certum usque gradum, quem ubi Lanæ portio attigit, nequit a reliqua mole ulterius comprimi, virtute ejus expansiva paria tum faciente cum incumbente pondere. Quod enim Lana sic compressa superincumbenti oneri non nude resistat resistentia, ut sic dicam, passiva, quæ ulteriorem duntaxat compressionem prohibeat, sed & efficaci pressione contranitatur, patet inde, quod ablata desuper parte oneris, infima Lana sese aliquousque actualiter expandit, donec debilitati sic Ela-

* Modus ponderandi aeris ab unoquoque facile instituendus talis est: Phiala vitrea colli angustioris prunis ardentibus admota lente calefiat, rarefacto per calorem & expulso e phiala maximam partem aere, ejus orificium cera promte & sollicite obturetur; tum postquam lente refriguit, lanci exactæ libræ injecta ponderetur, & perforata postmodum cuspide acus cera, aeri externo introitus permittatur, qui cum sibilo ingressus manifeste phialam præponderare faciet.

No. XXII. Elateris vires residuæ molis incumbentis pondus non amplius superent; tum enim res erit in æquilibrio, nec ulterius dilatabilis est Lana, quamdiu hoc onere premitur. Porro & illud animadvertere potestis, si exiguum Lanæ sic compressæ manipulum ex acervo illo eximatis, manuque concludatis, ita tamen ut sub eodem compressionis gradu maneat, eundem profecto nisum conatumve premendi in volam manus exercebit, atque antea exercuerat in totius superincumbentis Lanæ pondus; exercuerat autem in hoc pondus conatum ipsi ponderi æquivalentem, ut antea innuimus; unde sequitur, & parvæ istius moleculæ manu nunc conclusæ conatum æquipollere toti alias incumbentis Lanæ ponderi. Quæ si probe intellexeritis, Auditores, facile quoque Aeris Elaterio applicabitis: Nimirum cum aer hanc Terræ superficiem proxime ambiens ab incumbentis atmosphæræ pondere valide comprimatur, minima quælibet illius portio tantas acquirit elaterii vires, ut sive toto atmosphærico pondere libere circumdata, sive vasi vitreo inclusa, aliusve corporis interventu coercita intelligatur, tantam præcise pressionis vim exercere debeat in vasis latera, vel corpus quodcunque se ambiens, quantam in illa vel illud exercere posset totum alias atmosphæricæ columnæ incumbentis pondus. Sed & præterea, si pauxillum istud inclusi aeris compressius adhuc, sive densius reddatur aere naturali, vel aere proxime nos ambiente, manifestum est, pressionem elasticam, quam exercet in corpora ambientia, fore etiam majorem; sin rarius seu laxius fiat, fore minorem ea, quæ proficisci potest a volumine aeris naturalis consistentiæ, quæque æquipollet, uti antea indigitavimus, ponderi integræ columnæ atmosphæricæ.

IV. Neque vero (in quo ultimum nostrum Principium constituimus) Natura incerto hic agit motu, sed certam observat Legem & Proportionem in aeris magis minusve densati pressionibus. Deprehendit enim Illustris BOYLIUS eleganti Experimento, nobis etiam feliciter tentato, quod † *Pressiones aeris sint in ratione directa*

† Intelligenda Regula ὡς ἐν πλάτει, nam si ἀκριβῶς loqui velimus, *Pressio elastica aeris densioris ad elasticitatem minus densi tantillo majorem habere ra-*

recta Densitatum, vel reciproca Raritatum illius, id est, Sicut No. XXII.
Densitas unius portionis ad Densitatem alterius, Ita Pressio illius ad Pressionem hujus: vel (quod perinde est) Sicut Raritas unius ad Raritatem alterius, Ita reciproce Pressio hujus ad Pressionem illius: Explico, Si portio aliqua aeris duplo, triplo, &c. densior sit alia, vel etiam seipsa alio tempore; duplo, triplo, &c. quoque majorem exercebit pressionem: Si vero duplo, triplove rarior, toties etiam minor erit ejus pressio. Tunc autem aerem appello duplo, triplo, &c. densiorem, quando eadem ejus quantitas in duplo, triplo, &c. minus spatium contrahitur: sicut vicissim duplo, triplo, &c. rariorem, quando ad duplo, triplo, &c. majus volumen expanditur: Verbi gr. (*Fig.* 2.) Si aer spatio A contentus dilatetur, ut repleat postmodum spatium B duplum spatii A; dicetur duplo rarior: sin contrahatur in spatium C, quod sit dimidium spatii A; dicetur duplo densior. Itaque si aer, dum coextenderetur spatio A, fuerit naturalis consistentiæ; adeoque, ut supra insinuatum fuit, virtutem habuerit elasticam æquipollentem ponderi integræ columnæ atmosphæricæ, pressionem exercebit æquivalentem duplo dicti ponderis, postquam constipatus erit in spatium C: sicut e converso dimidio saltem ponderis, ubi dilatatus impleverit spatium B.

Stabilitis istis Principiis, antequam ad principalem Propositionem accedamus, sequens præmittemus Lemma: *Si Tubus cylindricus superne clausus in liquore quocunque stagnante perpendiculariter erectus, atque eodem ad summitatem usque impletus fuerit, hærebit in illo suspensus liquor, sicubi ejus pondus non exuperet pondus cylindri atmosphærici æque crassi; sed si exuperet, descendet eousque, donec utriusque cylindri pondus pari passu ambulet.* Quod ex Principiis nostris antea allatis (quæ in posterum Axiomatum loco nobis erunt) facile demonstrabitur: Esto enim (*Fig.* 3.) Fistula FI, superne in F clausa, immersaque perpendiculariter liquori LM, & eodem

tionem deprehenditur, quam densitas ad densitatem; cujus rationem plusquam probabilem exhibui in Differt. de Grav. Æth. pag. 93. &c. Interim differentia tanti non est, ut ad eam hic loci attendere aut necessum, aut consultum sit.

No.XXII. repleta usque ad F: Dico, si pondus liquoris F I exæquet pondus cylindri lateralis atmosphærici N O æque crassi, & a superficie liquoris N ad summitatem atmosphæræ O protensi, liquorem eo casu apici fistulæ perpetuo adhæsurum; quod tali Syllogismo probo:

Si superficies liquoris L M, utraque sui parte I & N, premitur ab incumbente pondere æqualiter, tunc eo statu quiescet, per Ium. Axiom.

Atque in dicto casu premitur æqualiter.

Ergo quiescet.

Assumptum probatur per hypothesin: Pars enim superficiei I premitur a solo pondere liquoris I F, (exclusa videl. pressione aeris F G, quæ a clauso orificio F intercipitur,) pondus autem liquoris I F æquale supponitur ponderi aeris N O, quod premit partem superficiei N, (aerem enim habere pondus, patet ex IIo Axiom. utraque ergo pars I & N premuntur ab æqualibus ponderibus, adeoque æqualiter. Perinde quoque se res habet, ubi pondus I F minus est pondere N O; tum enim prævalens cylindrus N O alterum I F sursum propellere conabitur, qui cum attolli nequeat ob impedimentum clausuræ F, sequitur & hoc casu liquorem saltem adhæsurum summitati tubi. At si pondus I F superet pondus N O, exonerabit se pars liquoris in vasculum, reliquusque in fistula aliquousque subsidet, ex. gr. usque ad P, donec residuus liquoris cylindrus I P pondere exæquet aeris cylindrum N O, quod ipsum ex primo nostro Axiomate sponte pariter fluit; tum enim demum partes I & N ab incumbente onere urgentur æqualiter. Quousque vero quivis liquor in tubo subsidere debeat, donec æquipondium fecerit cum simili vel æque crasso cylindro aeris, id quidem nulla ratione a priori, sed sola experientia determinabile est, cum nec de altitudine atmosphæræ, nec de ejus specifica gravitate, neque dispari ubique spissitudine satis adhuc constet. Testatur vero Experientia, argentum vivum in altitudine circiter 29 pollicum Anglicanorum, aquam vero in altitudine 33 vel 34 pedum suspensam teneri posse; adeoque si tubi dictis altitudinibus breviores extiterint, liquores istos vertici eorum affixos mansuros; sin proceriores fuerint, descensuros in iis,

iis, non obstante superioris orificii clausura, usque dum dictas respective altitudines occupent. Atque hoc est celebre illud Experimentum, ab Auctore suo dictum Torricellianum, quod sicuti non sine stupore a Philosophis primitus exceptum fuit, ita doctrinæ de Aeris Gravitate felices dedit natales, atque vulgatum errorem, quo Veteres (qui experimentum non tentaverant in tubis longioribus) liquorum suspensionem in brevioribus fugæ vacui ascribebant, fortiter profligavit: non obstante enim prætenso hoc vacui metu, videmus descendere liquores in procerioribus tubis, in quibus per hunc descensum æque metuendum foret vacuum, ac in brevioribus. Notandum autem, altitudinem hanc 29 pollicum, ad quam initio descendit hydrargyrum in tubo Torricelliano, neutiquam permanentem esse, sed continuo variabilem (si tubus aliquandiu aeri expositus relinquatur) variatione quidem vix duos excedente digitos; quod ipsum indicio est, gravitatem cylindri aeris NO, qui cum sustentato mercurio æquipondium facit, subinde alterari, sive quod ejus altitudini aliquid accedat aut decedat, sive quod atmosphæra spissetur & rarefiat, vel ejus pondus aliam ob causam augeatur minuaturve. Saltem hinc nobis colligere proclive est: tubum istum, si per aliquot menses annosve in continuo, ut loqui amant, experimento relinquatur, instrumentum fore admodum idoneum indicandi, mediante isthoc hydrargyri ascensu descensuve, alterni incrementi vel decrementi gravitatis atmosphæricæ; quem ob usum proin etiam vocari consuevit Barometrum, vel Baroscopium. No. XXII.

Præmissis istis, instituti nostri ratio postulat, ut tandem ad Principalem nostram Propositionem accedamus, quæ hæc est: *Si fistula aliqua cylindrica superne clausa, & 29 digitis, si ita lubet, brevior, non solo mercurio, sed aliqua ex parte etiam aere impleta sit: quæritur, quid tum sit futurum, num descensurus mercurius, necne; & si descendat, quousque id fiat?* Notanter quæstionem proponimus in fistula 29 dig. breviore; nam si longior sit, dubium nullum est, liquorem in illa descensurum, per præcedens Lemma, utpote præponderantem simili cylindro atmosphærico, quo sustentandus esset. At si dicta altitudine sit minor, saltem

N. XXII. hærere quis aliquandiu posset circa Phænomeni eventum; imo etiam forte, non sine veri specie, colligeret ascensurum omnino mercurium, aut ad minimum eadem statione mansurum; eo quod, juxta allatum Lemma, suspensus etiam maneret, si totum repleret tubum; quo tamen utique casu, si solum spectes pondus, fistula majori gravaretur onere, quam nunc, ubi partim mercurio, partim aere, fluido longe levissimo, adimpleta est. Quin & revera expectationi responderet eventus, si pauxillum istud inclusi aeris solo ageret pondere, neque etiam elaterio suo efficax esset. Quocirca isthic non tam ponderis, quod in tantilla aeris molecula tuto negligi poterit, quam elasticitatis, quæ in minima ejus portione haudquaquam contemnenda existit, præcipua habenda est ratio: Quem in finem esto (*Fig.* 4.) Tubus M N, superne in M clausus, inferne patulus & hydrargyro in vase Q stagnanti immersus; pars tubi litera *b* notata impleta itidem sit mercurio, reliquum vero spatium *a* ab aere naturalis consistentiæ occupatum; a latere tubi assumatur similis cylindrus aerius R S, super mercurio in vase premens. Quibus ita positis, ut ordine in quæsiti cognitionem deducamur, ita deinceps nobiscum ratiocinabimur:

Hydrargyrum tubo conclusum, aut eadem immotum hæret altitudine, aut altius ascendit, aut humilius descendit.

Sed nec eadem hærere altitudine, multo minus altius ascendere potest.

Superest ergo ut descendat.

Syllogismus hic est Disjunctivus, qui procedit a remotione duorum membrorum ad positionem tertii. Majoris veritas nititur sufficiente enumeratione partium; neque enim præter ascensum, descensum, & in eodem loco permanentiam, quartum aliquod concipi potest. Atque hunc argumentandi modum in veritatis investigatione plerunque adhiberi vellem; hac enim ratione circumspecti reddimur in nostris ratiociniis, certique esse possumus, nos nihil eorum, quæ ad rem præsentem conducunt, omisisse. Subsumtio constat remotione duorum membrorum; ubi notandum, eum qui sic subsumit, ni temere subsumere velit, jam perspectas habe-

habere debere rationes suæ subsumtionis; illum vero, qui adhuc- No. XXII.
dum in inquirenda veritate occupatus est, suspendere teneri tantisper subsumtionem suam, donec ordine examinarit singula membra, quæ removenda sunt. Quare & nos, acturi Philosophos, subsumtionem tantisper pro nondum facta habebimus, considerabimusque prius; quid fieri deberet, si ponerentur illa duo membra, quæ modo per anticipationem removimus; id quod sequenti Sorite efficiemus:

Si Hydrargyrum eadem hæret altitudine, aer naturalis superne inclusus manebit quoque ejusdem expansionis seu consistentiæ, (quod per se clarum.)

Si manet ejusdem, id est, naturalis consistentiæ, pressionem exercebit in mercurium, æquivalentem ponderi totius columnæ atmosphaericæ RS, (per Ax. III.)

Si sola ista pressio æquivalet ponderi dictæ columnæ, juncta certe ponderi mercurii inclusi, illi præpollebit:

Si juncta præpollet, stagnantis hydrargyri pars N, ab utroque tum pondere, tum elatere, junctim affecta, fortius utique premetur, quam pars S, a solo incumbentis aeris pondere subacta:

* *Si fortius premitur N quam S, non quiescet liquor hoc in statu* (per Ax. I.)

Si non quiescit, non eadem hærebit altitudine.

Ubi obiter moneo, insigne hic sese obtulisse exemplum illius ratiocinii, quod nuper † ventilandum proposuimus, quo videl. ex assertione aliqua, directa & legitima consequentia, ejus contradictoria infertur; ex eo enim quod supposuimus, *hydrargyrum eadem hærere altitudine*, conclusimus: *Ergo non eadem altitudine hæret.* Et sic quidem removimus prius Enunciationis Disjunctivæ membrum: haud multum absimili ratione probabimus, multo minus ascen-

* Potuissem hic finire Soritem, atque per remotionem ultimi hujus consequentis statim subsumere (velut in sequenti ratiocinio). *Sed neutra pars altera premi debet fortius*, &c. nisi animadvertissem, continuando Soritem resultaturum subtilis illius argumentationis exemplum, cujus hic mentio subjungitur.

† Disp. de Conv. & Oppos. Enunc. Th. XIII.

No.XXII. ascensurum in tubo liquorem. Nam

Si mercurius ascendat, aer superne incarceratus in arctius spatium condensabitur:

Si condensetur, majores acquiret elaterii vires, quam habuerat antea: (per Ax. III.)

Si majus acquirat elaterium, præpollebit ejus pressio ponderi columnæ atmosphericæ RS, ut pote cui antea per idem Axioma æquipollebat.

Si præpolleat, hydrargyri stagnantis pars N fortius iterum prematur parte S, præsertim cum illam pressionem augeat adhuc pondus columnæ mercurialis, tanto insuper factæ altioris, quanto altius ascenderit mercurius.

Verum neutra pars altera premi debet fortius: (per Ax. I.)

Non ergo ascendet mercurius.

Argumentatio hæc est species deductionis ad absurdum, qua ex hypothesi adversarii ratiocinando infertur aliquid notorie falsum; ex eo enim quod supposuimus, *ascendere mercurium*, conclusimus, fore, ut *inæqualiter premerentur partes hydrargyri stagnantis N & S*: quod cum primo Axiomati, de cujus veritate inter nos convenit, adversetur; regrediendo ad primam propositionem, e qua id fluxit, eam ipsam quoque falsam esse inferimus: quam argumentationem hypotheticam procedere dicunt a remotione consequentis ad remotionem antecedentis.

Atque sic utrumque Enunciationis Disjunctivæ membrum removimus: quare nunc demum subsumere poterimus (quod antea per prolepsin jam feceramus) *Atqui hydrargyrum nec eodem hæsurum loco, multo minus ascensurum est.* Unde optime concludimus: *Ergo omnino descensurum esse constat.*

Superest ut inquiramus adhuc, quousque sit descensurum; quod iterum Syllogismo Disjunctivo, sed bimembri, auspicabimur, videl. isto:

Argentum, aut descendit penitus, sic ut omne e tubo effluat in vasculum, aut descendit saltem aliquousque: (tertium non datur.)

Atqui non descendit penitus: (iterum per prolepsin removemus, quod prius examinandum erit.

Ergo saltem subsidet aliquousque.

Assumtionem sic probo: Si

Si descenderet penitus, & omne e fistula efflueret, Aer superne conclusus sese dilatare, totamque fistulæ cavitatem replere deberet: No. XXII.

Si dilataretur, debilitaretur ejus elaterium (per Ax. III.)

Si debilitatur ejus elaterium, pressio illius tanta non est, quanta proficiscitur a pondere columnæ atmosphæricæ RS, (ut pote cui ante dilatationem saltem æquipollebat, per idem Ax.)

Si pressio elaterii tanta amplius non sit, stagnantis hydrargyri pars N. (quæ, postquam argentum omne e tubo decidit, a solo aere afficitur) *debilius scil. premetur parte S.*

Premi autem debent utraque æqualiter, quæ Liquidorum natura est per Ax. I.

Non ergo penitus effluet e fistula mercurius.

Quæ argumentatio similis omnino est præcedenti: est enim Syllogismus Hypotheticus; cujus major includit Soritem seu complexionem plurium Enunciationum Hypotheticarum; minor, seu assumtum, removet ultimum consequens, & conclusio tollit primum antecedens. Atque hoc obiter insinuo, plerasque Demonstrationes geometricas nihil aliud esse, quam tales tectos Sorites, seu Syllogismos Hypotheticos complexos, quorum quidem alii procedunt a positione primi antecedentis ad positionem ultimi consequentis; alii vero, qui ad absurdum ἀπάγουσι, vicissim a remotione ultimi consequentis ad remotionem primi antecedentis.

Itaque scrutinium nostrum eousque prosecuti sumus, ut jam certo nobis constet, descensurum mercurium, & quidem aliquousque saltem: reliquus noster labor in eo vertetur, ut præcise determinemus, quousque id fiat. Atque hic pulcherrimus demum sese nobis aperit speculationis campus. Prodeant jam vulgares Logici & Physici, disquisitionem nostram ulterius, si possint, prosequantur, omnem mentis suæ intendant aciem, undiquaque conquirant sibi arma, omnia sua in usum vertant præcepta; in cassum laborabunt, nihil proficient, nullam invenient rimam, per quam minima sibi lux affulgeat arcanum istud naturæ penitius perscrutandi. Adesto ergo Divina Mathesis, defectui huic opitulante manu succurre, atque imperfectum opus ad

No. XXII. ad finem perducito! nimirum Tu incipis, ubi vulgaris Logica desinit; tu Argo perspicacior, ubi altera cæcutit; Tu contemnis, quo terretur altera; planæ Tibi viæ sunt, quæ alteri asperæ & salebrosæ videntur Syrtes. Te igitur duce inceptum iter prosequemur. Tentabimus autem primo, an & quousque per Arithmeticam communem rés confici possit. Quem in finem solvendum nobis proponemus peculiare exemplum:

Esto (*Fig.* 4) Tubus MN, unum & viginti digitos longus, † hydrargyrum infusum altitudinem viginti in illo digitorum occupet, supremo tantum pollice aeri concesso. Quandoquidem jam quæstio sit, quousque descendere debeat mercurius, assumamus numerum aliquem ad lubitum, tanquam divinaturi veram quantitatem, de qua quæritur, eumque sic assumtum examinemus ordine, quem ipsa cuique natura dictat, juxta conditionem in quæstione requisitam. Conditio autem hæc est, ut partes superficiei stagnantis mercurii N & S æqualiter premantur: quare calculo explorandum est, quantam in nostra suppositione utraque pressionem subeat; ubi observare licet, partem quidem S eodem perpetuo cylindri atmosphærici RS premi pondere, quod æquipollere diximus in Lemmate nostro ponderi 29 circiter digitorum mercurialium, pro quibus, majoris evidentiæ ergo, numero rotundo triginta digitos accipiemus; alteram vero partem N diversimode affici, prout profunditatem descensus argenti in fistula majorem minoremve supposuerimus.

Supponamus itaque primo, argentum uno descendere pollice: hærebit ergo adhuc in altitudine 19 pollicum; sed aer, qui antea unum occupaverat pollicem, nunc duos occupabit, adeoque duplo erit factus rarior, & proinde, per Ax. IV. duplo quoque minor ejus pressio elastica, id est, cum antea æquipolleret ponderi cylindri atmosphærici RS sive 30 digitorum mercurialium, per Ax. III. nunc æquipollebit 15 digitis mercurialibus, qui

† Non comprehensa Tubi portiuncula infra mercurii stagnantis superficiem latente, utpote cujus nulla habenda ratio; quod & ubique in sequentibus intelligendum.

qui juncti 19 illis digitis in tubo residuis, efficiunt 34 digitorum pressionem, qua afficietur pars superficiei N (premitur enim hæc tum immediate ab incluso mercurio, tum mediante hoc ab aeris elaterio.) Sed cum altera S sustineat pressionem æquivalentem duntaxat 30 digitis, illa premetur fortius hac; quare adhuc humilius in fistula subsidet mercurius. No. XXII.

Ponamus ergo rursum, descendere per duos pollices; sic hærebunt in tubo residui 18 digiti; aer vero tres nunc occupans, triplo erit factus rarior, quam antea in naturali suo statu fuerat; ejus ergo elater æquipollebit saltem tertiæ parti 30 digitorum, nim. 10 digitis, qui additi residuis 18, efficiunt 28 digit. mercur. quibus premeretur argentum vasculi in parte N. Debilius igitur jam premeretur parte altera S, quæ pressionem 30 digitorum sustinet.

Cum ergo descensum mercurii primum justo minorem, dein justo majorem assumserimus; assumamus nunc medium inter utrumque, supponendo descendere per unum pollicem & dimidium; reque eodem modo, sed nunc ob fractionem paulo difficilius examinata, deprehendetur superficies stagnantis mercurii parte N fortius iterum premi, quam parte S; sed non tanto excessu, quanto in prima suppositione, utpote * pressionem tantum $30\frac{1}{2}$ pollicum sustinens.

Quare sumto proporro argenti descensu $1\frac{3}{4}$ pollicis, factoque & repetito sæpius examine, ita continuo numero quæsito appropinquabimus, ut tandem reperiamus vel ipsum verum numerum, vel vero adeo propinquum, ut differentia veri & assumpti fiat imperceptibilis, omnemque prorsus sensum fugiat. Atque hinc Problema, quod hoc pacto solvitur, per *Approximationem* solvi dicitur. Patet autem, istum solvendi modum, tametsi pure mecha-

* Nam depresso per $1\frac{1}{2}$ poll. mercurio, residui manebunt ejus digiti in fistula $18\frac{1}{2}$; aere nunc spatium $2\frac{1}{2}$ dig. occupante; quare per Ax. IV. spatium $2\frac{1}{2}$ dig. (volumen aeris rarefacti) est ad 1 dig. (volumen aeris naturalis) sicut reciproce pressio hujus, 30 dig. merc. æquivalens, ad pressionem illius, quæ propterea per auream regulam invenitur 12 digitorum, qui juncti illis $18\frac{1}{2}$, efficiunt $30\frac{1}{2}$ dig.

No. XXII. nicus sit, & nihil peculiaris habeat artificii, nihilominus a nemine institui posse, qui vulgaris Arithmeticæ, & in specie Algorithmi fractionum non sit callentissimus.

Accedimus ad alterum solvendi modum, instituendum per Artem Analyticam, Algebram alias dictam. Hæc est illa magna Ars inveniendi, quæ mentem methodo admirabili, artificio summo, successu certo & infallibili, in quæsiti cognitionem deducit, tanto præstantior Arithmetica communi, quanto hæc vulgari Logicæ palmam præripit: Hæc Artis ratiocinandi complementum & fastigium summum: Hæc præclarum illud Depositum, quod Deus aliquibus ex humano genere, ceu Rationis aliquod Ἐπίμετρον, indulsit, cujus ope ad infinitæ suæ sapientiæ & bonitatis vestigia in abditissimis naturæ recessibus contemplanda propius admitterentur.

Primus in hac investigandi methodo labor est, ut quantitates propositi Problematis, tam datæ sive cognitæ, quam incognitæ seu quæsitæ, characteribus quibusdam a notis numeralibus diversis designentur; & usus quidem obtinuit, ut id fiat literis Alphabeti, quarum priores melioris distinctionis ergo ad cognitas, postremæ ad incognitas significandas a Principe Geometrarum CARTESIO adhibentur. Appellemus itaque supremum fistulæ cylindricæ spatium ab aere occupatum a; spatium reliquum mercurio impletum b; cylindrum mercurialem æquiponderantem simili cylindro atmosphærico, $b + c$; utpote in hac nostra hypothesi (in qua tubus 29 digitis brevior est) mercurio fistulæ incluso altiorem; adeo ut per litteram c, indigitetur excessus, quo 29 digiti mercurii, * altitudinem mercurii fistulæ infusi superant: profunditatem denique quæsitam, ad quam mercurius in fistula subsidet, vocemus y. Quod si nobis solvendum proponeretur speciale exemplum, sufficeret equidem, soli incognitæ quantitati literam assignare, retentis quantitatum cognitarum numeris; interim longe præstabilius est,

* Nos hic & in sequentibus literas adhibemus, ad indigitanda promiscue sive spatia, sive altitudines, sive pondera; quoniam in cylindris æqualium basium & materiæ homogeneæ omnia hæc tria sunt proportionalia.

est, etiam cognitis attribuere litteras, quoniam hoc pacto non No. XXII. tantum præsens solvitur exemplum, sed eadem opera universalis invenitur Regula, omnia solvendi similia exempla, in quibus quantitates cognitæ continuo variæ & variæ accipiuntur; unde simul patere poterit, quantum habeat prærogativæ præ Algebra Numerosa Veterum, Recentiorum Speciosa, VIETÆ & præcipue CARTESII industria ab interitu vindicata & in lucem reproducta, postquam ab antiquissimis Mathematicis, ARCHIMEDE, DIOPHANTO, aliisque, multorum opinione, tecta & dissimulata fuisset, ut propter abstrusissimas res hac methodo a se inventas tanto majori posteris admirationi forent.

Assignato sic cuique quantitati suo charactere, percurrenda est totius Problematis series, ordine quo omnium patet naturalissimo, usque dum pateat modus, unam eandemque quantitatem duobus modis exprimendi, in quo consistit *Æquatio*. Neque vero (in qua opinione versantur multi, qui nescio quæ difficultatum spectra hic sibi fingunt) in incertum palpando hoc negotium expediri opus habet, quasi nulla de eo constans præscribi possit regula. Regula enim unica eademque universalis, quam Tyronibus probe inculcatam vellem, hæc est, *Quod nihil aliud faciendum nobis sit cum characteribus istis Algebraicis, quam quod faceremus, si numero aliquo ad lubitum assumto, eum examinare vellemus, an sit optatus ille, qui quæritur, necne?* Quid faceremus? Id quod fecimus supra, ubi per approximationem rem inquisivimus. Quid fecimus? Examinavimus assumtum numerum, an satisfaceret conditioni in Problemate requisitæ. Id ipsum ergo & nunc præstabimus, hoc solo cum discrimine, quod cum ibi Algorithmus Arithmeticus in usum fuerit adhibitus, nunc Algebraicus, quia cum litteris nobis res est, venit adhibendus. Sed ut utriusque operationis analogiam, seu convenientiam, eo evidentius perspiciatis, calculo literali eadem hic opera adjungam numeralem, assignato cuilibet literæ certo valore numeris expresso: Esto verbi gr. in fistula 21 poll. longa, Altitudo inclusi aeris (quam vocavimus a,) 7 digitorum; Altitudo infusi mercurii (quam diximus

No. XXII. b,) 14 digit. Excessus quo superatur ejus pondus a pondere similis cylindri atmosphærici (dictus nobis c) 16 dig. mercur. adeo ut pondus integri cylindri atmosph. $b+c$, sit 30 dig. merc. Pro quæsita denique descensus quantitate y, assumti sint pro lubitu 3 digiti. Quo facto uterque porro calculus sic instituitur.

Quoniam spatium aere naturali refertum est a, (7 dig.) spatium vero a mercurio descendente deserendum y, (3 dig.) erit spatium ab aere dilatato occupandum $a+y$, (10 dig.) Cumque juxta Ax. IV. Raritates aeris, id est, spatia ab eadem aeris quantitate successive occupata sint in ratione reciproca Pressionum, quas in utroque statu exerit, erit volumen aeris dilatati $a+y$, (10 dig.) ad volumen aeris naturalis a, (7 dig.) uti vicissim pressio hujus [quæ per Ax. III. æquivalet ponderi atmosphærico, seu per Lemma nostrum ponderi mercuriali $b+c$ (30. dig.)] ad pressionem illius; quæ propterea per auream regulam dividendo productum secundi & tertii termini per primum, invenitur $(ab+ac)$: $(a+y)$, (21 dig.) cui si adjiciamus pondus mercurii post descensum in tubo residui, nempe $b-y$ (11 dig.) erit tota pressio, quam subit pars mercurii stagnantis N, $(ab+ac):(a+y)+b-y$ (32 dig.) altera vero, qua afficitur stagnantis mercurii portio S est $b+c$ (30 dig.) Inter has duas pressiones instituenda deinceps est collatio, utpote quæ per Ax. I. æquari sibi invicem debent; & quidem quantum ad numeros 32 & 30, quoniam hi inæquales deprehenduntur, ulterius progredi non possumus, sed ex hoc ipso cognoscimus, assumtum numerum 3 dig. non indigitare veram descensus quantitatem; nihilque aliud nobis agendum relinquitur, quam ut de novo assumamus aliquem numerum, eumque similiter examinemus. Sed quod spectat quantitates literales $(ab+ac):(a+y)+b-y$ & $b+c$, facile animadvertitis, Auditores, posse fieri, ut vel æquales vel inæquales sint, pro diverso valore, qui affingi potest quantitati incognitæ y. Peculiare igitur superest negotium ad explorandum, quisnam præcise valor huic literæ assignandus veniat, ut dictæ quantitates inde æquales resultent. Quem in finem supponenda statim est æqualitas inter illas; unde emergit id quod vocari solet *Æquatio*, quæ sic indigitatur,

gitatur, $(ab+ac):(a+y)+b-y=$ seu *æquale* $b+c$. Pro- No.XXII. ximum dehinc est, ut Æquatio ista reducatur. Artificium *Reductionis* in eo consistit, ut quantitas incognita y statuatur sola pro uno æquationis membro, translatis omnibus cognitis in alteram partem, citra tamen æqualitatis utriusque membri alterationem; quod negotium fundatur in simplicissimis illis axiomatibus: *Si æqualibus æqualia addas, auferas, multiplices, &c. tota, residua vel producta, &c. sunt æqualia*; hac enim ratione fiet, ut valor incognitæ y inveniatur in puris cognitis. Quocirca cum in utroque inventæ æquationis membro sese offerat lit. b, illa ante omnia expuncta relinquetur $(ab+ac):(a+y)-y=c$. Porro quia in proposita æquatione deprehendo fractionem, illam reduco ad integra, multiplicando utrumque æquationis membrum per fractionis denominatorem; sic habebo $ab+ac-ay-yy=ac+cy$. Postmodum ablata utrinque quantitate ac, quæ utrobique communis reperitur, restabit $ab-ay-yy=cy$. Deinde, ut quantitas yy, quæ negata existit, affirmata fiat, addatur utrique membro, eritque $ab-ay=cy+yy$. Et ut ab una parte remaneat sola, auferatur pariter cy, ut sit $yy=-ay-cy+ab$. Quandoquidem autem quantitas incognita ad duas hic dimensiones ascendat, consulendæ sunt † æquationum quadratarum Formulæ, quarum beneficio invenitur * $y=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}c+\sqrt{(\frac{1}{4}aa+\frac{1}{2}ac+\frac{1}{4}cc+ab)}$; sic ut tandem valor ignotæ quantitatis in quantitatibus pure cognitis repertus fuerit. Quo pacto Additiones, Subtractiones, Multiplicationes & Divisiones Algebraicæ ad hunc calculum ineundum necessariæ peragi debuerint, ostendere consulto prætermisi; quoniam ii, in quorum præcipue gratiam hanc subjunxi Analysin, Algorithmum istum privatim jam a me edocti sunt, sic ut aliud nihil superesse videretur, quam ut ejus quoque usum

† Eas videsis in principio Geomet. CARTESII.
* Juxta enim hasce formulas valorem quæsitæ quantitatis indicat binomium, constans ex dimidio quantitatis cognitæ, rectangulum cum radice incognitæ in proposita æquatione constituentis (quod dimidium hic est $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}c$) & ex latere quadrato aggregati resultantis e quadrato hujus dimidii (nempe $\frac{1}{4}aa+\frac{1}{2}ac+\frac{1}{4}cc$) & quantitate pure cognita (quæ hic est ab.)

No. XXII. usum & applicationem in præclari cujusdam, facilis tamen Problematis solutione conspicerent. Ex invento autem quæsitæ quantitatis valore, talis tandem strui potest universalis Regula, & verbis ita concipi:

* *Si quadratum dimidiæ altitudinis inclusi aeris* ($\frac{1}{4}aa$), *& quadratum dimidii excessus, quo pondus atmosphæricum superat pondus mercurii inclusi* ($\frac{1}{4}cc$), *una cum illo, quod provenit ex altitudine inclusi aeris bis multiplicata, semel in dimidium dicti excessus,* ($\frac{1}{2}ac$), *semel in altitudinem mercurii inclusi,* (ab), *in unam summam conjiciantur; & ab aggregati latere quadrato* ($\sqrt{}(\frac{1}{4}aa + \&c.)$ *subtrahatur dimidium altitudinis inclusi aeris* ($\frac{1}{2}a$), *una cum dimidio dicti excessus* ($\frac{1}{2}c$), *residuum indicabit, quousque deprimendus sit mercurius.*

Si cui jam volupe sit, is poterit hanc Regulam extemplo ad plures speciales casus applicare, inque singulis calculo subducere quæsitam descensus quantitatem: Ut si in Fistula 21 poll. longa relicti fuerint 7 aeris digiti, gravitasque atmosphæræ æquiponderare deprehensa sit $29\frac{1}{4}$ dig. mercur. qualiter illam domi in Baroscopio ante bihorium saltem observavi, significabit lit. *a*, 7 dig. *b*, 14 dig. *c*, $15\frac{1}{4}$ dig. adeoque

$\frac{1}{4}aa = 12\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}cc = 58\frac{9}{64}$
$\frac{1}{2}ac = 53\frac{3}{8}$
$ab = 98$
Summa $= 221\frac{49}{64}$

A summæ latere quadr. $= 14\frac{7}{8}$. proxime
subtr. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = 11\frac{1}{8}$.
Relinquitur $y = 3\frac{3}{4}$ proxime pro futura quantitate descensus mercurii.

Atque hoc modo constructa est ad singulos casus sequens Tabella.

* Eandem vid. in Diss. *de Gr. Æth.* p. 101. 102.

Tabella

Tabella pro cognoscenda quantitate descensus mercurii; in Fistula 21 digit. longa, eo tempore, quo atmosphæra $29\frac{1}{4}$ digitis mercurii æquiponderat: No. XXII.

Quantitas aeris in tubo relicta.	Quantit. descensus mercurii.		Quantitas aeris in tubo relicta.	Quantit. descensus mercurii.	
dig.	*dig.*	*part. sedec. dig.*	*dig.*	*dig.*	*part. sedec. dig.*
1. —	1.	11. paulo min.	11. —	3.	4. p. pl.
2. —	2.	9. p. plus.	12. —	3.	1. p. min.
3. —	3.	2. p. min.	13. —	2.	13. p. min.
4. —	3.	7. p. pl.	14. —	2.	8. p. pl.
5. —	3.	10. p. pl.	15. —	2.	4. p. min.
6. —	3.	12.	16. —	1.	14. p. pl.
7. —	3.	12. p. pl.	17. —	1.	9. p. min.
8. —	3.	11. p. pl.	18. —	1.	3. p. pl.
9. —	3.	10. p. min.	19. —	0.	12. p. min.
10. —	3.	7. p. pl.	20. —	0.	7. p. min.
			21. —	0.	0.

Inspiciendo hanc Tabellam non sine delectatione observabit Lector, quo pacto descensus quantitas initio gradatim accrescat, & postmodum sensim iterum decrescat. Quare cum descensus omnium maximus producatur a 7 aeris pollicibus, in hoc Experimentum sumere constitui, ut effectus eo magis redderetur conspicuus.

(Hic factum est Experimentum cum optato successu.)

Ex istis omnibus, velut documenti loco, colligere potestis, Auditores, quantum momentum conferat Mathesis Physicæ, cui aliquid amplius, quam majorem saltem perfectionis superaddit gradum, ut nuper quoque Thesibus meis IX & X miscell. innui; eo quod destitutus ejus ope Physicus supputare nequeat, qua præ-

No. XXII. cise quantitate effectus ex suis principiis sequi debeat, quod tamen omnino requiri videtur ad hoc, ut suarum assertionum certus esse possit. Pone namque, Physicum aliquem Matheseos ignarum idem sibi Phænomenum explicandum suscepisse, vagis autem & nimis generalibus, aut etiam falsis usum esse principiis, ex quibus nihilominus ratiocinando nobiscum collegerit, nec ascensurum, nec eadem altitudine suspensum hæsurum, sed aliquousque descensurum mercurium; tametsi iste descensus, si ab aliquo hujus rei gnaro sub calculum revocaretur, deprehenderetur differre ab illo, quem nos calculo subduximus, & experientia confirmavimus. Talis namque Physicus sibi aliisque persuadebit, se genuinam Phænomeni dedisse causam, postquam instituto experimento descendere repererit mercurium; quamvis illum & sibi & aliis imponere, evidenter iis liqueat, qui descensus istius quantitatem calculo examinare noverint.

Ita demum, Auditores optimi, valete.

FINIS.



No. XXIII.

No. XXIII.

Dni. BERNOULLI NARRATIO CONTROVERSIÆ

Inter Dn. Hugenium *& Abbatem* Catelanum *agitatæ de* Centro Oscillationis *quæ loco Animadversionis esse poterit in Responsionem* Dn. Catelani, *num.* 27. *Ephem. Gallic. anni* 1684, *insertam.* †

Excerpta ex Litteris Dn. Bernoulli Lipsiam missis.

MENSE Septembri Anni 1681, Abbas Catelanus propositionem quandam tractatus Cl. Hugenii, quem de *Horologio Oscillatorio* incripserat, adortus est, formata contra illam objectione; in qua; quia mentem suam minus feliciter expressit, ansam dedit isti controversiæ, quæ huc usque fere inter illos viguit. *Acta Erud. Lips. 1686. Jul. p. 356.*

Verum quidem est eum, initio Anni 1682, objectionis suæ paucis additis lineis variationem quandam induxisse; sed quoniam ejus partes satis adhuc male cohærentes reliquit, eam in mente Lectoris sui excitavit opinionem, quasi persuasum haberet summas altitudinum, e quibus pondera alicujus penduli junctim des-

† *Supra No. X.*

N.XXIII. cendunt, & ad quas postmodum separatim ascendunt, inæquales esse debere, hanc solam ob causam, quod, *priores altitudines sint proportionales ipsis ponderum celeritatibus, posteriores vero non nisi quadratis istarum celeritatum.* Quare etiam HUGENIUS, id unicum CATELANO scrupulum movere ratus, respondere abstinuit, usque in mensem Junium, quo tandem calamum arripuit, ac exemplo duorum numerorum 5 & 10, duorumque aliorum 3 & 12, breviter monstravit fieri utique posse, ut binæ quantitates eandem cum binis aliis conficiant summam, etiamsi diversam ab illis rationem habeant; neque tum temporis in dubium revocavit πρῶτον CATELANI ψεῦδος, quod tamen in prima jam objectionis impressione manifeste satis prodiderat, dum supposuit: *Pendulum ex duobus ponderibus compositum, eandem acquirere celeritatem, quantam acquirat summa pendulorum simplicium:* id vero sicco pede præteriit HUGENIUS, vel quod non penetrarit statim, ob nullam periodorum connexionem, quorsum falsa ista CATELANI suppositio tenderet, vel potius quod illi, ceu verisimili admodum, tum ipsemet adstipularetur. CATELANUS interea *Hugeniano* responso non contentus, excepit 20 Julii 1682, ac terminis algebraicis rem aggressus est, eodem innixus fundamento: *Quod totalis celeritas penduli compositi æquet summam celeritatem partium ejus separatarum.* Quo facto, controversia ista ultra annum sopita jacuit.

Me quod spectabat, cui HUGENII liber tum nondum visus, nedum lectus fuerat, scopum alium non habebam, quam illustrare ejus responsionem, remque examinare, qualiter ab ipso examinata, atque in Actis recensita fuerat. Animadvertens itaque CATELANI principium ab HUGENIO non refutatum esse, & ego illud intactum reliqui; sufficere mihi ratus, si *Hugenianum* responsum simpliciter applicarem ad præsentem controversiam, proposito eum in finem exemplo penduli, e duobus æqualibus ponderibus compositi; ubi innuere saltem volui quod, supposito pro totali ejus celeritate numero ternario, (quidquid statuatur de celeritatibus utriusque separatim spectati ponderis, dummodo eæ sint in ratione 2 ad 1) quadrata $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$ ex mente HUGENII signifi-

significare debeant non nisi *rationem altitudinum*, ad quas ascendant separata pondera, minime vero *ipsas altitudines* (quod ipse quoque postmodum indigitavit HUGENIUS in secunda Responsione, 8 Jun. 1684;) partim quoniam celeritates atque altitudines, utpote quantitates heterogeneæ, se mutuo mensurare non possunt; partim etiam quia ipse CATELANUS urgere saltem videbatur, altitudines esse *proportionales* quadratis, vel *sicut* quadrata celeritatum; tametsi in proxime sequenti calculo quadrata ista pro ipsis altitudinibus adhibuerit. Comparato mihi paulo post, & perlecto HUGENII libro, animadvertebam, Propositionem controversam ex priore Hypothesium, quas Auctor initio stabiliverat, adeo evidenter inferri, ut neutra infringi possit, quin simul evertatur altera: quo circa judicabam, si CATELANO falsa fuisset visa Propositio, eum potius ipsam adoriri debuisse Hypothesin, magnumque illud inibi contentum Principium Mechanicum. Verum enim vero, cum hujus Principii veritatem nullo jure in dubium revocare possem, atque simul etiam seriem ratiocinii a CATELANO satis confuse propositi evolvere cœpissem; errorem ejus illico detexi, falsamque cognovi esse, qua nitebatur, regulam, nimirum: *Celeritatem totalem penduli compositi æqualem esse summæ celeritatum partium ejus separatarum.* N.XXIII.

Atque ut ostendam animadversum mihi fuisse errorem, priusquam HUGENII Epistola die 8. Jun. lucem aspexisset; offeram hic causam physicam, omissam ab HUGENIO, qua fit, ut penduli compositi celeritas perpetuo minor sit celeritate partium ejus separatarum: Ponamus, majoris evidentiæ ergo, pondera penduli A & B in linea inflexili DB libere hinc inde moveri posse; sic ut linea hæc, dum rotatur circa axem D, quamvis secum rapiat pondera, non tamen impediat descensum illorum in linea recta versus centrum Terræ. Quo posito, constat utrumlibet pondus, sigillatim dimissum, eadem celeritate latum iri, qua ferretur absque virga DB; utpote nec a virga, nec ab ejus axe ullo modo impeditum; idest, si pondus A absque virga certo tempore conficit spatium AH, & pondus B spatium æquale BN, utrumque etiam cum virga, sed sigillatim, dimissum eodem tempore

 idem

N.XXIII. idem spatium AH & BN conficiet. Constat insuper quod, si gravitas in utrumque pondus ageret viribus, quæ proportionatæ forent ipsorum respectivis ab axe distantiis, virga nullum adhuc ipsorum descensui afferret impedimentum; propterea quoniam, exacto certo tempore, unum eorum reperiretur in H, & alterum in I, vel prius in L, posterius in N, sive absque virga, sive cum virga, sive sigillatim, sive conjunctim dimitterentur. Verum enim vero, quoniam gravitas in utrumque pondus agit viribus æqualibus, sic ut pondera eodem tempore æqualia spatia AH & BN transigere annitantur; & tamen interea pondus A junctim dimissum, ob inflexilem virgam, nequit pertingere nisi ad L, dum pondus B jam est in N, hinc sequitur, gravitatis vim in pondere A non esse exhaustam; adeoque residuum harum virium, ex una parte urgere debere corpus B, ex altera ipsum axem D, eundemque premendo aliquam sui partem ibidem insumere & deperdere; siquidem virga, hocce casu, instar vectis considerari possit: prout extra dubium est, quod si corpus B infinite tarde moveri, idest, firmum & stabile esse intelligatur, sicut axis D; corpus A partem sui ponderis, æque in axem D, atque in corpus B transferret. Ex hactenus dictis colligere proclive est, si quis examinare vellet quantam partem celeritatis suæ pondus A in premendo axe D consumere debeat; eum exinde, imitando Dn. CATELANI ratiocinium, veritatem aut falsitatem *Hugeniana* Hypotheseos, inque hac fundatæ propositionis detegere posse.

Rogantur hac occasione Eruditi, ut examinent, qualem legem communicationis celeritatum observent corpora mota, quæ ex una parte innituntur firmo fulcimento, ex altera alii corpori itidem, sed tardius moto: si namque celeritatis excessus, qui hinc inde communicandus est, in eadem ratione distribueretur, in qua distribuitur onus aliquod, quod vecti duobus sustentato fulcris impositum est, nimirum in reciproca distantiarum mobilis a fulcris; tum imitando ratiocinium Dn. CATELANI, deprehenderemus summam altitudinum, ad quas ascendunt separata penduli pondera, vicissim nunc minorem esse summa altitudinum, e quibus antea

antea conjunctim descenderant, quod iterum *Hugenianam* Propositionem everteret. N. XXIII.

En calculum: Esto altitudo A L $= 1$ ped.
altitudo B N $= 4$ ped.

Celeritas ponderis A acquisita in puncto L, ubi descendit separatim $= 1$

Celeritas ponderis B acquisita in puncto N, quando cadit separatim $= 2$

Celeritas ponderis A acquisita in puncto L, quando descendit conjunctim $= x$

Igitur excessus celeritatis ponderis A, qui tam in axem, quam in pondus B redundat $= 1 - x$

Et pars hujus excessus, quæ soli ponderi B communicatur $= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

Tota ergo celeritas ponderis B in puncto N cum conjunctim cadit $= 2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

Atqui vero $2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x : x = 4 : 1$. Igitur $x = \frac{9}{17}$ & $4x = \frac{36}{17}$ eorumque quadrata $\frac{81}{289}$ & $\frac{1296}{289}$ quorum summa $4\frac{13}{17}$ minor est $1 + 4 = 5$.

Antequam finiam, in favorem Dn. CATELANI hoc monebo, quod etiamsi commune gravitatis centrum, juxta illum, altius ascendere deberet, quam descendit; nondum tamen sequatur, repertum fore motum perpetuum, ut sibi persuadet Ill. HUGENIUS; quoniam in istis abstrahi solet ab aeris resistentia, a diminutione celeritatis, quæ necessario sequitur disruptionem vinculi, quo connectebantur partes penduli, aliorumque obstaculorum; prout ipsa quoque hæc aeris resistentia in causa est, cur simplex pendulum motum suum non continuet, ut maxime in Hypothesi *Hugeniana* ad eandem ascendere debeat altitudinem, a qua descendit.

Videantur Num. XLIV. & XLV.

N°. XXIV.

N°. XXIV.

D^{N.} BERNOULLI DEMONSTRATIO

Rationum, quas habent series numerorum naturali progressione sese insequentium, vel quadratorum, cubicorum, &c. item trigonalium, pyramidalium &c. ad series numerorum totidem maximo æqualium,

Excerpta ex iisdem litteris.

Acta Erud. Lips. 1686. Sept. p. 360.

WALLISIUS in Arithmetica Infinitorum, id sola inductione investigare docet; cui demonstrandi modo, cum parum scientificus sit, alium eumque facillimum hic substituam: Exempli gratia; Explorandum sit, an ratio seriei numerorum naturali progressione se excipientium & a cyphra inchoantium, ad seriem totidem maximo æqualium semper sit subdupla. Pono rem examinatam esse aliquousque, terminumque ultimum, in quo examinando substiti, appello a: eritque numerus terminorum, ob initialem cyphram, unitate major, nempe $a+1$: adeoque summa totidem ultimo æqualium $aa+a$; cui cum summa progressionalium inductione supponatur reperta fuisse subdupla, erit hæc $(aa+a):2$. Augeatur jam series progressionis uno termino; eritque adjectus terminus $a+1$, qui junctus summæ præcedentium $(aa+a):2$ producit $(aa+3a+2):2$, summam totius progressionis; sed cum numerus terminorum jam sit $a+2$, erit

erit summa totidem adjecto ultimo æqualium, $aa + 3a + 2$, quæ N. XXIV. summæ progressionalium itidem dupla existit. Quod si iste terminus, qui modo vocatus erat $a + 1$, appelletur a, insuperque novus progressioni adjiciatur, qui erit $a + 1$, eadem valebit demonstratio. Cum ergo constet, rationem subduplam, in qualibet serie deprehensam, inferre eandem in serie uno termino aucta, atque hinc etiam in serie duobus, tribus, &c. infinitis terminis aucta; sequitur universim, quod si hæc proprietas in paucis seriebus inductione reperta fuerit, pariter communis sit omnibus. Q. E. D.

Ad eundem modum demonstrabitur, rationem summæ seriei quadratorum a cyphra incipientium, ad summam totidem maximo æqualium esse subtripla majorem, excessu quem indigitat ea ratio quam habet unitas ad sextuplum radicis quadratæ termini maximi: item summam seriei trigonalium a duabus, pyramidalium a tribus &c. cyphris inchoatorum, ad summam totidem maximo æqualium esse subtriplam, subquadruplam &c. supponendo nimirum, id aliquousque saltem inductione compertum esse, illudque deinceps demonstrando de serie uno termino aucta.



No. XXV.

EXAMEN
PERPETUI MOBILIS,
PARISIIS PUBLICATI,
Et in Novellis Reipublicæ literariæ Roterodamensibus *mense Nov.* 1685. *Art.* VII. *ad discutiendum propositi.*

Acta Erud. Lips. 1686. Dec. p. 623.

POTUISSEMUS *descriptione Machinæ hujus supersedere; quippe cujus defectus in memoratis* Novellis hujus anni, Articulo VII, mensis Aprilis, p. 444. *ex* Transactionibus Anglicanis, mensis Decembris 1685, pag. 1240. a D. PAPINO, *Regiæ Societatis Anglicanæ Socio, jam dum detectus habetur: nisi a Clarissimo Viro* JAC. BERNOULLI *nobis submissa peringeniosa Machinæ dictæ discussio, utramque Lectoris B. ulteriori inquisitioni exponere nos admonuisset. Descriptionem vero machinæ non ipsius* Auctoris *verbis exhibemus, sed laudati* D. PAPINI, *ex Anglico in Latinum idioma translatis; adjecta ejusdem censura, quam* Bernoullianum *deinde* Examen *excipiet. Sic vero* D. PAPINUS:

Propositionem de motu quodam perpetuo, non ita pridem in Galliis impressam, cum ita involuta sit, ut non nisi difficillime ab iis possit intelligi, qui non magnopere ejusmodi descriptionibus assuevere, sequenti modo conatus sum explicare.

D E F, (*Fig.* 1.) est follis 40 pollices longus, qui deductis alis; F ab E, expandi potest. Sit vero idem undique exacte occlusus, præterquam ad foramen E, cui tubus E G, 20 aut 22 pollices longus, exactissime adferruminandus; hujus vero altera extremitas vasculo G, pleno mercurii, & prope medium follis constituto, immittenda.

A, est axis, circa quem follis revolvi potest.

B, sacoma inferiori parti follis affixum.

C, pondus cum pinna, retinendo folli in situ erecto.

Jam

Jam si supponatur, follem sic erectum, tantum tertia aut quarta sui parte distentum, plenumque mercurii esse; perspicuum est, mercurium 40 pollices altum, descensurum ad 27 circiter pollices, juxta experimentum Torricellianum: consequenter follis se versus E expandet, relinquetque ibi spatium vacuum: spatium hoc replebitur mercurio, in vasculo G contento, qui per tubum G E ascendet, cum tubus hic non nisi 22 pollices longus sit: ob hanc causam follis magis magisque se divaricabit, usque dum mercurius ascensum continuans, supremum follis tam grave reddat, ut inferior pars a pinna C se expediat, follisque ad inversum prorsus situm revolvatur; nisi vasculum G ita convenienter collocatum eundem in situ horizontali, juxta Figuram 2 detineret: pars etiam F alia pinna C sistenda est. Tunc mercurius pondere suo ex folle, per tubum E G, defluet in vasculum G; ipseque follis eo usque se contrahet, ut pars E F ita levis evadat, ut sacoma B valeat partem F a pinna C liberare: tum follis se iterum eriget, ut in Figura 1; mercurius in eo residuus, descendet denuo ad altitudinem 27 pollicum, & consequenter cæteri effectus omnes supra memorati contingent, motusque in perpetuum continuabitur. Huc usque Auctor Gallicus. No.XXV.

Ad hoc notandum est: quod follis se non distendere possit, per pressionem interiorem, nisi hæc pressio fortior sit exteriore: jam vero in hoc casu pondus atmosphæræ libere premit exteriorem follis partem; verum ad interiorem pervenire non potest, nisi per tubum G E; qui continens 22 pollices perpendiculares mercurii, ita contranititur pressioni aeris, ut supponendo hanc pressionem esse 27 pollicum mercurii, eadem hæc non possit premere interiorem partem follis, nisi pondere quinque pollicibus mercurii perpendicularibus æquipollenti.

Unde concludere licet, pressionem atmosphæræ intra follem plus debilitatam esse, quam ut mercurium in dicto folle contentum possit adjuvare; id quod calculo facile ostendi potest, dictumque follem, juxta Fig. 1. erectum, clausum potius perstiturum, quam se expansurum. Ut ita, nullo laboris sumptuumve periculo facto, quivis certus esse possit, machinam ejusmodi omnino fore frustraneam. *Hactenus* D. PAPINUS.

N°. XXVI.

EXAMEN BERNOULLIANUM.

Acta Erud. Lips. 1686. Dec. p. 625.

MACHINA hæc peringeniosa est, & cum legibus hydrostaticis prima fronte egregie conspirare videtur: sed hoc habet peculiare, quod qua parte eam optime cum iis consentire putes, eadem si penitius inspexeris, quam maxime iis repugnare deprehendas. Consistit autem in specie quadam Follis, 40 digitos alti, impletique mercurio, cuspide sua deorsum, base sursum versa, & circa axem horizontalem, alterutrius alæ medio applicatum, mobilis. Existimat enim Inventi hujus Auctor (sed falso, ut mox videbimus) argentum vivum in folle descensurum ad consuetam, quam in experimento Torricelliano obtinet, 27 digitorum altitudinem, atque hoc suo descensu dilataturum alas follis, relicto in summitate ejus vacuo, quod alio deinceps mercurio, mediante aeris pressione, adimplendum sit. Ansam erroris haud dubie captavit inde, quod videret hydrargyrum non tantum in fistulis cylindricis, sed in tubis quoque inferne acuminatis & conum referentibus, descendere solere: non considerans, aliam longe hac in parte rationem esse mercurii suspensi in cono firmorum laterum & acuminis perforati, per quod defluere possit in vasculum; aliam rationem mercurii in folle ejusmodi, seu cono subtus impervio, detenti, & vicissim per solam laterum aperibilium expansionem descensum molientis. Dico namque, multo majorem requiri quam 40 digitorum in tali cono inclusoque mercurio altitudinem, ad æquipondium faciendum cum externo aere, latera coni introrsum premente; nedum, ad ejus pressionem superandam. Cujus assertionis veritatem, simplicioris calculi, & majoris evidentiæ ergo, ostendam solum in tri-

an-

angulo, facile postmodum accommodando ad pyramides conosve, in quibus, ob dimensionum pluralitatem, demonstratio valebit a fortiori. N. XXVI.

Esto itaque Triangulum Isosceles ABC, (*Fig.* 3) perpendiculariter erectum, cujus angulus, seu vertex B, deorsum prospiciens libere aperiri claudique possit; sic ut ejus crura AB, CB repræsentent quasi duos vectes mobiles circa punctum B, ceu hypomochlium suum. Area porro trianguli tota repleta sit mercurio, qui divisus concipiatur in filamenta innumera, qualia sunt *db*, *db*, tum inter se, tum axi DB parallela, quæ pondere suo agant in crura AB, CB, eaque divaricare conentur; dum totidem filamenta atmosphærica *eb*, *eb*, extus urgentia, eadem comprimere annituntur: ubi statim apparet, tametsi filamentum mercuriale DB, 40 digitos longum, pondere exsuperet æque crassum filamentum atmosphæricum; bene tamen fieri posse, ut omnia filamenta mercurialia simul sumpta, ut pote continue versus A & C decrescentia, multo minus habeant momentum atmosphæricis omnibus simul sumptis, ceu pondere & longitudine ad sensum æqualibus. Sed ut palam fiat, quanta debeat esse altitudo trianguli seu longitudo filamenti DB, ut momenta utrobique reddantur æqualia; considerandum, pondera filamentorum mercurialium *db*, *db*, constituere ab A versus B [perinde ut ex altera parte quoque] infinitam seriem arithmetice progressionalium, 0, 1, 2, 3, 4, &c. usque ad DB, cujus pondus appellemus x: distantias vero eorundem respectivas ab hypomochlio B [posita AB $=a$] esse a, $a-1$, $a-2$, $a-3$, $a-4$, &c. usque ad $a-a$; adeoque momenta, utpote ex ratione ponderum & distantiarum composita, 0, $a-1$, $2a-4$, $3a-9$, $4a-16$ &c. usque ad $ax-ax$, quæ series est primanorum, diminuta serie secundanorum, cujus proin summa est $aax:6$. Nam quanquam momenta revera minora sint, propter obliquam filamentorum actionem in crura trianguli, hoc tamen non officit calculo; quoniam, ex altera parte, filamenta atmosphærica actione sua reflexa eodem obliquitatis angulo latera ista feriunt, atque ita eorum momenta in eadem ratione minuuntur. Constituunt autem isto-

N. XXVI. rum filamentorum atmosphæricorum pondera seriem æqualium; quorum singula vocentur p; distantiæ eorum ab hypomochlio B, eædem sunt quæ supra: unde resultat series momentorum, pa, $pa - p$, $pa - 2p$, $pa - 3p$, $pa - 4p$, &c. usque ad $pa - pa$, cujus summa existit $paa : 2$. Et quoniam momenta hinc inde supponuntur æqualia, erit igitur $aax : 6 = aap : 2$, sive $x = 3p$: quod indigitat, pondus filamenti mercurialis DB triplo majus esse debere pondere similis filamenti atmosphærici; id est, [si pondus atmosphæricum, numero rotundo, 30 digitis mercurialibus æquivalere supponamus] follem triangularem 90 digitos altum requiri, antequam inclusus mercurius æquilibrium duntaxat cum aere constituat, nedum illi prævaleat. Quod si vero in pyramide vel cono similis calculus institueretur: deprehenderetur, omnino quadruplo majorem, scilicet 120 digitorum in illis altitudinem deposci.

Sed & porro, etiamsi follis triangularis 90, aut pyramidalis conicus-ve 120 digitis fieret altior, non tamen existimandum est, descensurum propterea in illo mercurium ad dictos usque 90, vel 120 digitos: hærebit enim iis adhuc notabiliter altius, ob rationem quod descendendo deserit supremam alarum follis partem: in quam pergit agere aer externus, qui majori hac ratione sustinendæ altitudini par est. Si (*Fig.* 4) Latus trianguli AB vocetur l; altitudo mercurii BD, [quam obtinet in triangulo ABC,] $mp > 3p$; & altitudo ejusdem BE [ad quam descendit in folle expanso aBc,] y; reperietur æquatio $y^4 - 3plly + mmppll - m^4p^4 = 0$ *. Quo circa, posita altitudine DB, seu

mp

* Quoniam in folle expanso non major est mercurii quantitas quam in contracto, erit $BD \times DA = BE \times EF$, seu [posito $BF = x$] $mp \times \sqrt{(ll - mmpp)} = y\sqrt{(xx - yy)}$. Momenta autem filamentorum atmosphæricorum in totum latus Ba, efficiunt summam $= \frac{1}{2}pll$ [hic enim latus vocatur l, quod supra dicebatur a]. Momenta vero filamentorum mercurialium in partem BF [x] lateris BA agentium, & quorum maximum est BE [y], efficiunt summam $= \frac{1}{6}xxy$ [Scil. hic x idem est quod supra a, & y idem quod supra x]. Ergo, ob æqualia momenta, habemus $\frac{1}{2}pll = \frac{1}{6}xxy$, vel $xx = 3pll : y$; quo substituto, æquatio superior $mp\sqrt{(ll - m^2p^2)} = y\sqrt{(xx - yy)}$, mutatur in $mp\sqrt{(ll - mmpp)} = y\sqrt{(3pll : y - yy)}$; quadrando $llmmpp - m^3p^3 = 3llpy - y^4$, seu $y^4 - 3llpy + llmmpp - m^3p^3 = 0$.

$mp = 4p = 120$ digit. Si latus follis AB $= l$, statuatur digitorum, erit $y = 106$ fere: & si $l = 140$; erit $y = 101$ fere, utrobique scilicet major quam 90. Sin $l = 150$; erit quidem $y = 90$, præcise, sed tum nullum in folle relinquitur vacuum, mercurio replente totam ejus cavitatem, utpote quæ expansis ultra rectum angulum alis iterum diminuitur, sicuti antea accreverat. Si $l = 150$, descendet mercurius, dilatabiturque follis ultra angulum rectum, quousque nullum in illo supersit vacuum, siquidem hoc per ejus aperibilitatem liceat; secus enim relinquetur quidem vacuum, sed utroque casu argentum in majore quam 90 digitorum altitudine hærebit. Si denique $l > 170$, nec descendet mercurius, nec dilatabitur follis omnino; quoniam alias volumen ejus contraheretur, nec argentum haberet, quo cederet. N.XXVI.

Illud etiam insuper non prætereundum est, quod in allato calculo solius aeris lateralis in comprimendis cruribus vires contemplati sumus, exclusa adhuc consideratione aeris basi trianguli A C imminentis, eamque desuper deprimentis introrsum, atque ita alarum AB, CB distensionem tanto fortius prohibentis: quo fit, ut ad mercurii descensum promovendum altitudo trianguli assignata multo adhuc major requiratur. Si & hujus habenda foret ratio, id accuratius quidem non assequeremur, quam si calculum nostrum fundaremus super Principio illo Mechanico, quo statui solet, *Nullum produci posse motum naturalem, nisi eo motu, centrum commune gravitatis corporum in se agentium descendat.* Hunc enim in finem concipiendum esset triangulum A B C [*Fig.* 4.] inclusum Rectangulo HI, latitudinis arbitrariæ, altitudinis vero ultra fines Atmosphæræ H L tantisper productæ; cogitandumque, dum dilatato triangulo subsidit mercurius in FG, necessum esse, ut aer exundet in M N; adeoque ut centrum gravitatis hujus attollatur, illius deprimatur: unde id solum calculo explorandum relinquitur, utrum commune utriusque centrum gravitatis eo motu elevetur deprimaturve; & si reperiatur deprimi, quousque devaricanda sint crura A B, C B, donec illud loco omnium humillimo consistat. Quod Problema ut jucundum, sic Viris Analystis non prorsus indignum censebitur. Ubi id solum moneo, aerem basi

N. XXVI. basi trianguli AC incumbentem, diversos plane habiturum effectus; prout basin hanc vel rigidam & solutam, vel, ut est, introrsum plicatilem & punctis A, C affixam conceperis; priori namque casu conatum mercurii in divaricandis cruribus juvat; posteriori, in iisdem contrahendis, aeri laterali auxilium feret.

Cum itaque ex hactenus dictis satis pateat, follem (seposito etiam aeris basin deprimentis impedimento) minimum 90 digitos altum requiri, ut in illo tantillus mercurii sequatur descensus: facile deinceps capiet Lector, nequicquam ejus medio adaptari exterius vasculum cum tubo ad summitatem follis pertingente, ad replendum, si quod ibi extiterit vacuum: quoniam enim tubus eum in finem ad minimum 45 digitos longus sit oportet, manifestum est fluxum mercurii per illum succedere non posse.

Si quis vero malo huic medelam allaturus, elevatione vasculi tubum abbreviare vellet, is novæ difficultati se intricatum sentiret; nam flueret tum quidem mercurius ex vase in follis summitatem; sed, isto postmodum circa axem medio sui applicatum rotato, situmque horizontalem adepto, argentum ex folle in vasculum se elevatius retrofluere amplius non posset. Taceo alia, quæ Machinam hanc urgent incommoda, ita comparata, ut si unam ejus partem perfecisse credideris, alteram continuo mancam & claudicantem deprehendas.

Videatur Nus. XXVIII.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 4.

Fig. 2.

N° 23.

N° 25. & 26.

Fig. 4.

Fig. 3.

Fig. 2.

N°. XXVII.

Q. D. B. V.

SOLUTIONEM TERGEMINI PROBLEMATIS, ARITHMETICI, GEOMETRICI, ET ASTRONOMICI;

Una, cum adnexis ex universa Mathesi

COROLLARIIS;

Pro vacante Sede Mathematica,

Ad diem 4 *Februarii Anni* M. DC. LXXXVII.

Ventilandam sistit

JACOBUS BERNOULLI, *L. A. M.*

Editum primo

BASILEÆ

1687.



PROŒMIUM.



UANQUAM in hoc studii genere, de quo promovendo solliciti nunc sunt Amplissimi Proceres, vires meas qualescunque jam frequenter satis publico ostenderim, haud ægre tamen, speciali hac occasione, nova isthæc profectuum specimina aggressus sum, ut laudabili Academiæ nostræ consuetudini, quantum in me foret, satisfacerem. Id interim in hac materia cavendum esse duxi, ne qui alias Exercitiorum istiusmodi Academicorum mos esse consuevit, magnum Propositionum numerum aliunde congererem, Thesiumque loco ventilandum proponerem; partim quia veritates mathematicæ ejus sunt certitudinis & evidentiæ, ut non, sicut pleraque alia, disputantium rixis & altercationibus obnoxiæ sunt; partim vero, & quidem præcipue, quoniam Propositiones multas ab aliis inventas & demonstratas in promptu habere ac ostentare, memoriæ potius vim, quam ingenii mathematici acumen redolet. Mathematici namque partibus defungitur, non qui aliorum inventa exscribere, memoria tenere, aut recitare data occasione potest; sed qui ab aliis proposita, divina ope Algebræ, invenire & eruere novit ipse. Hæc illa Magna Ars inveniendi est, qua destitutus non magis dicen-

dus quis est Mathematicus, quam qui Melodias omnifarias memoriter cantare didicit, propterea salutari solet Musicus, aut Arti musicæ docendæ præfici. Quemadmodum enim talis, ut apposito hoc simili utar, melodias omnes memoriæ mandatas prompte quidem sæpe, & canora voce canere novit, sed iis decantatis exhausta simul omnis ejus est scientia; contra vero ille, qui Musicam ex artis principiis addidicit, non opus habet ullam memoria imprimere, cum easdem illas quas novit alter, & infinitas alias sibi oblatas, ex notis, ut solemus loqui, decantare sciat: Ita etiam qui Algebra imbuti sunt, arte sua confisi, non magna Theorematum & Problematum ab aliis inventorum ac demonstratorum farragine memoriam suam onerari patiuntur, cum ipsimet vel ignotas sibi, vel oblivioni traditas Propositiones de novo inveniendi & demonstrandi artificium ac methodum norint. Quocirca officii mei ratio postulare videbatur, ut meas quoque in præsentiarum vires in præclara hac inveniendi Arte experirer; quem in finem tria selegi, non a me efficta, sed ab aliis proposita Problemata, Arithmeticum, Geometricum, & Astronomicum, *ex totidem Matheseos partibus, quæ in Academia nostra hactenus pro cathedra communiter tractari solebant. Illorum vero solutioni subjunxi, ex universa Mathesi cognatisque disciplinis, nonnulla Corollaria; ut Lector de nobilissima hac scientia, ejusque usu latissimo dignas concipere discat ideas, Deoque O. M. pro rebus tam præclaris, tamque utilibus, quas generi Mortalium revelare voluit, debitas persolvat gratias.*

SOLUTIO



SOLUTIO
TERGEMINI PROBLEMATIS.

I. PROBLEMA ARITHMETICUM:

Invenire, absque Algebræ subsidio, solius Arithmeticæ Numerosæ ope, Numerum, qui 12 & 36 ita dividat, ut si quotorum utrique addantur 8, summæ hinc emergentes sint in ratione 3 ad 5.



UM Problema istud, antehac ventilatum, Auctorem habeat insignem, Amico referente, Mathematicum, cui præter Algebram, per solam Numerosam Arithmeticam, vix solvi posse visum fuerit; omnino dignum censui nodum hunc, in quo solvendo vires meas experirer. N.XXVII.

Hoc vero antequam præstem, sequentia præmonenda habeo.

I. Per *Algebram* intelligunt Mathematici Logisticam illam symbolicam, quæ loco numerorum symbolis quibusdam, videlicet litteris Alphabeti, aliisque characteribus, in suis calculis uti solet. Ejus præcipua & principalis pars vocatur *Analytica*, *Ars Resolutoria*, in eo consistens, ut quantitati quæsitæ, seu incognitæ, assignetur littera, & tum juxta Propositionis tenorem procedatur, nullo inter cognitas & incognitam facto discrimine; donec, varia instituta reductione, quantitas incognita æquetur alicui pure cognitæ. Atque hic calculus non confundendus est cum alio cal-

N.XXVII culo ſymbolico, vel algebraico, qui Syntheticus magis eſt, quique in Theorematibus demonſtrandis ut plurimum adhibetur, qualis ille eſt, quo mox proprietatem Regulæ Falſi demonſtratam dabimus: *Analyſis* enim plerumque in Problematibus ſolvendis (quale noſtrum eſt) in quibus aliquid faciendum vel inveniendum præſcribitur, locum habet; adeo ut Auctoris noſtri mens haud dubie non ſit, a ſolutione hujus Problematis ſymbola algebraica omnino arcere, ſed innuere duntaxat, illud aliter quam *Analytice* ſolvi non poſſe.

II. Probè obſervari velim, Arithmeticam Numeroſam non ita ab Algebra independentem eſſe, ut Regulas ſuas ſuismet debeat principiis, aut eas ex alio quam Algebræ fundo hauſerit. Ipſæ enim pleræque vulgaris Arithmeticæ Regulæ, ut ſunt, Regulæ falſi, Virginum, Alligationis, Societatis, imo ipſa Regula Trium, Algebræ ſubſidio aut primitus inventæ ſunt, aut ſi neſciantur, vel oblivioni tradantur, ſaltem inveniri denuo & demonſtrari poſſunt; omneſque Æquationes algebraicæ, quarum numero infinitæ ſunt, nil aliud præſtant, quam totidem novas ſuppeditare Regulas, quibus Arithmetica Numeroſa quodammodo in immenſum ditari poſſet. Et quidem ut talis Regula omnibus ejuſdem generis exemplis accommodanda Analytice inveniatur, opus eſt, ut non tantum incognitæ, ſed & cognitæ, dataque quantitates Alphabeti litteris deſignentur; quod ut in noſtro exemplo palam fiat, ſic proponi poterit.

Invenire numerum aliquem (v) *qui duos datos* (a *&* b) *ita dividat, ut ſi quotorum utrique addatur datus numerus* (c,) *ſumma hinc emergentes ſint in data ratione* (d *ad* e).

Analyſis



N.XXVII

Analysis sic habet: $\frac{a}{v} + c : \frac{b}{v} + c = d : e,$

$$\frac{a+cv}{v} : \frac{b+cv}{v} = d : e,$$

$$a+cv : b+cv = d : e$$

$$ae+cev = bd+cdv$$

$$cev - cdv = bd - ae$$

tandemque $v = (bd - ae) : (ce - cd)$

In quibus octo litteris universalis involvitur Regula, omnibus similibus exemplis solvendis inserviens, quæ quidem verbis sic enunciabitur:

Regula: *Datos numeros* (a & b) *duc in alternos data rationis terminos* (e & d): *productum minus a majori subtrahe; quod reliquum est* (bd — ae) *erit Dividendus. Similiter numerum addendum* (c) *duc sigillatim in utrumque rationis terminum, iterumque productum minus a majori subtrahe: reliquum* (ce — cd) *erit Divisor, per quem si dividatur Dividendus, indigitabit Quotiens numerum optatum* (v).

Ad hunc modum pro quolibet exemplorum genere, ope Algebræ, peculiaris invenitur Regula; interque infinitas istas Regulas hæc sola differentia est, quod paucæ admodum illarum tantum, illæ videlicet quæ in vita civili insignem & frequentem præbent usum, vulgo in Systemata Arithmetica referri soleant; adeo ut vulgaris Arithmetica Numerosa, proprie loquendo, nihil aliud sit quam Complexio quinque vel sex Æquationum algebraicarum sive Regularum, præ cæteris in vita civili eximium & frequentem usum habentium.

Itaque cum quæstio est, *An aliquod exemplum solvi possit ope Arithmetica Numerosa?* sensus hic est, *An præter Regulam, quam unumquodque Exemplorum genus peculiarem sibi deposcit, solvi quoque possit per aliquam illarum in Systematibus vulgo receptarum?* Ubi manifestum est, ut istud fieri queat, Exemplum propositum conditionem Problematum illa Regula solvendorum habere debere;

N.XXVII re; vel si non habeat, eo reducendum esse, ut conditionem hanc acquirat.

Quod jam præsens nostrum spectat Problema, cuivis tentanti facile patebit, illud, ex. gr. per *Regulam Falsi* solvi non posse; quod quidem indicium præbet, deficere ipsi conditionem, quam requirunt Exempla per Regulam Falsi solvenda; interim vero levi opera eo reduci poterit, ut hanc conditionem induat.

Proprietas Regulæ Falsi vult; Ut *differentia numeri veri & numerorum assumptorum inter se existant ut mendacia.*

Demonst. Esto enim v, Numerus verus, qui quæritur: $v \pm m$, $v \pm n$, numeri assumpti; adeoque m & n differentiæ veri & assumptorum, p & q mendacia: Demonstratio sic habebit:

$$\begin{array}{ll} v+m & +p \\ v+n & +q \end{array} \Big\} \; p-q$$

$$vq+mq \qquad vp+np$$

$$v=\frac{vp+np-vq-mq}{p-q}$$

$$vp-vq=vp+np-vq-mq$$

$$np=mq$$

$$\begin{array}{ll} v-m & -p \\ v-n & -q \end{array} \Big\} \; p-q$$

$$vq-mq \qquad vp-np$$

$$v=\frac{vp-np-vq+mq}{p-q}$$

$$vp-vq=vp-np-vq+mq$$

$$np=mq$$

$$\begin{array}{ll} v+m & +p \\ v-n & -q \end{array} \Big\} \; p+q$$

$$vq+mq \qquad vp-np$$

$$v=\frac{vp-np+vq+mq}{p+q}$$

$$vp+vq=vp-np+vq+mq$$

$$np=mq$$

Quoniam semper deprehenditur $np=mq$, erit $m:n=p:q$. id est, differentiæ veri & assumptorum, ut mendacia. Q. E. D.

Ut igitur in nostro Problemate requisita conditio adsit, & differentiæ istæ mendaciis suis proportionales fiant, designentur assumpti

sumpti numeri falsi per f, & g: verus per v, adeoque differentiæ N.XXVII
per $f-v$, & $g-v$. Jam quia mendacia debebant esse, ut $f-v$, & $g-v$, erunt, substituto valore ipsius v reperto supra, ut $f-(bd-ae):(ce-cd)$ & $g-(bd-ae):(ce-cd)$, id est, ut $(cef-cdf-bd+ae):(ce-cd)$ & $(ceg-cdg-bd+ae):(ce-cd)$, id est, ut $cef-cdf-bd+ae$ & $ceg-cdg-bd+ae$, id est, si pro uno mendaciorum ponatur $cef-cdf-bd+ae$ [nempe differentia inter $ae+cef$ & $bd+cdf$] erit alterum pariter mendacium $ceg-cdg-bd+ae$ [videlicet differentia inter $ae+ceg$ & $bd+cdg$.] Mendacia autem ista habentur, si exploretur, num $a+cf:b+cf=d:e$. item $a+cg:b+cg=d:e$, id est, num producta ex $a+cf$ in e, & $a+cg$ in e sint æqualia productis ex $b+cf$ in d, & $b+cg$ in d. Si enim producta ista sint inæqualia (quod semper fiet, quando assumpti f & g a vero v, abludunt) eorum differentiæ indigitabunt mendacia; quibuscum, si rite juxta præcepta Regulæ Falsi duarum positionum opereris, obtinebis quæsitum.

Liquet hinc, quam levi mutatione opus sit, ut Problema nostrum naturam Exemplorum per Regulam Falsi solvendorum induat. Sic enim tantum proponendum foret:

Quæritur Numerus ita comparatus, ut si numeris 12 & 36 seorsim addatur productum ex quæsito & dato 8, summa hinc emergentes sint in ratione 3 ad 5.

Aliter quoque rem expedivi hac ratione: Consideravi, quotos (quos Problema innuit) eandem habere debere ad invicem rationem, quam habent ipsi numeri dati 12 & 36, adeoque etiam unum quotorum + 8, ad alterum quotorum + 8, eandem habere rationem, quam habet numerus 12 + numero cv (toties scilicet continente octonarium c, quoties alteruter dividendus continet suum quotum) ad 36 + eodem numero cv, per 15. V. El. Unde sequitur, si unus quotorum + 8, ad alterum + 8, est ut 3 ad 5; fore quoque numerum 12 + numero cv, ad 36 + numero cv, ut 3 ad 5. Positis ergo, pro hoc numero cv, duobus quibusvis, institui poterit per illos examen juxta Regulam Falsi; propterea quia mendacia differentiis veri & assumpto-

N.XXVII rum iterum erunt proportionalia, id quod facile demonstrari posset, si prolixitate hac foret opus. Reperietur autem in nostro Exemplo pro numero *cv*, 24: qui quia ter continet octonarium *c*, sequitur etiam ipsos dividendos 12, & 36, continere suos quotos ter; idest, numerum quæsitum *v* esse *ternarium*.

II.

PROBLEMA GEOMETRICUM.

CUM versarer Amstelodami, Geometra quidam in plateis publicis sequens affixit Problema, invitato (qui Mathematicorum mos est) ad ejus solutionem Lectore.

Fig. 1. 2. 3. *Op een pladt ABC, in de welcke AB* 50, *BC* 100, *en den hoek ABC regt, sijn opgeregt de loodtry hangenden AB* 200, *BE* 150, *en CF* 100, *in't zelve plat te vinden alte stippen G, H, enz. alsoo dat (wanneer in een vierhoek IKLM de hoecken IKM en ILM in't besonder regte zijn, KL* 33, *beyde IK en IL t'samen* 77, *en beyde KM en LM t'samen* 99) *beyde IK en IM t'samen tot KM de selve reden hebben, als DG tot FG, DH tot FH, enz. Desgelijks also dat (wanneer in een geliik beenigen driehoek NOP, wiens geliicke NO en NP in't besonder* 100, *en de groond-streep OP* 56, *drie aan-een-rakende ronden ingeschreven zijn) d'halfmid streep QR des ongelijken rondts tot d'halfmidstreepen ZY en VY der gelijcke ronden in't bijsonder heeft een tweevoudige reden der gene, die EG tot FG, EH tot FH, enz. heeft. Te vinden, seg ik DG, DH, enz. EG, EH, enz. en FG, FH enz.*

id est:

Erectis super plano ABC, (*in quo* AB 50, BC 100, *angulusque* ABC *rectus*) *tribus perpendicularibus*, AD 200, BE 150 *&* CF 100, *invenire in plano illo omnia puncta* G, H, *&c. ita comparata, ut* (*existentibus in quadrangulo* IKLM *angulis* IKM *&* ILM *sigillatim rectis*, KL 33, *ambabus* IK, IL, *simul sumptis* 77, *& ambabus* KM, LM *simul sumptis* 99) *amba* IK, IM *simul sumpta ad* KM *eam rationem habeant, quam*

DG

DG *ad* FG, DH *ad* FH *&c.* *Similiter, ut* [*inscriptis triangulo* N.XXVII *Isosceli, cujus crura* NO *&* NP *sigillatim sunt partium* 100, *& basis* OP 56, *tribus circulis sese mutuo tangentibus*] *semidiameter inaequalis circuli* QR *ad semidiametrum alterutrius aequalium circulorum* ZY *vel* VY, *habeat rationem duplicatam ejus, quam habet* EG *ad* FG, EH *ad* FH, *&c. invenire, inquam*, DG, DH, *&c.* EG, EH, *&c. &* FG, FH, *&c.*

Patet, Problema istud tria distincta Problemata in sinu fovere, quorum duo priora tertio principaliori Lemmatum instar praemittenda sunt.

LEMMA I.

D*atis in Quadrilatero* IKLM, [Fig. 1.] *latere* KL, 33; IK+IL, 77; KM+LM, 99: *angulisque* IKM, ILM *rectis; invenire seorsim latera* IK, KM, IM: *& proinde etiam* IK+IM, *rationemque quam habet* IK+IM *ad* KM.

SOLUTIO: Constat ante omnia, circumferentiam circuli super diametro IM descripti transituram per puncta K & L, ob angulos IKM, ILM rectos; adeoque circa quadrilaterum IKLM circumscribi posse circulum. Quare IL in KM = IK in LM + KL in IM.

Sunto jam KL $= a$ Item KM $= x$
IK + IL $= b$ IL $= y$
KM + ML $= c$ IM $= z$
adeoque IK $= b - y$
LM $= c - x$

$$IKq + KMq\ [IMq] = LMq + ILq$$
$$bb - 2by + yy + xx = cc - 2cx + xx + yy$$
$$bb - 2by = cc - 2cx$$
$$2cx = cc - bb + 2by \ \&\ x = (cc - bb + 2by) : 2c, \odot.$$
$$2by = bb - cc + 2cx \ \&\ y = (bb - cc + 2cx) : 2b.$$
$$\odot.\ xx = (c^4 + b^4 + 4bbyy - 2bbcc + 4bccy - 4b^3y) : 4cc, \text{E}$$

Atqui etiam IKq + KMq = IMq
$$bb - 2by + yy + xx = zz$$

N.XXVII Substituto igitur in hac Æquatione valore ipsius xx ♄. Erit
$zz = (c^4 + b^4 + 2bbcc - 4b^3y - 4bccy + 4bby + 4ccyy) : 4cc$, ♃.
Porro KM in IL = KL in IM + IK in LM

$$xy = az + bc - cy - bx + xy$$
$$bx + cy - bc = az$$
$$z = (bx + cy - bc) : a,$$

positoque valore ipsius x ☉, habebitur

$$z = (2bby + 2ccy - b^3 - bcc) : 2ac$$

$zz = (4b^4yy + 4c^4yy + b^6 + bbc^4 + 8bbccyy - 4b^5y - 8b^3ccy - 4bc^4y + 2b^4cc) : 4aacc = (c^4 + b^4 + 2bbcc - 4b^3y - 4bccy + 4bbyy + 4ccyy) : 4cc$, ♃.

Facta utrinque multiplicatione per $4aacc$,
$4b^4yy + 4c^4yy + b^6 + bbc^4 + 8bbccyy - 4b^5y - 8b^3ccy - 4bc^4y + 2b^4cc = aac^4 + aab^4 + 2aabbcc - 4aab^3y - 4aabccy + 4aabbyy + 4aaccyy$.

Transponatur yy in unam partem,
$(4b^4 + 4c^4 + 8bbcc - 4aabb - 4aacc)yy = (4b^5 + 8b^3cc + 4bc^4 - 4aab^3 - 4aabcc)y - b^6 - bbc^4 - 2b^4cc + aac^4 + aab^4 + 2aabbcc$

Fiat divisio per quantitatem cognitam ipsi yy adhærentem, eritque $yy = by - bb : 4 + aacc : (4bb + 4cc - 4aa)$

$$y = \tfrac{1}{2}b + ac : 2\sqrt{(bb + cc - aa)}$$
$$x = \tfrac{1}{2}c + ab : 2\sqrt{(bb + cc - aa)}$$
$$z = (bb + cc) : 2\sqrt{(bb + cc - aa)}$$

Data	Inventa
Ergo positis KL = a = 33	unde IK = $b - y$ = 25
IK + IL = b = 77	LM = $c - x$ = 39
KM + ML = c = 99	& IK + IM = $b - y + z$ = 90
reperitur KM = x = 60	adeoque
IL = y = 32	IK + IM : KM = 90 : 60 = 3 : 2
IM = z = 65	

Constr. Geom. [Figura 4.] Ductis normalibus AC, BL, abscindatur OL = b, & OA = c; subtensa AL fiat diameter semicirculi AKL, in quo applicetur data LK, ducaturque KA. Fiant anguli OLC & OAB = LAK. Bissecentur BL & AC, in D

& E;

& E; super KL erigantur △KLI & KLM, ut sit LI = LD, KI = DO, KM = AE, LM = EO, jungaturque IM. Erit IKLM optatum quadrilaterum. N.XXVII

LEMMA II.

In Triangulo Isoscele NOP [Fig. 2.] *cujus omnia latera data sunt*, NO [NP] 100. & OP 56; *inscribere tres circulos se mutuo & trianguli latera tangentes, eorumque invenire centra & radios; & proinde tum rationem, quam hi radii inter se habent, tum rationis hujus subduplicatam.*

SOLUTIO. Observandum 1°. circulos ad basin esse necessario æquales: 2°. illos tangi debere a demissa perpendiculari NS. 3°. in hac perpendiculari fore centrum circuli ad verticem.

Sunto jam SP $= a$	Item SW $=$ VW $= y$
SN $= b$	QR $= z$
PN $= \sqrt{(aa+bb)} = c$	adeoque WP $= a - y$

PX $=$ WP $= a - y$, ob congruent. Triang. VPX, VWP

SP : PN $=$ SW : NT ♃	SP : SN $=$ PW : WT
$a : c = y : \frac{cy}{a}$	$a : b = a - y : b - \frac{by}{a}$

Hinc VT [WT — WV] $= b - y - by : a$ ☿

& VT$q = bb + yy + bbyy : aa - 2by - 2bby : a + 2byy : a$

TXq (VTq — VXq) $= bb + bbyy : aa - 2by + (2byy - 2bby) : a$, ♄

SP : SN $=$ VX : TX ♀

$$a : b = y : \frac{by}{a}$$

Pro inveniendis centris circulorum ad basin:

Modus I.

$$TXq = ♀\ bbyy : aa = *\ bb + bbyy : aa - 2by + (2byy - 2bby) : a$$

$$2byy : a = 2bby : a + 2by - bb$$

$$2byy = 2bby + 2aby - abb$$

N. XXVII

$$yy = by + ay - \frac{1}{2}ab$$

$$y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb)}$$

hoc est $y = (a + b - c) : 2$, propter $\sqrt{(aa + bb)} = c$

Aliter brevius.

NY [NS — SY] = NX [NP — PX], ob congr. Tr. NVY, NVX

$$b - y = c - a + y$$

adeoque $y = (a + b - c) : 2$

Modus II.

♃. NT + ♀ TX + XP = NP

$$cy : a + by : a + a - y = c$$

$$cy + by + aa - ay = ac$$

$$cy + by - ay = ac - aa$$

$$y = (ac - aa) : (c + b - a)$$

Modus III.

SP : PN = VX : ☿ VT

$$a : c = y : b - y - \frac{by}{a}$$

$$cy = ab - ay - by$$

$$cy + ay + by = ab$$

$$y = ab : (c + a + b).$$

Pro inveniendo centro circuli ad verticem.

Esto NX $= d$, quæ cognita y, latere nequit, utpote = NT + TX $= (cy + by : a)$

PS : SN = QR : NR

$$a : b = z : \frac{bz}{a}$$

Hinc RX [NX — NR] $= d - bz : a$ ☾

$$QVq = zz + 2yz + yy$$

$$QIq = (QR - VX)q = zz - 2yz + yy$$

IVq = QVq — QIq $= 4yz = dd - 2bdz : a + bbzz : aa =$ ☾ RXq

$$4aayz = aadd - 2abdz + bbzz$$

$$bbzz = 2abdz + 4aayz - aadd$$

$$zz = (2abdz + 4aayz - aadd) : bb$$

$$z = (abd + 2aay - 2a\sqrt{(abdy + aayy)}) : bb.$$

Sive

Sive substituto valore ipsius $d = (cy + by) : a$ & $aa + bb = cc$ N.XXVII
$z = (ccy + aay + bcy - 2ay\sqrt{(bc + cc)}) : bb$

Ergo positis SP $= a = 28$	Invenitur VW $= y = 12$
SN $= b = 96$	NX $= d = 84$
adeoque PN $= c = 100$	QR $= z = 16\frac{1}{3}$.

Hinc QR : VX $= 16\frac{1}{3} : 12 = 49 : 36 = 7 : 6$ bis.

Constr. Geom. Producta perpendiculari NS, (*Fig.* 5.) SE = SP, abscissaque NC = NP, dimidio residui CE assumatur æqualis SY, super qua descriptis quadratis SV & SZ, erunt puncta V & Z centra circulorum ad basin; quæ quidem reperiuntur aliter, bisecando angulos NSP & SPN; per 4. IV. EUCL. Deinde, protracto latere quadrati YV, usque ad I intersectionem NP, factaque NG = SY, ducantur rectæ IM, FGH, illa perpendiculari NE, hæc basi OP parallela: ipsi vero FH assumatur æqualis YA, & agatur AB etiam parallela basi OP. Huic AB statuatur æqualis SD, centroque D, radio DS, describatur arcus SM secans rectam IM in M: iterumque centro V, radio VM, alius designetur arcus, secans perpendicularem in Q. Erit Q centrum circuli ad verticem.

PROPOSITIO PRINCIPALIS.

Erectis super plano ABC: (Fig. 3) (*in quo* AB 50, BC 100, *angulusque* ABC *rectus*) *tribus perpendicularibus*, AD 200, BE 150, *&* CF 100, *invenire in plano illo omnia puncta* G, H, *&c. ita comparata, ut* DG *sit ad* FG, DH *ad* FH, *&c. in ratione sesqui-altera* (*ea videlicet quam habet in quadrilatero* Schem. 1, IK + IM *ad* KM.) *Et ut* EG *ad* FG, EH *ad* FH, *&c. habeat rationem sesquisextam* (*subduplicatam nempe ejus, quam in Isoscele* Schem. 2, QR *habet ad* VX.)

Sunto	AD $= a$	DG : FG $= m : o$	BT $= x$
	CF $= b$	EG : FG $= n : o$	TG $= y$
	BE $= c$		RT $= d - x$
	AB $= d$		CS $= e - y$
	BC $= e$		AG q

N.XXVII $AGq\ (ATq + TGq) = dd - 2dx + xx + yy$

$DGq\ (AGq + ADq) = dd - 2dx + xx + yy + aa$

Pariter $FGq\ (CSq + SGq + CFq) = ee - 2ey + yy + xx + bb$

Unde Proportio

$DGq : \qquad FGq$

$dd - 2dx + xx + yy + aa : ee - 2ey + yy + xx + bb = mm : oo$

eaque ad æqualitatem reducta

$mmee - 2mmey + mmyy + mmxx + mmbb = oodd - 2oodx + ooxx + ooyy + ooaa$

$mmyy - ooyy - 2mmey = - mmxx + ooxx - 2oodx + ooaa + oodd - mmbb - mmee$

$yy - 2mmey : (mm - oo) = - xx - (2oodx - ooaa - oodd + mmbb + mmee) : (mm - oo)$

Pro inveniendo loco Æquationis, consule Element. Curvarum *Joh.* DE WITT, inserta poster. Parti *Geom.* CARTES. Lib. 2. Cap. III. pag. 296. Quod ita fit:

$z = y - mme : (mm - oo)$, aut $y = z + mme : (mm - oo)$

$yy = zz + 2mmez : (mm - oo) + m^4ee : (mm - oo)^2$

$2mmey : (mm - oo) = 2mmez : (mm - oo) + 2m^4ee : (mm - oo)^2$

Ergo $yy - 2mmey : (mm - oo) = zz - m^4ee : (mm - oo)^2$

Hinc $zz - m^4ee : (mm - oo) = - xx - (2oodx - ooaa - oodd + mmbb + mmee) : (mm - oo)$

$zz + xx + 2oodx : (mm - oo) = (ooaa + oodd - mmbb - mmee) : (mm - oo) + m^4ee : (mm - oo)^2$

Positoque $x + ood : (mm - oo) = u$ seu $x = u - ood : (mm - oo)$

$zz + uu - o^4dd : (mm - oo)^2 = (ooaa + oodd - mmbb - mmee) : (mm - oo) + m^4ee : (mm - oo)^2$

$zz = - uu + (ooaa + oodd - mmbb - mmee) : (mm - oo) + (m^4ee + o^4dd) : (mm - oo)^2$

Positoque $(ooaa + oodd - mmbb - mmee) : (mm - oo) + (m^4ee + o^4dd) : (mm - oo)^2 = ff$

Erit $zz = - uu + ff$.

Unde

Unde apparet, æquationem esse reductam ad formulam Theorematis XIV, Locumque quæsitum esse Circumferentiam Circuli, quæ quidem determinatur ita: N.XXVII

Figura 6. Producta BC, fiat BK $= mme : (mm - oo)$, ut CK sit $mme : (mm - oo) - e$ seu $ooe : (mm - oo)$. Per K ducatur LK parallela ipsi AB, fiatque KM $= ood : (mm - oo)$, producta scilicet AC in LM, ut sit CB : BA = CK : KM, seu e ad d, ut $ooe : (mm - oo)$ ad $ood : (mm - oo)$. Super M, radio MG $= f$, describatur circulus, cujus peripheria GNH est Locus optatus. Assumpto enim in illa puncto utcunque, veluti P, actaque in BA protractam, si opus sit, perpendiculari PS, si BS vocetur x, & SP, y; erit LP (SP − SL) $y - mme : (mm - oo) = z$, & quoniam LM (LK + KM) $= x + ood : (mm - oo) = u$, hinc $zz + uu$ ($LPq + LMq$) $= MPq = MGq = ff$. quare $zz = - uu + ff$. Q. E. D.

Quod si in Loci hujus investigatione punctum G extra angulum ABC, vel superne, vel inferne, vel a parte dextra, vel sinistra assumptum fuisset, in eandem perpetuo æquationem incidissemus, variatis tantum omnifariam signis + & − quantitatum $2mmey : (mm - oo)$ & $2oodx : (mm - oo)$. Interim determinatio & constructio Loci prorsus manet eadem.

Fig. 3. & 6. Pro determinando Loco altero, qui respondet rationi EG ad FG, seu n ad o, haud absimili calculo reperitur Æquatio: $yy - 2nney : (nn - oo) = - xx + (oocc - nnbb - nnee) : (nn - oo)$. Positoque $z = y - nne : (nn - oo)$ sive $y = z + nne : (nn - oo)$ habetur $zz = - xx + (oocc - nnbb - nnee) : (nn - oo) + n^4ee : (nn - oo)^2$

Unde colligitur, Locum ipsum iterum esse Circumferentiam Circuli ita describendi: In producta BC, cape BO $= nne : (nn - oo)$ seu CO $= ooe : (nn - oo)$, faciendo scilicet CK : CO $= nn - oo : mm - oo$, & super O, radio OG $= \sqrt{((oocc - nnbb - nnee) : (nn - oo) + n^4ee : (nn - oo)^2)}$, fac peripheriam GQH, in qua optatus Locus est; cumque

N.XXVII. hic circulus priorem non nisi in duobus punctis G & H interſecare poſſit, ſequitur non niſi duo hæc puncta ſatisfacere junctim utrique rationi m ad o, & n ad o; hoc eſt *ita eſſe comparata, ut ducta ad illa a perpendicularium extremitatibus* D, E, F, *recta* DG, EG, FG, *&* DH, EH, FH, *ſint ad ſe invicem in rationibus m, n, o.*

Quoniam vero Problema noſtrum in numeris propoſitum fuit, omnes iſtæ lineæ etiam numeris exprimendæ ſunt:

Poſitis autem $AD = a = 200$
$CF = b = 100$
$BE = c = 150$
$AB = d = 50$
$BC = e = 100$

Ratione vero $\frac{m}{\frac{n}{o}} = \frac{9}{\frac{7}{6}}$

Inveniuntur $BK = mme : (mm - oo) = 180$
$CK = ooe : (mm - oo) = 80$
$KM = ood : (mm - oo) = 40$
$BO = nne : (nn - oo) = 376\frac{12}{13}$
$CO = ooe : (nn - oo) = 276\frac{12}{13}$
MG vel $MH = f = \sqrt{32000}$
OG vel $OH = \sqrt{((oocc - nnbb - nnee) : (nn - oo)}$
$+ n^4 ee : (nn - oo)^2) = \sqrt{128994\frac{14}{169}}$

Sed quod in hoc ſpeciali exemplo meretur obſervari, eſt, Quod altera interſectionum utriuſque Circuli præciſe cadat in ipſam hypothenuſam anguli recti ABC. Cum enim radius MG circuli GNH, centro M deſcripti, ſit $\sqrt{32000}$, & $CMq = CKq + KMq = 6400 + 1600 = 8000$; ideoque $CM = \sqrt{8000}$; erit CM rectæ GM ſubdupla, quia illius quadratum ſubquadruplum hujus quadrati: Proinde $GC = CM$. Ergo & demiſſa in latus BC perpendicularis $GR = 40 = KM$, & $RC = 80 = CK$; unde $RB = 20$, adeoque RO $(BO - BR) = 356\frac{12}{13}$, cujus Quadratum $21529600 : 169$, junctum $GRq = 1600$, pro-

prŏducit $2180000 : 169 = 128994\frac{14}{169} =$ quadrato hypo- N.XXVII
thenuſæ OG in Triang. Rectang. ORG: hinc ipſa hypothenuſa $OG = \sqrt{128994\frac{14}{169}}$, cui cum æqualis præciſe ſit radius circuli GQH, centro O deſcripti, ſequitur peripheriam ejus tranſituram per idem punctum G, ibidemque communem eſſe utriuſque circuli interſectionem.

Et quoniam $AG : AC = BR : BC$, at $BR = \frac{1}{5} BC$, erit quoque $AG = \frac{1}{5} AC$. Inſuper perpendicularis BG, demiſſa ex angulo recto in hypothenuſam AC, cadet in hoc ipſum punctum G. Cum enim $BC : AB = BG : AG = GC : BG$; at $BC = 2 AB$, erit etiam $BG = 2 AG$ & $GC = 2 BG$; ac proin ſegmentum $GC = 4$ ſegm. AG: unde $AG = \frac{1}{5}$ totius AC: quare ambo circuli & perpendicularis BG hypothenuſam AC, in eodem puncto G, interſecant.

Quod ſi luberet, puncta quæſita G & H, abſque inventione Locorum integrorum aliter determinare, poſſemus, facilioris operationis ergo, loco duarum ſupra inventarum æquationum indeterminatarum litteralium ſubſtituere ipſarum æquivalentes numerales, videlicet iſtas, $yy - 360y = -xx - 80x - 2000$, & $yy - \frac{9800}{13}y = -xx - \frac{170000}{13}$ juxta quarum priorem invenitur $y = 180 - \sqrt{(-xx - 80x + 30400)}$, juxta poſteriorem vero $y = \frac{4900}{13} - \sqrt{(-xx + 21800000 : 169)}$; atque tunc inter diverſos iſtos valores quantitatis y, pro determinanda x, denuo æquationem inſtituere, quæ duas admittet radices, unam affirmativam $+ 40$, numerandam ex B in T, alteram negativam $-176\frac{72}{853}$ capiendam in AB protracta, ex B in V: unde ſimul innoteſcet geminus valor ipſius y, nempe $TG = 20$ & $VH = 63\frac{761}{853}$. *Quod erat inveniendum.*

M.XXVII

III.

PROBLEMA ASTRONOMICUM.

PRæcedenti Problemati subjunctum fuit in eadem scheda sequens Astronomicum, cujus proinde solutionem & hic adnectam, sed omisso, ne prolixior fiam, calculo, quem jam alibi * publici juris feci:

Yemant peylende de Son te 6 uuren na de middagh 12 graden boven den Horizon, en een uur en 12 min. na de se tijdt onder te gaan. Vrage op vvat Aardrijks breete dito peyling geschiedt is.

Id est:

Observatur alicubi hora sexta pomeridiana Solis altitudo supra Horizontem 12 graduum, elapsis autem post momentum observationis hora una & 12 minutis occidit Sol. Quæritur, sub qua latitudine [adde, *& quo anni tempore*] *instituta fuerit observatio?*

Esto (*Fig.* 7.) Arcus Horizontis CE, Æquatoris CD, Paralleli AE: Locus Solis hora sexta A, ejusdem punctum occasus E, altitudo Solis supra Horizontem hora sexta AB, ejus Declinatio AC vel ED, Tempus elapsum a momento observationis ad occasum Solis, respondens arcui Æquatoris CD, 1h. 12.

Positis jam Sinu toto - - - - - - $a =$ partium. 10000.
Sinu altitudinis Solis AB, 12. grad. $b =$ - - - 2079.
Sinu temporis elapsi (horæ scilicet unius, cum 12. min.) in gradus Æquatoris 18 conversi - - $c =$ - - - 3090.
Sinu quæsitæ declinationis Solis AC vel ED - - - - x.

Reperitur Æquatio $x^4 = aaxx + bbxx - aabbxx : cc - aabb$: cujus radices $x = \sqrt{((aa+bb) : 2 - aabb : 2cc \pm \sqrt{((a^4 - 2aabb + b^4) : 4 - (a^4bb - aab^4) : 2cc + a^4b^4 : 4c^4)})}$

Quarum valor in numeros resolutus dabit, $x = 7106$ fere & 2926 fere. Illius arcus in canone invenitur 45 gr. 17 min. hujus

* *Dissert.* De Gravitate Ætheris. *pag.* 160. *seq.*

hujus 17. gr. 1 min. pro quæsita Solis declinatione; e qua re- N.XXVII
perta, nec non & data Solis altitudine in Triang. A B C, vulgari Trigonometria innotescit angulus elevationis poli A C B, qui vicissim reperitur vel 17 gr. 1 min. vel 45 gr. 17 min. adeo ut ad satisfaciendum Problemati, gemino modo responderi posset, nimirum observationem institutam esse, vel sub latitudine 45 gr. 17 min. Sole declinationem obtinente 17 gr. 1 min. vel etiam sub latitudine 17 gr. 1. min. Solis declinatione vicissim existente 45 gr. 17 min. si modo possibile esset, ut unquam tanta existeret.

COROLLARIA.

I. *Ex Logica.* Sex sunt Universalia, seu Prædicabilia: Genus, Species, Differentia, Proprium, *Commune*, & Accidens.

II. *Ex Physica.* Si gyratio Terræ Gravitatis causa sit, difficile dictu est, cur lapsus gravium non fiat in plano Æquatori parallelo? (*a*).

III. *Ex Meteorologia.* Pro captanda altitudine nubium novam inveni methodum ex observato momento disparitionis coloris rubicundi, qui nonnunquam post occasum Solis aliquandiu in nubibus conspici solet. (*b*).

IV. *Ex Geometria Incommensurab.* Unum idemque *Binomium* potest esse vel primum, vel secundum, vel tertium; item quartum, quintum, vel sextum, non obstantibus *Propp.* 55. 56. 57. *Lib.* X. EUCL. Idem intellige de *Apotomis*.

V. *Ex Stereometria.* Pro dimetiendis Conis & Pyramidibus decurtatis, saltem iis, quæ bases habent parallelas & similes, hanc Analysis Regulam simplicissimam suppeditat: *Summam basium mediique proportionalis inter illas duc in tertiam partem altitudinis;*

(*a*) Videatur Numerus XIX. (*b*) Videatur Num. XXX.

N.XXVII productum manifestabit quæsitum (*c*).

VI. *Ex Mechanica.* Perpetuum illud Mobile, Parisiis non ita pridem publicatum, inque *Nov. Reip. Litt. Art.* 7. *Mens. Sept. An.* 1685. descriptum, quod consistit in specie quadam Follis 40 dig. alti, & mercurio repleti, Perpetuum stabile est. Neque enim in clauso ejusmodi Folle, etiam 100 digitorum possidente altitudinem, mercurius adhuc descensurus foret (*d*).

VII. *Ex Dioptrica.* Quæritur ratio, cur per vitrum plano planum ad axem visionis valde oblique positum objecta dextra appareant sinistra & vicissim? (*e*).

VIII. *Ex Perspectiva.* Frontales, Fugientes & Perpendiculares in eadem sectione existentes neutiquam æque fortiter tingendæ sunt, contra Regulam Dn. DES-ARGUES, & Praxin Dn. DE LA BOSSE, in eorum *Perspectiva*, Tom. I. pag. 296.

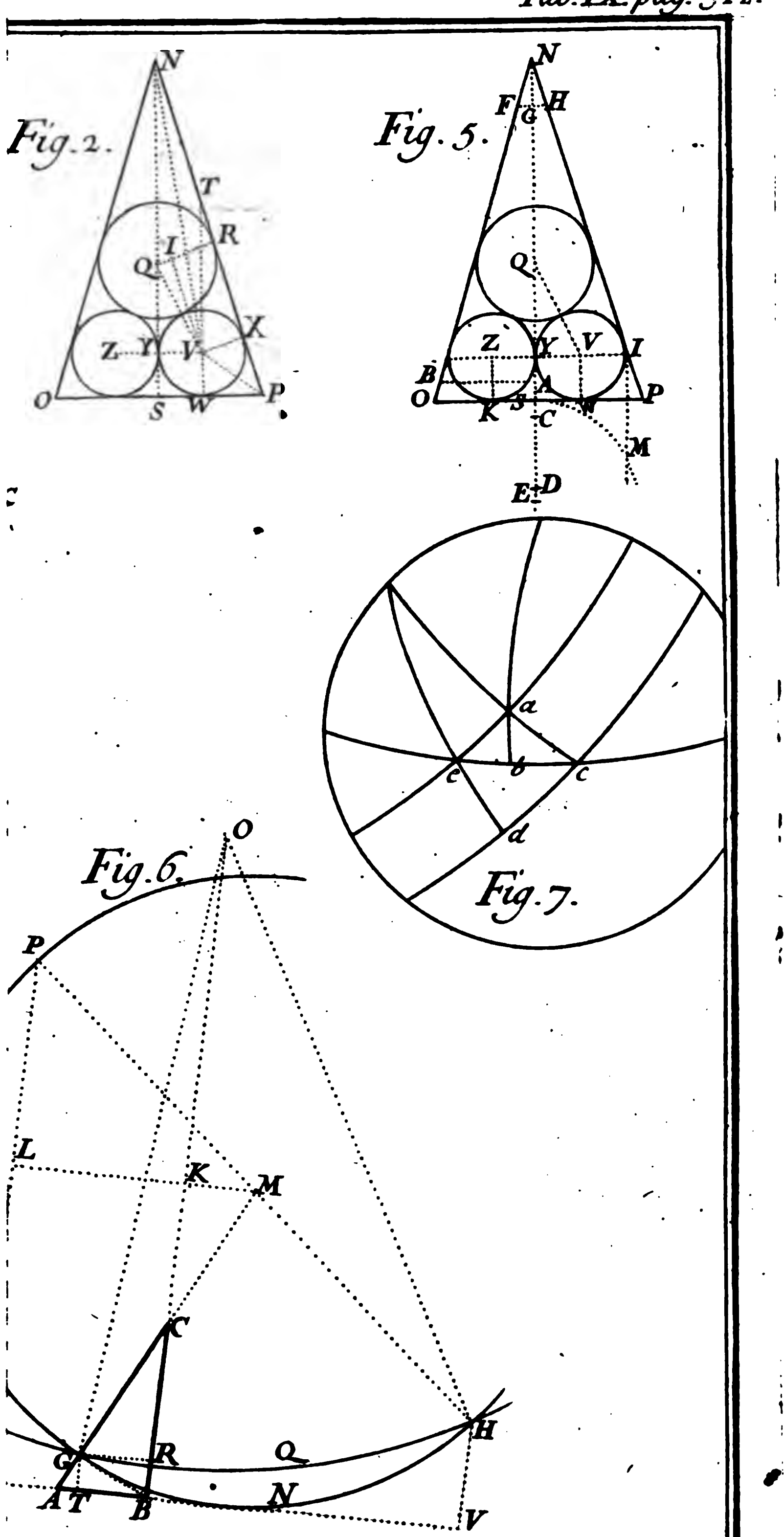
IX. *Ex Gnomonica.* Divisio in partes æquales Instrumenti illius nocturni, quod descripsit MUNSTERUS, & ex illo Cl. STURMIUS *parte* 3, *Gnom. Welp. cap.* XI. æque vitiosa est, atque foret delineatio horologii æquinoctialis in plano verticali.

X. *Ex Ballistica.* Globi tormentorum bellicorum longissime progrediuntur ex elevatione 45 gr. explosi, siquidem ab aeris resistentia abstrahatur; hac enim posita, explosio maxima sub angulo tantillo minore contingere debet. Interim reperio, si vis gravitatis plusquam vicies semel superet vim resistentiæ aeris, globum ex 45 gr. emissum adhuc paulo longius ferri, quam ex 44. gr. Cæterum superflua est Practicorum opera in examinandis ad singulos elevatio-

(*c*) Sit b diameter vel latus basis majoris; c, diameter vel latus basis minoris; a, altitudo, seu distantia basium: x, altitudo coni (vel pyramidis) integri. Erit $b : c = x : x - a$, Ergo $cx = bx - ab$, aut $x = ab : (b - c)$, & $x - a = ac : (b - c)$. Conus integer $= \frac{1}{3} bb . ab : (b - c)$. Conus resectus $= \frac{1}{3} cc . ac : (b - c)$. Conus decurtatus $\frac{1}{3} a (b^3 - c^3) : (b - c) = \frac{1}{3} a (bb + bc + cc) =$ tertiæ parti altitudinis ductæ in summam basium & medii proportionalis inter illas.

(*d*) Videantur N°. XXV. XXVI. XXVIII. XXXII. XXXIII.

(*e*) Credibile est Autorem falsa quadam specie deceptum, objecta reflexa pro refractis habuisse: neque enim idem experimentum tentantibus successit.


Fig. 2.
N
T
R
I
Q
Z
Y
V
X
O
S
W
P
Fig. 5.
N
F
G
H
Q
Z
Y
V
I
B
A
O
K
S
C
P
M
E
D
a
b
c
e
d
Fig. 7.
Fig. 6.
O
P
L
K
M
C
G
R
Q
H
A
T
B
N
V

elevationis gradus explosionibus, quandoquidem, ex observata unica, reliquæ omnes calculo subduci possunt (*f*). N.XXVII

XI. *Ex Arte conjecturandi*. In Urnis sortium [Gallis *Lotteries*, nobis *Glückstopff oder Glückhäfen*] quamdiu albæ tantum schedæ exeunt, nostris nominibus in capsa restitantibus, expectationes crescunt in progressione Harmonica: sed in Urna nupera, in qua 16000 schedulæ, augmentum istud tam erat exile, ut 348 schedæ albæ absque interruptione extrahendæ fuissent, antequam valor expectationis in quamlibet schedam crevisset unico sextante, & 333 aliæ, antequam duobus, iterumque aliæ 319 priusquam crevisset tribus; adeo ut in universum 1000 schedæ albæ continua serie exire debuissent, priusquam suam quis in capsa adhuc latitantem schedam, quæ initio valebat 7 assibus cum semisse, alteri 8 assibus vendere potuisset.

XII. *Ex Arithmetica figurata*. Numerus diei mensis Januarii, quo huic disputationi conscribendæ ultimam imposui manum, est Radix *Pentakismyriohexakischiliotetracosiohexacontapentagonalis* ex 1580972. Quæritur dies? (*g*)

(*f*) De hoc argumento videantur quæ commentati sunt HUGENIUS, *Discours de la cause de la pesanteur*, sub finem; NEWTONUS *Princip. Phil. Nat. Math.* Lib. II. Sect. 1. & 2. VARIGNONIUS Comment. Acad. Reg. Scient. An. 1708, & 1709. HERMANUS *Phoronom.* Sect. IV. imprimis JOH. BERNOULLI *Acta Erud.* 1719. *Mai.* & 1721. *Mai.* & EULERUS *Mechan.* Tom. I, Cap. 6.

(*g*) Resp. 8. Problema est, Datur 1580972, Numerus Polygonus, angulorum 56465. Quæritur latus? Solutionem hujus Problematis dat WOLFIUS Element. Analys. finit. §. 213.

FINIS.

No. XXVIII.

N°. XXVIII.

JACOBI BERNOULLI
Mathematatum Professoris Basileensis,
GEMINA APPENDIX
AD EXAMEN PERPETUI MOBILIS,
insertum mense Decembri Actorum Anno 1686.

Acta Erud. Lips. 1686. Jun. p. 314.

PRIOREM *harum Appendicum a Clarissimo Autore submissam, ineunte Januario Anni* 1687 *accepimus: quo ipso & D*ecember Novellarum Batavarum *ad nos perlatus, machinæ a* D. PAPINO & PUJOLA *impugnatæ defensionem, ab Auctore suo susceptam, nobis exhibuit. Non ingratam ergo* Appendicis *Autori fore putavimus publicationis eo usque moram, dum ipse de novo hoc responso quantocius certior redderetur, una fortassis opera iterato Machinæ defensæ examine defuncturus. Sed dum schedæ Batavæ* Lipsia Basileam *perferuntur, ejusque litteræ, segnius a latere curatæ, ad nos remeant, unus & alter mensis lapsus est: ut priori* Appendici, *Auctoris voto Mense Aprili publicandæ, altera superveniret, junctim nunc cum illa publicanda. Cæterum quæ in* Novellis Batavis *Mensibus* Maio, Junio, Septembri & Decembri A. 1686. pag. 577. 671. 1004. 1378. *in utramque partem de perpetuo hoc mobili disceptata sunt, vel ideo huc transferre neglex-imus, quod ea in compendio referant* Appendices Bernoullianæ. *Sic autem illa.*

I. Mi-

I.

Num. XXVIII.

Mirabitur procul dubio Lector, quod postquam materiæ in diversis *Eruditorum Actis* ad ventilandum propositæ satis diu inter Doctos agitatæ fuerunt; Ego de novo & postliminio quasi earum examen aggredi soleam, prout jam aliquoties usu mihi venit. Sed mirari desinet, cum perceperit, *Acta* isthæc sero admodum, nempe *Novellas Reipublicæ litterariæ*, *Actaque Lipsiensia* bis duntaxat in anno, *Parisiensia* elapso demum anno, *Londinensia* nunquam ad manus nostras pervenire; iterumque aliquot præterlabi menses, priusquam Actorum Collectores schedarum mearum fiant participes. Transmiseram illis, instantibus ultimis nundinis Francofurtensibus, *Examen* alicujus *Perpetui Mobilis* in *Novellis* publicati, iisdemque demum finitis perlati ad nos Menses *Novellarum Aprilis*, *Majus*, *Junius*, e quibus a D. PAPINO & D. PUJOLAS in examine istius Machinæ præventum me esse cognovi. Sed quoniam diversam ab illis in hoc negotio viam inivi; nolo campum hunc prius deserere, quam quæ præterea, tum circa utriusque responsionem, tum circa instantias Autoris Machinæ, notanda mihi occurrerunt, publico impertivero.

Omnes tres in eo convenimus, quod in istiusmodi folle, qualem proponit Autor, nulla sequi possit alarum expansio, vel mercurii descensus. Ad hoc ostendendum, illi quidem tum pondus mercurii inclusi, tum partem pressionis atmosphæricæ, quæ mediante tubo mercurium inclusum afficit, junctim contemplantur: Ego, seposita hujus accessione, follem ut undique clausum consideravi, ostendique, solius inclusi mercurii pondere alas follis dilatari non posse: quo ipso satis refelli puto Autoris opinionem, saltem illam, qua persuasum habet, per hydrargyri descensum in summitate follis vacuum genitum iri: ut maxime enim pressio illa accessoria 5 digitorum mercurialium, juncta ponderi inclusi hydrargyri, tanta supponeretur, quæ dilatando folli sufficeret; ista tamen tunc dilatatio produceretur, non per subitaneum hydrargyri lapsum, sed per ejus detrusionem, succedente continuo per tubum alio mercurio, qui vacuum fieri impediret.

Num. XXVIII. Sed hoc obiter; neque enim vacuum ad experimenti successum necessarium esse existimo. Responsio interim PAPINI huc redit: Pressionem, quam atmosphæra exercet intra follem, a longitudine intervenientis tubi plus diminui, quam augeri eadem possit a pondere mercurii inclusi. Si quæras, qui hoc fieri queat, cum diminuatur 22 tantum, augeatur vero 40 digitis mercurialibus; adjicit ille, asserti sui veritatem facili subduci posse calculo: qua sua responsione ansam mihi præbet suspicandi, quod existimet inclusum mercurium in follem agere pro ratione solius suæ molis, sive ponderis: cum evidens admodum sit, si solam spectes molem, pyramidem 40 digitos altam minorem esse prismate in eadem quidem basi, sed altitudine 22 digitorum constituto: meus namque veriorque calculus, qui alas follis pro gemino vecte habet, viresque inclusi mercurii in premendis alis æstimat ex rationibus ponderum simul & distantiarum, tametsi satis planus sit & facilis, non tamen usque adeo obvius est, quin meruisset apponi a PAPINO, si huc digitum intendisset. Cum itaque non apposuerit, omnino conjicio, in hac illum esse sententia, quod in folle undique clauso, non nisi triplo major, quam 27 digitorum altitudo requiratur, ad constituendum æquilibrium inter mercurium & externum aerem; cum ex calculo meo nupero † patescat, quadruplo majorem in illo altitudinem deposci. Id eum in finem moneo, ut constet, quod si parva illa 5 digitorum accessio, qua vires inclusi ponderis augentur, juxta PAPINI calculum, dilatando folli 40 digitos tantum alto non sufficiat, multo minus illa, in mea hypothesi, effectui huic producendo suffectura sit. Ex dictis autem porro liquet, mirum non esse, quod responsio D. PAPINI minus satisfecerit Auctori Machinæ; qui duo regessit; quorum alterum [nam in priori quod mutationem quarundam partium machinæ concernit, fateor me ejus mentem non assequi] huc redit, quod follis utique non dilataretur, si mercurius in illum ageret pro ratione molis suæ, more corporum solidorum, non vero pro ratione altitudinis, ut solent liquida; centies namque se expertum esse ait, si follis

† Supra Nº. XXVI. pag. 288.

follis superne apertus intra liquidum aliquod aliquousque demergatur, accidere, ut liquor internus, vel ad eandem cum externo se componat altitudinem, siquidem homogeneus illi sit, vel ut altius humiliusve consistat, si eodem vel levior, vel gravior fuerit. Unde colligere vult, quoniam 27 digiti mercuriales æquiponderent altitudini atmosphæricæ, follem mercurio repletum, dictamque excedentem altitudinem, in aere perinde dilatatum iri, atque dilataretur si stagnanti alicubi mercurio immergeretur ad 27 digitorum profunditatem. Ad instantiam hanc diluendam, sciendum, longe aliam esse rationem follis aeri expositi, quam follis in hydrargyrum demersi, prout ex mea expli-tione evidentissime liquere potest. Si follis aeri exponatur, omnia alarum puncta premuntur a filamentis atmosphæricis ejusdem altitudinis, quorum singula æquiponderant 27 pollicibus mercurii; sin demergatur in hydrargyrum, puncta, quo propiora basi follis, eo minori extrinsecus pondere afficiuntur, filamentis mercurialibus sensim decrescentibus versus superficiem stagnantis hydrargyri, ubi tandem plane evanescunt: adeoque follis homogeneo liquore adimpletus necessario eousque, sive dilatabitur, sive constringetur, donec liquor intra extraque illum in eadem planitie horizontali constiterit; ut pote quo casu, singulis ejus punctis intra extraque follem ejusdem respective altitudinis & ponderis filamenta incumbunt. Hæc hactenus. Num. XXVIII.

Quantum ad D. Pujolas refutationem; sic ille ad evertendam hanc Machinam ratiocinatur: Argentum, inquit, in folle 40 digitos alto, non potest delabi ad 27 digitorum altitudinem, quin eo usque dilatetur follis, ut in ejus summitate plus relinquatur vacui spatii, quam antea occupatum fuerat a tredecim mercurii digitis, qui descenderunt. Vacuum istud impleri denuo, nec per mercurium tubi, nec per materiam subtilem potest; quoniam neutrum horum fluidorum aliis viribus in follem impelli posset, quam iisdem, quibus follis expanderetur: quæ vires non æstimandæ forent ex omnibus 40 digitis inclusi mercurii, ut pote quorum 27 ob atmosphæræ æquilibrium irriti redderentur, sed a reliquis duntaxat tredecim: hæ vires autem non possent adigere

 in

Num. XXVIII. in summitatem follis, nisi 13 alios mercurii digitos, qui non sufficerent ad implendum vacuum. Ergo &c. Verum enim vero, præter quam quod nulla in hoc ratiocinio evidentia est mathematica, multa quoque occurrunt, quæ vix admitti possunt.

Primo, cum dicitur, delapso ad 27 digitos mercurio, vacuitatem nasci majorem spatio a 13 delapsis digitis antea occupato; id perpetuo & absolute verum non est: posset enim nunc major, nunc minor esse dicto spatio, pro diversa ratione amplitudinis basis ad altitudinem follis.

Secundo, non necessum esset ut mercurius per tubum impelleretur in follem iisdem illis viribus, quibus dilatatur follis; numquid impelli posset pondere columnæ atmosphæricæ tubi vasculo incumbentis? Videtur hic Autor revocare velle circulum *Cartesianum*; constat autem, phænomena hydrostatica longe melius & felicius explicari per Pascalii columnas, quam per circulum Cartesii.

Tertio, si res foret explicanda per circulum, dicendo mercurium impelli per tubum in follem a pauculo aere folli circunfuso, qui per follis dilatationem loco pulsus fuit; tum sequitur pariter, in syphone cujus crus longius exæquat 40 digitos, argentum ex breviori pelli in longius, vi pauxilli aeris, qui per effluxum argenti e longiori exundavit; adeoque ascensum mercurii per crus brevius, tempore correspondere debere cum descensu ejus per longius; quod experientiæ refragatur, cum lapsus ejus per longius sit momentaneus, ascensus per brevius lentior & successivus.

Quarto, non tantum 27 digitis mercurii inclusi, sed tota ejus altitudo, etiamsi 100 exæquaret digitos, irrita redderetur a contrapondio atmosphæræ, ut ex nostra explicatione liquet.

Quinto, nulla evidens ratio est, cur tredecim digiti mercurii non possint impellere in follem tantum argenti, quantum sufficit ad replendum totum vacuum; tametsi enim amplitudo hujus vacui major sit spatio, quod occuparant tredecim delapsi digiti, ejus tamen altitudo 13 digitis necessario minor esse debet. Constat vero, vires liquidorum æstimandas esse ex sola altitudine, nulla habita ratione molis; prout parva liquoris alicujus quantitas angustiori

gustiori siphonis cruri infusa, ad eandem attollit altitudinem multo majorem ejus molem in ampliori crure contentam. Atque hæc de insufficientia responsionis D. PUJOLAS. Num. XXVIII.

Idem refutavit objectionem ab Autore Machinæ sibi motam. Quoniam vero rationes ejus in *Novellis* non recensentur; superest, ut & hanc instantiam ex hypothesi mea diluam. Memorat Autor experimentum se cepisse cum folle 10 digitorum, cujus basi adaptatus erat tubus 30 digitorum mercurio repletus & superne sigillatus; follem enim sibi relictum expansum fuisse, descendente mercurio tubi ad consuetam altitudinem 27 digitorum.

Sed quotusquisque est qui in nostra explicatione non videat rationem disparitatis inter utrumque follem? In folle 40 digitorum, universa mercurii moles externi aeris pressioni, mediantibus alis compressibilibus, exposita est; in folle vero breviori, soli infimi 10 digiti ab aere laterali afficiuntur, totaque mercurii portio inclusa tubo, ob firmitudinem laterum ejus, a laterali aeris pressione immunis præstatur: unde cum solius longitudo tubi 27 digitos exsuperet, mirum non est, subsidere in illo mercurium. Num vero præcise ad 27 digitorum altitudinem descensurus sit, subdubito; calculo diversitatem nonnullam exhibente.

Esto follis ABC, (*Fig.* 1.) cui adaptetur tubus DE. Ex hydrostaticis principiis notum est, a pauxillo liquore tubi DE, licet angustissimi, tantundem premi subjectam basin latissimam AC, quantum premeretur a multo majore ejus copia in tubo AG, ejusdem quidem altitudinis cum DE, sed amplitudinis longe majoris, nempe basi AC adæquatæ, contenta. Loco igitur tubi DE substituatur alius AG, repletus itidem mercurio, qui fingatur descendisse in I, ibique æquilibrium constituere cum externo aere L, qui alas AB, BC comprimit. Sunto autem in folle pyramidali ABC, altitudo BD $= a =$ 10 digitis, BA vel etiam DA $= b$, circumferentia basis $= c$, altitudo mercurialis 27 digitorum æquivalens altitudini atmosphæricæ L $= d$, altitudo quæsita DI $= x$. Deprehenduntur momenta infinitarum superficierum prismaticarum (circa communem axem IB constitutarum & exhaurientium soliditatem follis ABC, tubique AM) constituere ge-

 minam

Num. XXVIII.

minam feriem fecundanorum, diminutam ferie tertianorum, cujus ultimus terminus $bcx + abc - abc$; adeoque fumma momentorum $\frac{1}{3}bbcx + \frac{1}{3}abbc - \frac{1}{4}abbc = \frac{1}{3}bbcx + \frac{1}{12}abbc$ (a). Momenta filamentorum atmofphæricorum L, alas AB, BC comprimentium conftituunt feriem fecundanorum, cujus ultimus terminus bcd, adeoque fumma momentorum $\frac{1}{3}bbcd$ (b). Unde $\frac{1}{3}bbcd = \frac{1}{3}bbcx + \frac{1}{12}abbc$ & $x = d - \frac{1}{4}a = 27 - 2\frac{1}{2} = 24\frac{1}{2}$ digitis. Patet ergo, altitudinem argenti poft defcenfum fore $34\frac{1}{2}$ digitorum, fi follis altitudinem una comprehendas; fin minus, tantum $24\frac{1}{2}$ digitorum; illo nempe refpectu majorem, hoc minorem 27 digitis.

Non nego tamen, altius in tubo fuftentari poffe, imo debere, fi & ratio habeatur aeris externi, bafi follis incumbentis, alarumque divaricationem tanto fortius prohibentis; cujus quidem nos confiderationem hic neglleximus.

II.

JUbes, ut examini fubjiciam iteratam Refponfionem, quam Auctor Perpetui Mobilis, fub finem fuperioris anni, animadverfioni

(*a*) Etenim fi diftantiæ ab hypomochlio conftituant feriem arithmetice progreffionalium, 0, 1, 2, 3, &c. ufque ad $b = $ BA; bafes fuperficierum prifmaticarum mercurialium conftituent pariter feriem primanorum 0, $(1c:b)$ $(2c:b)$ $(3c:b)$ &c. ufque ad $bc : b = {}^{c}\phi$; altitudines vero earundem feriem æqualium minutam ferie primanorum, 0, $(x+a-0)$ $(x+a-1a:b)$ $(x+a-2a:b)$ $(x+a-3a:b)$ &c. ufque ad $(x+a-ba:b = x$. Quare momenta efficiunt [0, $(1.1.cx:b+1.1.ca:b - 1.1.1.ca:bb)$ $(2.2.cx:b+2.2.ca:b - 2.2.2.ca:b^2)$ &c. ufque ad $bcx+bca-bca$] feriem geminam fecundanorum minutam ferie tertianorum: cujus proinde fumma $= \frac{1}{3}bbcx + \frac{1}{3}bbca - \frac{1}{4}bbca = \frac{1}{3}bbcx + \frac{1}{12}bbca$.

(*b*) At vero momenta filamentorum atmofphæricorum habentur, fi priores duæ feries primanorum per feriem æqualium d, d, &c. multiplicentur; unde nafcitur feries [0, $(1.1.cd:b)$ $(2.2.cd:b)$ $(3.3.cd:b)$ &c. ufque ad bcd] fecundanorum, cujus fumma eft $\frac{1}{3}bbcd$.

versioni D. PAPINI opposuit, cujusque me nuperrime participem fecisti, transmissis *Novellarum Batavarum* ex mense *Decembri* foliis nonnullis. Id nunc, expedito quod nosti negotio, eo lubentius in me suscipio, quod ex discussione Responsionis hujus maximopere illustrari & confirmari videam illam meam hypothesin, quæ defectum Machinæ e vectis ratione deduxit. Num. XXVIII.

Duabus Responsio memorata partibus absolvitur: in priore Auctor, inversione totius Machinæ; in altera partium quarundam immutatione, pristino retento situ, objectioni satisfacere studuit. Quantum ad inversionem Machinæ, quo jam in sua prima Responsione digitum obscure intenderat Auctor, huc ejus conjicio redire mentem. Existimat perinde esse, quantum ad inclusi mercurii vires, quo situ erigatur Machina; itaque si externi aeris pressiones debiliores forte judicentur, invertendam duntaxat esse pyramidem, applicandumque tubum sursum spectanti vertici; inversum namque follem, a prævalente aere, non aliter atque in altero situ, compressum iri, extruso per tubum mercurio in vasculum; compresso folle, præponderaturum ejus verticem, atque ad situm horizontalem se demissurum; postmodum refluxurum esse e vasculo mercurium, follemque de novo dilatatum iri [quandoquidem tubi vasculum, 22 tantum digitis a vertice follis distans, altius consistat axe motus, qui, prope centrum gravitatis machinæ constitutus, 30 circiter ab eodem vertice digitis abest;] denique folle sic dilatato, erecturum se verticem, præponderante scilicet jam iterum basi; atque ita Machinam, recuperato pristino situ, alternas rotationis vices perpetuo continuaturam. Sic Auctor. At Ego, revocato ad examen ratiocinio isto, deprehendo eandem causam, quæ follis dilatationem nuper prohibuit, cum basis sursum spectabat, contraria nunc ratione, base deorsum versa, ejusdem compressionem impedire; adeo invida natura Protei ad instar contrarias induere solet formas, velut omni studio conatus nostros in tam nobili indagine delusura.

Cujus quidem diversitatis rationem nescio an dare poterit Cl. PAPINUS, qui solam hydrargyri molem spectare solet, cum hæc, in utroque follis situ, una eademque maneat. In nostra certe hypo-

Num. XXVIII. hypothesi, discriminis causa evidens admodum est, quandoquidem, in priori follis situ, longiora filamenta mercurialia, quæ præcipuum machinæ momentum conferre deberent, inutilia & inertia existunt, incumbentia quippe solum ipsi follis vertici, seu vectium hypomochlio, partibusque illi vicinissimis; cum eadem, in situ altero, premendo partes a vertice remotissimas, insigne valde in divaricandis alis robur acquirant. Hinc enim fit, ut eadem mercurii inclusi quantitas, quæ uno in situ sustinendæ pressioni atmosphæricæ neutiquam par fuit, in altero ei multum prævaleat, follique dilatando abunde sufficiat. Ne vero quod dixi de insignibus viribus, quas mercurius in alas inversi follis exerat, scrupulum movere possit apud ignaros hydrostaticæ Scientiæ, qui sibi forte persuadent alas istas ab intercepto mercurio omnino non affici, utpote cujus filamentis nullatenus subjacent; observandum perinde se hic rem habere, atque cum situla aqua repleta, qualis repræsentatur *Figura* 2. ubi filamenta aquea *ab*, *ab* &c. nativo gravitatis impetu directe quidem fundum feriunt, sed ab ejus rigiditate repercussa quasi, ad latera situlæ deflectunt, eaque in singulis punctis non minore afficiunt pressione, quam qua afficerent, si directe singulis incumberent: quod vel exinde colligitur, quia insertis hinc inde perforato utrique lateri tubis *cd*, *cd*, aqua in singulis sursum impellitur ad altitudinem æqualem ei, quam intra cavitatem situlæ obtinet. Ad eundem scilicet modum in Folle perpendiculariter erecto, cujus basis ima respicit, singula alarum puncta *g*, *g* &c. (*Fig.* 3.) intelligenda sunt premi extrorsum a totidem filamentis mercurialibus *mn*, *mn* &c. inde ad verticem follis *n* protensis: nec alia utrobique differentia est, quam quod basis follis non sit rigida materia instar fundi situlæ, sed corium plicatile; e quo tamen aliud videtur nihil sequi, quam corium istud primo detrudendum esse ab incumbente pondere mercurii, donec expanso per detrusionem, quantum fieri potuit, & rigescente jam corio, conatus prementis hydrargyri in utramque deinceps, uti dictum, follis alam redundet; prout nullum dubium est, quin, si loco rigidi fundi situlæ substituatur flexilis quædam materia, nihilominus aqua in tubis *cd*, *cd* &c. ad

eandem,

eandem, cum inclusa, altitudinem assurrectura sit, postquam flexile fundum, quousque potuit, ab illa detrusum & extensum fuerit.

Ut jam, consueto nostro calculo, determinemus accuratam pressionis quantitatem, qua utraque pyramidalis follis ala, tam intus a mercurialibus, quam extus ab aeris urgetur filamentis; notetur momenta harum pressionū componi ex tribus rationibus; ex ratione videlicet altitudinum filamentorum, latitudinum alarum follis, & distantiarum denique a vertice ejus, seu hypomochlio. Altitudines filamentorum mercurialium mn, mn &c. [*Fig.* 3.] incipiendo a vertice n, constituunt seriem primanorum, cujus ultimus terminus est altitudo $np = 40$ digitis $= a$; atmosphæricorum autem gh, gh &c. altitudines, seriem æqualium, quarum singulæ æquivalent 27 digitis mercurii $= b$; latitudines alarum, ut & distantiæ ab hypomochlio, conficiunt duas itidem series primanorum, quarum ultimi termini sunt maxima alæ latitudo ad basin, quæ sit c, & ejusdem longitudo on, vel potius recta op, directioni filamentorum hg, hg &c. perpendicularis, quæ vocetur d. Erit itaque summa momentorum omnium totius mercurii $\frac{1}{4}acdd$, quæ se habet ad summam momentorum atmosphæræ $\frac{1}{3}bcdd$, ut $3a$ ad $4b$, id est, substituto valore ipsarum a & b, ut 120 ad 108, seu 10 ad 9 (c). Fortior igitur pressio est ab intra profecta a mercurio, pressione ab extra, quam producit

(c) Posito, quod distantiæ ab hypomochlio constituant seriem primanorum, 0, 1, 2, 3, &c. usque ad d; quod altitudines efficiant pariter seriem primanorum, 0, $(1a:d)$ $(2a:d)(3a:d)$ &c. usque ad $da:d = a$; & quod latitudines alarum similiter efficiant seriem primanorum, 0, $(1c:d)(2c:d)(3c:d)$, &c. usque ad $dc:d = c$; Momenta filamentorum mercurialium constituunt seriem tertianorum, 0, $(1.1.1ac:dd)(2.2.2ac:dd)(3.3.3ac:dd)$ &c. usque ad $d.ac$; cujus itaque summa est $\frac{1}{4}ddac$.

Momenta vero filamentorum atmosphæricorum habentur, si loco seriei altitudinum, quæ secunda est, scribatur series æqualium b, b, &c. Hæc igitur momenta constituunt seriem secundanorum 0 $(1.1bc:d)$ $(2.2ba:d)$ $(3.3bc:d)$ &c. usque ad dbc; cujus summa $\frac{1}{3}ddbc$.

Num. XXVIII. aer; quare dilatabitur follis, non constringetur, contra quam existimat ejus inventor. Quod si follis non pyramidalis, sed triangularis fiat [qualem construi posse non est dubium] tunc pressio ab intra ad pressionem ab extra erit, ut $2a$ ad $3b$, hoc est, in folle 40 digitis alto, ut 80 ad 81 (*d*): adeo ut hac tantillo majore existente, comprimi quidem valeat ejusmodi follis ab ambiente aere; id quod obtinendi motus perpetui spem aliquam facere posset, nisi tum nova a longitudine tubi & collocatione vasculi oborir etur difficultas, quæ ex nunc dicendis plenius elucebit. Reperi namque, eodem duce calculo, sequens generale Theorema, observatu valde dignum, ut pote quod omnem hac de re quæstionem statim dirimit: *In quovis folle perpendiculariter erecto, seu triangulari, seu pyramidali, cujuscunque sit altitudinis & quacunque adimpletus liquore, sive basis sursum, deorsumve spectet; pressio liquoris inclusi tanta est, quanta proficisci potest ab uniformi columna ejusdem liquoris, cujus altitudo sit aqualis distantia summitatis a centro gravitatis follis: adeoque si tubus summitati follis applicatus e regione centri gravitatis terminetur, repræsentabit machina siphonem crurum aqualium, intercedente utrinque perfecto partium æquilibrio.* (c)

Hinc

(*d*) At si follis triangularis sit, alæ æqualem ubique latitudinem habent, ideoque series latitudinum, quæ inter præcedentes tertia erat, mutatur in seriem æqualium, 1, 1, 1, &c. Unde fit, ut momenta filamentorum mercurialium constituant seriem secundanorum, o $(1.1a:d)$ $(2.2a:d)$ $(3.3a:d)$ &c. usque ad da, cujus summa $\frac{1}{3}dda$; momenta verò atmosphæricorum filamentorum, constituant seriem primanorum o, $1b$, $2b$, $3b$, &c. usque ad bd, cujus summa $\frac{1}{2}bdd$. Est autem $\frac{1}{3}dda : \frac{1}{2}bdd = 2a : 3b$.

(*c*) Theorema istud non solum valet, quando follis est triangularis, vel pyramidalis, id est, quando alæ sunt parallelogramma vel triangula; sed universaliter, quacumque figura sint præditæ. Nam sit AMLN, vel A*ml*N, follis erectus, vel inversus, liquore plenus usque ad QRT: Sitque S, centrum gravitatis liquoris; C, centrum gravitatis superficiei QRLM, quam premit liquor; A, hypomochlium, per quod ducantur AC, & AS liquoris summitati occur- Tab. I N°. 2

Hinc constat primo, si basis follis sursum respiciat, in triangulari requiri ter 27, id est, 81; in pyramidali quater 27, hoc est, 108 digitorum altitudinem, ad constituendum æquipondium, inter externam atmosphæram & inclusum hydrargyrum: quandoquidem Num: XXVIII.

occurrens in P. Et, si concipiatur liquor divisus per innumera plana horizontalia EFG, *efg*; momentum liquoris in trapeziolum EF*fe* æquale cum sit producto ex pondere columnæ basin EF*fe* [EF. D*d*] altitudinem PI habentis, in distantiam AD ab hypomochlio; erit summa momentorum omnium, sive pressio totius liquoris in superficiem QRLM $= \int(EF.Dd.PI.AD)$ quæ summa ita sumi debet, ut evanescat, quando AI evadit æqualis AP. Nunc, si ponamus superficiei QRLM insistere columnam uniformem ejusdem liquoris, cujus altitudo sit PS; ejus momentum æquale erit producto ex AC [distantia centri gravitatis ab hypomochlio] & [pondere columnæ] PS. QRLM: quod momentum ut supputetur, necesse est invenire magnitudines AC & PS. Per vulgarem methodum investigandi centra gravitatis, AC invenitur, si summa momentorum omnium particularum superficiei QRLM dividatur per ipsam superficiem. Igitur $AC = \frac{\int(EF.Dd.AD)}{QRLM}$.

Et, eadem lege, $PS = \frac{\int(EF.FG.Ii.PI)}{\int(EF.FG.Ii)}$ quæ omnes summæ evanescere debent, cum AI sit æqualis AP.

Ergo pressio columnæ uniformis, altitudinem PS habentis, est $= \frac{\int(EF.Dd.AD)}{QRLM} \frac{\int(EF.FG.Ii.PI)}{\int(EF.FG.Ii)}$ QRLM $= \frac{\int(EF.Dd.AD) \times \int(EF.FG.Ii.PI)}{\int(EF.FG.Ii)}$

Jam vero, I*i* est ad D*d*, ut AK ad AB; & FG [aut DH] ad AD, ut B*b* ad AB: hoc est $Ii = \frac{AK}{AB} Dd$ & $FG = \frac{Bb}{AB} AD$: quibus substitutis, fit $\int(EF.FG.Ii.PI) = \int(EF.\frac{Bb}{AB}AD.\frac{AK}{AB}Dd.PI) = \frac{Bb.AK}{AB.AB} \times \int(EF.AD.Dd.PI)$ & $\int(EF.FG.Ii) = \frac{Bb.AK}{AB.AB} \int(EF.AD.Dd)$

Ergo pressio columnæ uniformis altitudine PS habentis $= \int(EF.Dd.AD) \times \frac{Bb.AK}{AB.AB} \int(EF.AD.Dd.PI) : \frac{Bb.AK}{AB.AB} \int(EF.AD.Dd.) = \int(EF.AD.Dd.PI)$ æqualis pressioni liquoris in folle contenti.

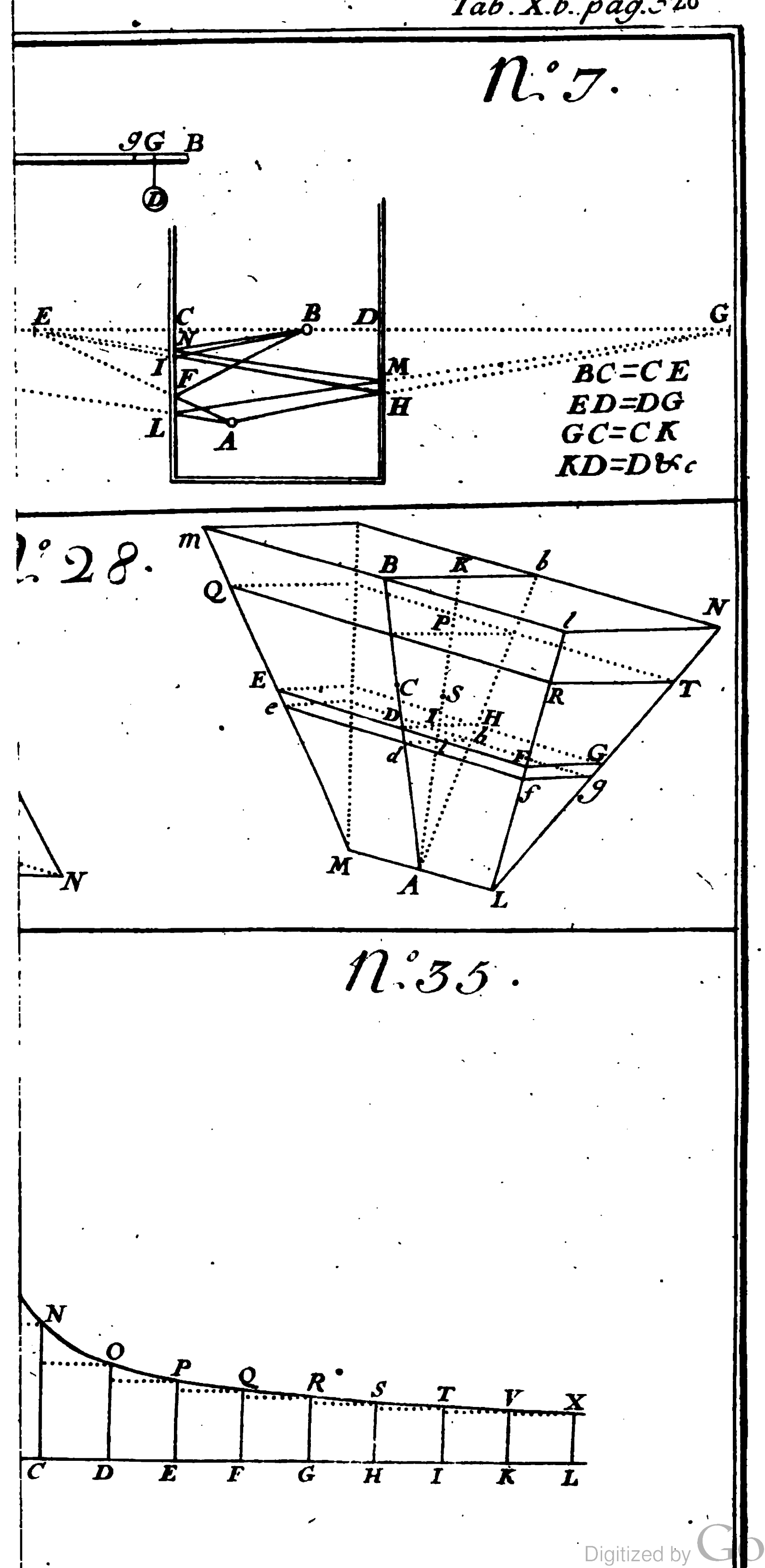
Num. XXVIII. quidem tum centrum gravitatis, ibi tertia, hic quarta ſolum parte altitudinis a ſummitate diſtat: ſin vero baſis deorſum ſpectet, ſufficere in triangulari folle $40\frac{1}{2}$, in pyramidali 36 digitos, quoniam tum centrum gravitatis, ibi duabus tertiis, hic tribus quartis partibus altitudinis, utrobique ſcilicet 27 digitis a ſummitate abeſt; adeoque hoc in ſitu ſufficere illi ſubduplam, huic ſubtriplam ejus, quæ in priori ſitu requirebatur, altitudinem.

Conſtat etiam ſecundo, mercurium follis triangularis 40 digitos alti, cujus baſis ſurſum ſpectat, æquipollere non niſi $13\frac{1}{3}$ digitis; pyramidalis vero paris altitudinis, duntaxat 10 digitis; [non 20, ut putat Cl. PAPINUS:] ſin viciſſim baſis deorſum vergat, illius mercurium æquivalere $26\frac{2}{3}$, hujus 30 digitis.

Conſtat denique tertio, quod ubicunque ſtatuatur tubi vaſculum, Auctor Machinæ neceſſario ſpe ſua fruſtrandus ſit. Nam in folle, cujus baſis ſurſum converſa eſt [*Fig.* 4.] ſi vaſculum *r*, humilius collocetur axe motus, ſive huic vicino centro gravitatis *ſ*; præponderabit ex natura ſiphonis argentum tubi; comprimetur ergo follis, non dilatabitur, ut vellet Auctor: ſin altius conſtituatur, præponderabit equidem argentum in folle, eumque dilatabit; ſed rotata poſtmodum circa axem, & ſitum horizontalem adepta machina, non poterit argentum e folle in vaſculum elevatius retrofluere. Vice verſa in folle cujus baſis ima reſpicit, [*Fig.* 5.] ſi vaſculum ſupra axem ſtatuatur, prævalebit hydrargyrum in folle; quare dilatabitur, non conſtringetur, ut optaret Auctor: ſin infra axem, conſtringetur quidem, ſed facta deinceps rotatione nullus jam mercurii, e loco humili in altiorem, e vaſculo in follem, dabitur refluxus.

Atque ita confido, me non tantum abſolutam impoſſibilitatem conſequendi hac ratione motus alicujus perpetui, ex meo principio Sole clarius oſtendiſſe; ſed & Regulam ſimul univerſalem exhibuiſſe, pro æſtimandis quibuſlibet in Triangulo vel Pyramide compreſſibili contentorum liquorum preſſionibus: id ipſum eſt, quod Auctor Machinæ in fine diſſertationis ſuæ a Doctis indagari deſiderat, quodque contemplationis inſignis & uſus fore non exigui recte conjicit. Hæc de prima reſponſionis parte.

Quod



N.° 7.
g G B
D
E
C
B
D
G
N
I
F
M
H
L
A
BC=CE
ED=DG
GC=CK
KD=D &c
N.° 28.
m
B
K
b
Q
P
l
N
E
C
S
R
T
e
D
T
H
h
d
t
F
G
f
g
M
A
L
N
N.° 35.
N
O
P
Q
R
S
T
V
X
C
D
E
F
G
H
I
K
L

Quod jam ad alteram attinet qua, pristino retento situ, vel prolongatione follis, vel abbreviatione tubi, Machinæ suæ medelam offerre studuit; ei non est cur immoremur: quandoquidem non meum, sed *Papinianum* calculum enervat: quocirca, quid ad correctionem hanc ex suis principiis sibi respondendum sit, ipse viderit PAPINUS. Quod ad me spectat; prolonget, abbreviet Auctor, quantum volet; quid profecturus sit, unico supra allato dilemmate edoceri poterit. Nolo etiam bina Experimenta de Folle in aquam demerso, alioque adaptatum in basi tubum habente, quorum mentionem iteratam in Responsione sua injicit, hic recoquere; postquam disparem, inter hos folles & controversam Machinam, rationem in prima mea *Appendice* liquido ostendi. Num. XXVIII.

Unicum est quod non possum quin occasione dictæ Appendicis memorem; me videlicet parumper justo æquius in illa de PAPINI calculo sensisse: conjecturabam enim illum, seposita vectis consideratione, Mercurii pressionem in folle juxta molem æstimasse, adeoque subtriplam ejus, quæ a columna uniformi & æque alta proficiscitur. Video autem, ab ipso statui omnino subduplam: cum tamen ignorare non debuerit, pyramidem subtriplam esse, non subduplam æque alti prismatis ejusdem basis.

Videantur Numeri XXXII & XXXIII.

Nº. XXIX.

SOLUTIO ALGEBRAICA PROBLEMATIS

de Quadrisectione Trianguli Scaleni, per duas Normales rectas.

Autore JAC. BERNOULLI *Math. Profess. in Academia Basileensi.*

Acta Erud. Lipſ. 1687. Novemb. pag. 617.

PRoblema hocce, quod ſummum hujus ævi Mathematicum non ita pridem occupatum tenuit, tam parum ex voto eidem ſucceſſiſſe audio, ut ultra quadrageſimam poteſtatem, ſi bene memini, & credere fas eſt, aſſurrexerit. At, cum intra octo dimenſiones illud coerceri poſſe deprehendam, operæ pretium eſſe duxi, ut tanti diſcriminis pateret ratio, viam, quam in ejus analyſi ingreſſus ſum, publico exponere. Quam in rem ſequentia præmitto Lemmata:

LEMMA I. *Utraque linearum quadriſecantium biſecat Triangulum*; quod per ſe clarum.

II. *Neutra quadriſecantium normalium terminari poteſt in angulo Trianguli Scaleni*: DEM. Si fieri poteſt, cadat una quadriſecantium AD, in angulum A; tum altera terminabitur vel in utroque crure anguli A, vel in alterutro tantum: Terminetur *primo* in utroque crure, ut recta EF. Quoniam igitur Triang. AEL ponitur = Triang. ALF, erit EL = LF; & propter commune latus AL, anguloſque interceptos ALE, ALF rectos, ang. EAL = LAF, ſive BAD = DAC: quare BA: AC =

Fig. 1.

A C = B D : D C; & quia B A > vel < ponitur A C, erit quoque B D > vel < D C, ac Triang. B A D > vel < Triang. D A C; quocirca recta A D non bisecat Triang. B A C; propterea per *Lemma* I. non potest esse quadrisecantium una. Terminetur autem *secundo*, in alterutro crure tantum, ut recta G H, ducanturque rectæ IC, IB; quoniam Trapezium A I H C = Tr. I D H erit Tr. AIC < Tr. CID, & A I < I D: haud secus, quia Tr. A I G = Trapez. I G B D, erit Tr. A I B > Tr. I B D; & A I > I D: igitur A I simul > & < I D. *Q. E. A.* N.XXIX.

III. *Neutra quadrisecantium normalium parallela vel perpendicularis esse potest ulli lateri Trianguli Scaleni*: DEM. Esto, si fieri potest, recta F G, parallela lateri B C; cadetque perpendicularis D E, in alterutrum latus A C vel A B; nec enim angulo A occurrere potest, per præcedens *Lemma*: Occurrat itaque priori in D, & ducatur D F, quæ producta offendat productam E B in I. Quoniam igitur Triang. G H D = Trap. H D A F, erit Tr. G H D > Tr. H D F, & recta G H > H F, & C E > E I, unde C E multo > E B. Cum ergo in Trap. C G H E & H E B F, duo latera G H, C E majora sint duobus lateribus H F, E B, utrumque utroque, & perpendicularis H E communis, erit Trap. C G H E > Trap. H E B F: Igitur non quadrisectum est Triangulum A B C, contra hypothesin. *Fig.* 2.

IV. *Bina recta quadrisecantes Triangulum quodcunque, non terminantur duabus extremitatibus in uno Trianguli latere, & duabus aliis in alio.* DEM. Terminentur, si fieri possit, in latere A B extremitates D & F, ac in latere B C extremitates G & E, junganturque D G, F E. Quoniam Triangula D H F & G H E ponuntur æqualia, habebunt latera circum verticales angulos reciproce proportionalia, F H : H G = H E : H D; & quia F H > H G, [quandoquidem Tr. F H D = quinquangulo A D H G C, ac proinde > Tr. D H G] erit quoque H E > H D; quare & Tr. H E F > Tr. H D F, seu Trap. H E B F, pars toto, *Q. E. A.* *Fig.* 3.

Coroll. Cum igitur Trianguli non nisi tria sint latera, duarum autem quadrisecantium quatuor extremitates, quarum nulla terminari

N. XXIX. minari poteſt in angulo, nec binæ in uno, binæ in alio latere; neceſſe eſt, ut duæ illarum occurrant uni lateri, ſingulæ vero reliquarum ſingulis reliquis lateribus. Illud vero latus, cui duæ occurrunt quadriſecantium extremitates, ex inventa æquatione cognovi, plerumque tantum eſſe medium, nunquam maximum, raro minimum; nempe tum demum, cum Triangulum Scalenum quam proxime ad Iſopleuron accedit. Sequitur nunc ipſa Propoſitionis

ANALYSIS.

Fig.4.5.6. Sit factum, eſtoque Triangulum Scalenum ABC [Fig. 4.5.6.] quadriſectum per rectas DE, FG, ſe mutuo ſecantes ad rectos angulos in H. Demiſſis in latus AC [productum ſi opus ſit,] tribus perpendicularibus BK, EL, GI, ductiſque ex puncto H aliis tribus rectis ad ſingulos angulos figuræ, HA, HB, HC; ſunto

$$AC = a \qquad KB = d \qquad CD = x$$
$$CB = b \qquad KC = e \qquad AF = y$$
$$BA = c \qquad KA = f$$

erit Tr. ABC $= \frac{1}{2}ad$, Tr: DEC [Tr. FAG] $= \frac{1}{4}ad$, Tr: DHF [Tra. HEBG] $= \frac{1}{8}ad$

$$EL = \frac{\text{Tr. DEC}}{\frac{1}{2}DC} = \frac{ad}{2x}, \quad GI = \frac{\text{Tr. FAG}}{\frac{1}{2}AF} = \frac{ad}{2y}$$

$$BK : EL = BC : EC = KC : LC$$

$$d : \frac{ad}{2x} = b : \frac{ab}{2x} = e : \frac{ae}{2x}$$

$$BK : GI = BA : GA = AK : AI$$

$$d : \frac{ad}{2y} = c : \frac{ac}{2y} = f : \frac{af}{2y}$$

Hinc

N. XXIX.

Hinc in 4 & 6 *Fig.* . . . . in 5. *Fig.*

$$DL\,(CD - CL) = x - \frac{ae}{2x},\quad DL\,(CD + CL) = x + \frac{ae}{2x}$$

. . . in 4 & 5 *Fig.* . . . . in 6 *Fig.*

$$IF\,(AF - AI) = y - \frac{af}{2y},\quad IF\,(AF + AI) = y + \frac{af}{2y}$$

$$DF : DC = \text{Tr. } DHF : \text{Tr. } DHC$$

$$x + y - a : x = \frac{ad}{8} : \frac{adx}{8x + 8y - 8a}$$

$$\text{Tr. } DEC - \text{Tr. } DHC = \text{Tr. } CHE$$

$$\frac{ad}{4} - \frac{adx}{8x + 8y - 8a} = \frac{adx + 2ady - 2aad}{8x + 8y - 8a}$$

$$EC : EB = \text{Tr. } CHE : \text{Tr. } EHB$$

$$\frac{ab}{2x} : b - \frac{ab}{2x} = \frac{adx + 2ady - 2aad}{8x + 8y - 8a} : \frac{2dxx + 4dxy - 5adx - 2ady + 2aad}{8x + 8y - 8a}$$

Similiter $DF : AF = \text{Tr. } DHF : \text{Tr. } AHF$

$$x + y - a : y = \frac{ad}{8} : \frac{ady}{8x + 8y - 8a}$$

$$\text{Tr. } FAG - \text{Tr. } AHF = \text{Tr. } AHG$$

$$\frac{ad}{4} - \frac{ady}{8x + 8y - 8a} = \frac{2adx + ady - 2aad}{8x + 8y - 8a}$$

$$AG : GB = \text{Tr. } AHG : \text{Tr. } GHB$$

$$\frac{ac}{2y} : c - \frac{ac}{2y} = \frac{2adx + ady - 2aad}{8x + 8y - 8a} : \frac{4dxy + 2dyy - 5ady - 2adx + 2aad}{8x + 8y - 8a}$$

$$\text{Tr. } EHB + \text{Tr. } GHB = \text{Trap. } HEBG$$

$$\frac{2dxx + 4dxy - 5adx - 2ady + 2aad}{8x + 8y - 8a} + \frac{4dxy + 2dyy - 5ady - 2adx + 2aad}{8x + 8y - 8a} = \frac{ad}{8}$$

N.XXIX. unde reperitur $yy = 4ay - 4xy - 2\frac{1}{2}aa + 4ax - xx$ pro priore Æquatione.

Rursus quia Triangula G I F, D L E sunt similia, cum habeant angulos ad I & L rectos, ac prœterea angulum D E L [qui anguli E D L complementum existit] æqualem angulo G F I qui ejusdem quoque E D L est complementum, ob angulum D H F rectum; hinc erit

$$GI : IF = DL : EL$$

$$\frac{ad}{2y} : y \pm \frac{af}{2y} = x \pm \frac{ae}{2x} : \frac{ad}{2x}$$

& proportione ad æqualitatem reducta

$$yy = \pm \tfrac{1}{2} af + \frac{aadd}{4xx \pm 2ae}$$

sive in omni Triangulo substitutis loco perpendicularis d, & segmentorum basis, e, f, eorum valoribus [ut pote qui ex datis Trianguli lateribus a, b, c, facile innotescunt] habebitur pro altera Æquatione,

$$yy = \frac{aaxx - bbxx + ccxx - \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{2}aacc}{4xx - aa - bb + cc}$$

Qua porro cum priore debite collata, obtinetur sequens Æquatio determinata octo dimensionum, solutumque est Problema:

$$\begin{array}{l} x^8 - 8ax^7 + 17aax^6 - 10a^3x^5 - 4\frac{1}{4}a^4x^4 + 5a^5x^3 - \frac{1}{4}a^6xx - \frac{1}{2}a^7x + \frac{1}{16}a^8 = 0 \\ \quad + 3bb \quad - 2abb \quad - 9\frac{1}{2}aabb + 12a^3bb - 1\frac{3}{4}a^4bb - 2\frac{1}{2}a^5bb + \frac{3}{4}a^6bb \\ \quad - 3cc \quad + 2acc \quad + 6aacc - 6a^3cc + aab^4 + a^5cc - \frac{1}{8}a^6cc \\ \qquad\qquad\qquad - \frac{3}{4}b^4 \quad + ab^4 \quad - 1\frac{1}{4}aabbcc - 2a^3b^4 + \frac{3}{4}a^4b^4 \\ \qquad\qquad\qquad + 1\frac{1}{2}bbcc - 2abbcc + \frac{1}{4}aac^4 + 2\frac{1}{2}a^3bbcc - \frac{3}{4}a^4bbcc \\ \qquad\qquad\qquad - \frac{3}{4}c^4 \quad + ac^4 \qquad\qquad - \frac{1}{2}a^3c^4 \quad + \frac{1}{16}a^4c^4 \end{array}$$

Quod si expuncta littera c, æquatio instituatur in litteris a, & c; tunc quindecim membris evadet brevior, ultimusque terminus trium tantum erit membrorum: Si loco incognitæ x ponatur F C, pro A C vero $2a$; C B, $2b$; B A, $2c$; rursus devenietur ad

ad Æquationem totidem dimensionum, sed secundo termino, & N. XXIX.
fractionibus carentem; &c.

SCHOL. I. Si rectæ DE, FG (*Fig.* 4, 5, 6.) sigillatim bisecent Triangulum ABC, sitque $DF = AD + FC + \sqrt{(2\,ADq + 2\,FCq)}$, tunc quadrisecabunt Triangulum; & si quadrisecent, erit $DF = AD + FC + \sqrt{(2\,ADq + 2\,FCq)}$. Fluit hoc Porisma ex priore Æquatione indeterminata, quæ quadrisectionem respicit, $yy = 4ay - 4xy - 2\tfrac{1}{2}aa + 4ax - xx$. Etenim si ponatur $AD = p$, $FC = q$, $DF = z$; adeoque $y = p + z$, $x = q + z$, $a = p + q + z$: atque hi valores loco litterarum y, x, a in æquatione hac substituantur, prodibit $z = p + q + \sqrt{(2pp + 2qq)}$.

Quare si quadrisectum sit Triangulum per rectas DE, FG, sitque $AD = FC$, erit $DF = 4\,AD$, & tota $AC = 6\,AD$: Si vero $AD = 1$, $FC = 7$, erit $DF = 18$: si illæ $= 7$ & 17, erit hæc $= 50$: si illæ $= 7$ & 23, erit hæc $= 64$, &c. Sequitur etiam, si data quædam recta linea AC, modo quo requiritur, secta sit in D & F, & qualecunque Triangulum super data AC constitutum fuerit, posse ex punctis sectionis duas inflecti rectas, quæ Triangulum illud quadrisecent.

II. Ex collatione porro utriusque æquationis indeterminatæ constare potest, latus illud Trianguli, in quo terminantur duæ quadrisecantium normalium extremitates, nunquam posse esse maximum: Nam AD existente $= p$, & $FC = q$, DF est $= p + q + \sqrt{(2pp + 2qq)}$ per 1. *Schol*; adeoque tota AC $[a] = 2p + 2q + \sqrt{(2pp + 2qq)}$; CD $[x] = p + 2q + \sqrt{(2pp + 2qq)}$; AF $[y] = 2p + q + \sqrt{(2pp + 2qq)}$: hinc posita $b < a$, seu $bb < aa$, quantitate aliqua t, ut sit $bb = aa - t$; si pro litteris a, b, x & y, aut aa, bb, xx, yy, hi valores, eorumve quadrata in æquatione altera

$$yy = \frac{aaxx - bbxx + ccxx - \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}aabb) + \frac{1}{2}aacc}{4xx - aa - bb + cc}$$

subrogentur, & æquatio ita ordinetur, ut cc ab una parte extet

 sola,

N. XXIX. sola, reperietur $cc = (32p^3q + 52ppqq + 56pq^3 + 34q^4 + 3ppl + 2pql + (24ppq + 40pqq + 24q^3 + 2pl)\sqrt{(2pp + 2qq)}) : (2pq + 3qq + 2q\sqrt{(2pp + 2qq)})$, & quandoquidem valore ipsius aa ad fractionem ejusdem nominis redacto, inveniatur tantum $aa = (28p^3q + 50ppqq + 52pq^3 + 34q^4 + (20ppq + 36pqq + 24q^3)\sqrt{(2pp + 2qq)}) : (2pq + 3qq + 2q\sqrt{(2pp + 2qq)})$, manifestum est $cc > aa$, & $c > a$. Eodem pacto, si supponatur $c < a$, reperietur $b > a$. Quare a non potest esse latus maximum.

At vero quia si ponatur $b > a$, seu $bb > aa$ quantitate quapiam m, reperitur $cc = (32p^3q + 52ppqq + 56pq^3 + 34q^4 - 3ppm - 2pqm + (24ppq + 40pqq + 24q^3 - 2pm)\sqrt{(2pp + 2qq)}) : (2pq + 3qq + 2q\sqrt{(2pp + 2qq)})$, adeoque $cc - aa = (4p^3q + 2ppqq + 4pq^3 - 3ppm - 2pqm + (4ppq + 4pqq - 2pm)\sqrt{(2pp + 2qq)}) : (2pq + 3qq + 2q\sqrt{(2pp + 2qq)})$, evidens est, c posse esse $>$ vel $< a$, prout hæc quantitas vel positiva est, vel negativa, id est, prout $4p^3q + 2ppqq + 4pq^3 + (4ppq + 4pqq)\sqrt{(2pp + 2qq)}$ $>$ vel $<$ est, quam $3ppm + 2pqm + 2pm\sqrt{(2pp + 2qq)}$: sive prout $(p+q)2q - (2p + 8q)pq : (3p + 2q + 2\sqrt{(2p^2 + 2q^2)})$ $>$ vel $< m$, quorum utrumque fieri potest. Quare si major sit, latus a utroque reliquorum b & c minus erit: sed tum alia quoque duæ normales e medio latere inflecti possunt, idem Triangulum quadrisecantes; ut si $a = 484$, $b = 490$, & $c = 495$, possunt optatæ rectæ educi tum ex latere a, segmentis ejus existentibus 62, 324, 98; tum ex latere b segmentis ejus factis circiter 131, 339, 20.

III. In Triangulo rectangulo & obtusangulo, latus a, in quo terminantur duæ quadrisecantium normalium extremitates, necessario medium est: Cum enim subtensa anguli recti vel obtusi esse non possit; (quia maximum latus esse non potest, ut jam ostensum) hinc vel b, vel c subtensa hæc erit; adeoque ejus quadratum vel $=$ vel $> aa +$ quadrato alterius, id est, (si & altera

altera hæc ſupponatur $> a$) majus duplo aa, quo tamen multo minus eſſe oſtendit calculus. N. XXIX.

IV. Latus e quo inflectuntur ambæ quadriſecantes normales, medietate alterutrius reliquorum ſemper majus eſt; quoniam enim Tr. DHF $=$ Trap. HFCE, erit Tr. DHF $>$ Tr. HFE, & DH $>$ HE; cumque anguli DHF, EHF recti, & HF perpendicularis communis, erit DF $>$ FE, & DC $>$ FE $+$ FC $>$ EC. Hinc quia CE $= ab : 2x$, erit $x > ab : 2x$, & $xx > ab : 2$, & aa ($> xx$) $> ab : 2$ & $a > \frac{1}{2} b$, Similiter quoque oſtendetur $a > \frac{1}{2} c$. Hinc in ſolo Triangulo oxygonio, & quidem illo tantum, quod æquilatero affine eſt, latus minimum optatam proprietatem habet, ut recipere poſſit duas normalium quadriſecantium extremitates.

V. Poſito a latere medio, b minimo, & c maximo; nempe $bb = aa - l$, & $cc = aa + m$, ſubſtitutiſque in reperta Æquatione his valoribus; exurgit $4p^3q + 2ppqq + 4pq^3 + (4ppq + 4pqq)\sqrt{(2pp + 2qq)} = 2pqm - 2pql + 3qqm - 3ppl + (2qm - 2pl)\sqrt{(2pp + 2qq)}$; unde liquet, quia prior pars eſt poſitiva, alteram quoque talem eſſe debere; adeoque ſi $m =$ vel $< l$, q fore $> p$, ſi verò $p =$ vel $> q$, m fore $> l$: id eſt, ſi differentia quadratorum lateris maximi & medii æqualis vel minor eſt differentia quadratorum medii & minimi; tunc ſegmentum lateris medii, adjacens lateri minimo, majus eſt ſegmento adjacenti lateri maximo: ſin vero hoc ſegmentum æquale vel majus illo; tunc differentia illorum quadratorum major eſt differentia horum. Prætereo alias Problematis determinationes.

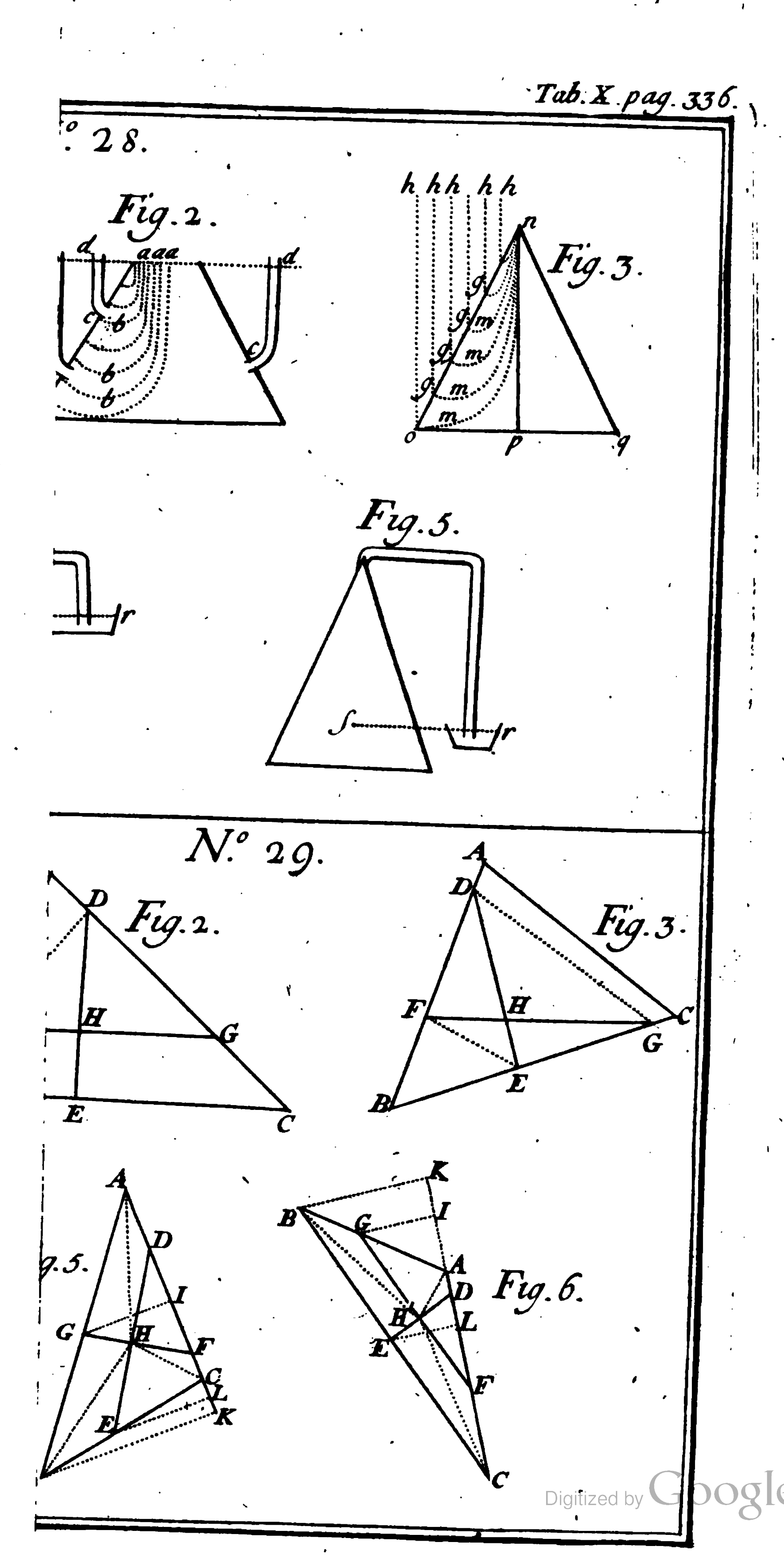
Videatur Numeri LXVII Articulus 2.

No. XXX.

JACOBI BERNOULLI
Mathematum Professoris Publici,
NOVA RATIO METIENDI ALTITUDINES NUBIUM:
Actorum Eruditorum Collectoribus communicata
in litteris Basileæ A. 1688. mense Januario datis.

Acta Erud. Lips. 1688. Febr. p. 98.

ANsam huic tentamini dederunt observatæ mihi crebrius, sudo & sereno cælo, fluctuantes hinc inde nubeculæ, quæ vesperi Sole occidente, & post ejus occasum purpureo aliquandiu colore tinctæ conspiciebantur, donec exacto horæ quadrante, vel semihora circiter, colore hoc subito evanescente, iterum pallescerent. Quoniam enim ratione & experientia quotidiana edocebar, Solis occidui radios discedere primum a locis depressioribus, tardius ex altioribus, primum ex arvis & pratis, inde deserere ædificiorum culmina, postmodum montium cacumina, omnium autem tardissime obscurari nubes, citius quidem orientaliores, tardius occidentaliores; non dubitavi colligere, hanc nubium rubedinem aliunde non provenire, quam a reflexione radiorum solarium ipsas directe illustrantium; quæque propterea disparere necessum habeat, tum cum Sol post Terræ tumorem se abscondit. Quo principio posito, inquirere cepi, num ex observato tempore



N°. 28.
Fig. 2.
d
aaa
d
c
b
b
b
c
h h h h h
n
Fig. 3.
g
g
m
g
m
g
m
m
o
p
q
Fig. 5.
r
s
r
N°. 29.
D
Fig. 2.
H
G
E
C
A
D
Fig. 3.
F
H
C
G
E
B
A
D
I
g. 5.
G
H
F
C
L
E
K
K
I
B
G
A
D
Fig. 6.
H
L
E
F
C

re disparitionis coloris hujus rubicundi, venari possimus nubium No.XXX. altitudinem.

Admittit autem hoc Problema tres quatuorve casus, quos ordine enodabimus.

I. CASUS,

Cum Nubes verticalis est.

Esto [*Fig.* 1.] ACE Globus terraqueus, E locus spectatoris, B Nubes verticalis; ac proinde EB ejus distantia a Terræ superficie; BDF planum circuli verticalis per Solem transeuntis. Sol, existens in D lambit Terram radiis suis in E, id est, illic loci occidit; promotus in F eandem radit in C, subrepturus deinceps nubi B lumen suum: DF est arcus depressionis verticalis Solis sub horizonte, quæ Trigonometrice invenitur, ex observata temporis differentia inter momentum occasus Solis & momentum disparitionis rubedinis in Nube.

Antequam pergamus, ostendendum, quod arcus depressionis Solis DF sit similis arcui terrestri CE: quod facile probatur. Ductis enim rectis DA, FA, apparet Triangula DEA, FCA similia & æqualia esse; quocirca angulus DAE = angulo FAC, & ablato communi DAC, angulus CAE = angulo FAD, id est, arcus CE similis arcui DF.

Quo demonstrato, manifestum, in Triangulo CAB, ut Sinus totus ad Secantem anguli CAB, vel FAD, ita semidiameter Terræ AC, ad distantiam Nubis a centro Terræ BA; e qua si auferatur semidiameter Terræ AE, obtinebitur distantia Nubis a superficie Terræ BE.

II. CASUS,

N. XXX.

II. CASUS,

Cum Nubes tempore observationis reperitur in eodem Verticali cum Sole, sed extra verticem.

Esto adhuc [*Fig.* 2. 3.] B locus Nubis; BEH ejusdem elevatio supra horizontem quadrante capta; AG perpendiculum e centro Terræ per locum stationis sursum productum ad intersectionem usque radii solaris FCB. Quo facto, quoniam angulus depressionis verticalis Solis DAF, id est [per *Lemma* præcedens] angulus CAG datus est, una cum semidiametro Terræ AC, invenientur quoque anguli AGC & AGB [qui in *Fig.* 3. coincidunt] ut & recta AG; subtractaque semidiametro Terræ AE, recta EG. Et quia in Triangulo BEG, præter modo inventum latus EG, noti etiam sunt anguli [quippe angulus BEG ipsius BEH complementum est ad rectum] innotescet hinc quoque latus BE, e quo & Terræ semidiametro AE, anguloque intercepto AEB [qui compositus est ex recto & dato HEB] in Triangulo AEB patefiet porro latus AB: unde dempto radio AL, remanebit tandem LB, pro quæsita distantia a superficie Terræ.

III. CASUS,

Cum Nubes nec verticalis est, nec in eodem plano verticali cum Sole existit.

Casus iste præcedentibus difficilior: Observetur differentia azimuthalis Solis & Nubis, seu angulus, quem verticalis Nubis cum

cum verticali Solis constituit; eo momento quo rubedo in Nu- No. XXX.
be disparet. Sit angulus iste,

1°. *Rectus*: Considera, radios e centro Solis egressos, Terræ superficiem, qua diei & noctis sunt confinia, & circumcirca radendo circulum in illa describere [quem *Circulum penumbræ* appellare lubet,] adeoque conum efformare, qui ob verticem acutissimum in centro Solis pro cylindro haberi potest; notabisque Nubem, eo momento quo pallescere incipit, existere in superficie hujus coni cylindrive: quare si secetur conus iste plano verticali per Nubem transeunte [quod ad axem coni sub Terra depressum est obliquum] nascetur inde Ellipsis, in cujus circumferentia reperietur Nubes. Centrum hujus Ellipsis coincidit cum centro Terræ A [*Fig*. 4.] maxima ejus semidiameter AC est linea verticalis, porrecta ex centro Terræ A, per oculum Spectatoris E, usque ad occursum radii solaris GC Terram lambentis in G; estque hæc linea AC cognita, Secans scilicet anguli GAC, id est, depressionis Solis infra horizontem [per præmissum *Lemma*]: minima Ellipsis semidiameter AD est ipsa semidiameter Terræ, vel Sinus totus. Quoniam enim circulus verticalis Solis transit per punctum perpendiculariter sub Sole situm, seu polum circuli penumbræ; hinc circulus penumbræ & verticalis Solis sese secant ad angulos rectos, quare & ille vicissim transit per polos hujus; sed per hujus polos transit quoque verticalis Nubis [quia per hypothesin eum recte secat]: ergo etiam verticalis Nubis & circulus penumbræ sese in polo illo intersecant: unde radius qui lambit polum hunc, ibidem offendit planum Ellipsis; quod cum fiat in superficie Terræ, erit ejus distantia a centro Terræ æqualis hujus semidiametro; cumque in circulo verticali Nubis, quadrante distet a linea verticali AC; sequitur, si hæc sit semissis axis majoris, semidiametrum Terræ esse semissem minoris.

Ductis itaque seorsim [*Fig*. 5.] lineis AD, AC, ad rectos sese decussantibus in A; describatur per ipsarum extremitates D & C quadrans Ellipsis CBD; &, propter oculum Spectatoris existentem in perpendiculari AC, fiat in illa AE = AD; erit-

No.XXX. que E locus observationis, super quo constituendo angulum CEB æqualem distantiæ Nubis a vertice, designabit punctum B locum Nubis in Aere. Qui si analytice inveniendus sit, posito AD [AE] $= a$, AC $= b$, BG $= x$, & ratione BG ad GE $= a : m$, data ob angulum BEF vel BEG datum; habebitur $x = (-aam + ab \sqrt{(bb + mm - aa)}) : (bb + mm)$; (*) e qua inventa, ut & GA [AE + EG] $= a + mx : a$, facile elicitur AB; unde si subtrahatur Terræ semidiameter AE, obtinebitur quæsita distantia perpendicularis Nubis a superficie Terræ. Q. E. I.

2°. *Obliquus*: Cum circuli verticales Solis & Nubis se mutuo secant oblique, neuter per alterius transibit polos: quare etiam verticalis Nubis & circulus penumbræ alio loco, quam in polo verticalis Solis, nimirum supra infrave horizontem se intersecabunt: & quandoquidem hæc intersectio determinet minimam diametrum Ellipseos, sequitur lineam verticalem [quia plus minusve ab illa intersectione quam quadrante abest] non posse esse maximam. Maxima vero semidiameter ita reperitur: Ut Sinus totus ad Sinum differentiæ azimuthalis Solis & Nubis; ita Sinus complementi depressionis Solis infra horizontem, ad Sinum complementi anguli, cujus secans est semissis axis majoris; dum semissis minoris existit, ut antea, ipsa Terræ semidiameter, seu Sinus totus.

Ductis igitur axium semissibus AL & AD, [*Fig.* 6, 7, 8] per eorum extremitates describatur quadrans Ellipsis LCD, vel paulo amplius: cujus peripheriæ, ex centro applicetur recta AC, Secans anguli depressionis Solis infra horizontem [per superius *Lemma*] ut pote designans lineam perpendicularem e centro Terræ per Spectatoris oculum eductam: In hac accipiatur AE $=$ AD,

(*) Nam AG (ex natura Ellipsis $= \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)} =$ AE + EG $= a + mx : a$. Ergo, quadrando, $bb - bbxx : aa = aa + 2mx + mmxx : aa$. Unde $xx + 2a^2mx : (bb + mm) = (aabb - a^4) : (bb + mm)$ & $x = (-aam + ab\sqrt{(bb + mm - aa)}) : (bb + mm)$.

$=$ A D, eritque punctum E locus observationis, super quo constituendus proin angulus C E B, æqualis distantiæ Nubis a vertice (versus A D quidem, cum Nubes occidentalis est; at versus A L, cum est orientalis: occidentalem voco, ubi differentia azimuthalis Solis & Nubis est quadrante minor; orientalem, ubi major) eritque B locus Nubis, qui quandoque, cum nubes orientalis est, cadere potest ultra verticem Ellipseos L, in alterum ejus quadrantem, ut *Fig.* 8: quod tamen contingere nequit, nisi cum differentia azimuthalis Solis & Nubis a quadrante parum differt, Nubesque horizonti admodum propinqua est. Ad inveniendum locum Nubis analytice, dimittantur perpendiculares CK in AL, BG in AC, & BH in AD, ac producantur, si opus sit, AC & HB ad communem concursum in M; statuanturque AD [AE] $= a$, AC $= b$, AL $= c$, ratio BG ad GE data $= a : m$, & AH $= x$: quo facto, invenitur, primo AK $= c\sqrt{(bb - aa)} : \sqrt{(cc - aa)}$ & KC $= a\sqrt{(cc - bb)} : \sqrt{(cc - aa)}$ (a); pro quibus brevitatis causa scribamus d & e: deinde ulterius contrahendi calculi ergo ponatur differentia rectangulorum ae & $dm = pp$: summa eorundem $= qq$, summa rectangulorum ad & $em = rr$, differentia eorundem $= ss$: sic reperitur (b) No. XXX.

 In

(a) Sit CK $= e$, & AK, ex Ellipsis, natura erit $= \frac{c}{a}\sqrt{(aa - ee)}$. At vero AC^2 [bb] $=$ KC^2 [ee] $+ AK^2$ [$cc - ccee : aa$]. Ergo $aabb = aaee + aacc - ccee$. Unde $e = a\sqrt{(cc - bb)} : \sqrt{(cc - aa)} =$ KC; & d [AK] $= \frac{c}{a}\sqrt{(aa - ee)} = a\sqrt{(bb - aa)} : \sqrt{(cc - aa)}$.

(b) Demittatur BO, normalis ad AL, occurrens in I ipsi AC; & erit AK [d] : KC [e] $=$ AO (quam vocabimus z): OI $= ez : d$. Igitur BI $=$ BO $-$ OI (*Fig.* 6) vel OI $-$ BO (*Fig.* 7) vel BO $+$ OI (*Fig.* 8), BI, inquam, est $x - ez : d$, aut $ez : d - x$, aut $x + ez : d$, id quod ambigue designabimus sic, $x \backsim ez : d$. Rursus, (ob similia triangula ACK, AIO, BIG) est AC [b] : AK [d] $=$ AI : AO $=$ BI ($x \backsim ez : d$) : BG $= (dx \backsim ez) : b$; & quoniam $a : m =$ BG : GE, erit GE $= (dmx \backsim emz) : ab$. Igitur AG $=$ AE $+$ EG $= a + (dmx \backsim emz) : ab =$ (aab

No. XXX. In 6. *Fig.* angulo CEB existente $<$ CAD, quo casu etiam $ae < dm$

$$x = \frac{-a^4bpp + acrr\sqrt{(aap^4 + ccr^4 - a^4bb)}}{aap^4 + ccr^4}$$

angulo CEB existente $>$ CAD, quo casu itidem $ae > dm$,

$$x = \frac{+a^4bpp + acrr\sqrt{(aap^4 + ccr^4 - a^4bb)}}{aap^4 + ccr^4}$$

angulo CEB existente $=$ CAD; evanescit quantitas pp, utpote $ae = dm$, estque

$$x = \frac{a}{bc}\sqrt{(bbcc - aadd)}$$

In 7. *Fig.* angulo CEB existente $>$ CAL, quo casu quoque $ad > em$,

$$x = \frac{+a^4bqq - acss\sqrt{(aaq^4 + ccs^4 - a^4bb)}}{aaq^4 + ccs^4}$$

angulo CEB existente $<$ CAL, quo casu pariter $ad < em$,

$$x = \frac{+a^4bqq + acss\sqrt{(aaq^4 + ccs^4 - a^4bb)}}{aaq^4 + ccs^4}$$

angulo CEB existente $=$ CAL, evanescit quantitas ss, utpote $ad = em$,

fitque $x = \frac{ae}{b}$.

In

$(aab + dmx \backsim emz) : ab$. Nunc quoniam $AG^2 + GB^2 = AB^2 = AH^2 + HB^2$ erit AG^2 $[(aab + dmx \backsim emz)^2 : aabb] = AH^2 + HB^2 - GB^2$ $[xx + zz - (dx \backsim ez)^2 : b^2]$; aut $(aab + dmx \backsim emz)^2$, $= aabbxx + aabbzz - aa(dx \backsim ez)^2 =$ (quia $bb = dd + ee$) $aaddxx + aaeexx + aaddzz + aaeezz - aaddxx \pm 2aadexz - aaeezz = aaeexx + aaddzz \pm 2aadexz = (aex \backsim adz)^2$. Ergo $aab + dmx \backsim emz = aex \backsim adz$, vel $aab = (ae \backsim dm)x \pm (ad \backsim em)z$: hoc est, in casu Fig. 6. $aab = ppx + rrz$: in casu Fig. 7. $aab = qqx + ssz$, in casu Fig. 8. $aab = ssz - qqx$. Hinc, separando z, & quadrando, & pro zz substituendo $cc - ccxx : aa$, habentur æquationes quadraticæ, quarum solutiones dant Auctoris formulas.

In 8. *Fig.* ubi angulus CEB perpetuo existit $>$ CAL, adeoque & $ad > em$, No.XXX.

$$x = \frac{-a^4bqq + acff\sqrt{(aaq^4 + ccf^4 - a^4bb)}}{aaq^4 + ccf^4}$$

Inventâ quantitate x, vel AH, facile tandem est, ex illa, & recta BH $= \frac{c}{a}\sqrt{(aa - xx)}$, investigare AB; a qua subtracta Terræ semidiameter AE relinquet quæsitam Nubis altitudinem. Q. E. I.

N°. XXXI.

JACOBI BERNOULLI

ANIMADVERSIO

IN GEOMETRIAM CARTESIANAM,

& Constructio quorundam Problematum Hypersolidorum.

QUanquam subinde extiterint, qui CARTESIUM in Physicis, aliisque, humani quippiam passum fuisse ostenderent, nemo tamen, quod sciam, hactenus in ejus Geometria quicquam, quod alicujus momenti esset, censura dignum adnotavit; quale quiddam in sequentibus aperire constitui, postquam de primario Autoris in illa scopo pauca nonnulla prælibavero, quæ errorem ejus magis conspicuum, minusque excusabilem reddere possunt. *Act. Erud. Lips. 1688. Jun. p. 323.*

CARTESIUS, in tribus *Geometriæ* suæ libris, præcipue versatur in eo, ut ostendat, Problematis cujusque constructionem

 sem-

N.XXXI. semper eligendam esse lineam simplicissimam, cujus ope id ipsum solvi queat, hoc est, (prout se explicat) non tam talem, quæ Problematis constructionem aut demonstrationem faciliorem reddat, quam quæ sit simplicissimi generis. Hoc enim posito, docet deinceps, solius lineæ rectæ & circuli ope, non posse construi nisi Problemata simplicia & plana, id est, Æquationes unius duarumve dimensionum, & ope Sectionis alicujus Conicæ non nisi Problemata solida, hoc est, Æquationes trium quatuorve dimensionum; & ope Parabolæ, ut vocat, secundi generis, Æquationes duntaxat quinque vel sex dimensionum; cæterasque altiorum graduum Æquationes requirere itidem curvas gradatim in infinitum magis magisque compositas. Quod tantundem est, ac si generaliter dixisset, *per curvas cujusque generis construi solummodo posse Æquationes duplo plurium dimensionum, quam sint illa, quibus earundem curvarum natura exprimitur.* Quæ Regula a nemine huc usque in dubium vocata fuit; licet ejus falsitas facile potuisset detegi a SCHOOTENIO, HUDDENIO, aliisque, qui perspectam habebant methodum adinveniendi Æquationum constructiones; nisi, Magistri sui auctoritate præventi, veritatem dictorum ejus supponere quandoque, quam examinare maluissent.

Existimo namque demonstratu haud difficile esse, *quod cujuslibet generis curvæ aptæ sint ad construendas Æquationes tot dimensionum, quot indigitat quadratum numeri dimensionum, ad quas ascendunt Æquationes curvarum illarum naturam exprimentes.* Sic ope curvarum, quarum natura exprimitur per Æquationem cubicam, construi possunt non solum Æquationes bis trium seu sex, sed ter trium seu novem dimensionum; & quarum natura exprimitur per Æquationem biquadraticam, earum auxilio non modo Æquationes bis quatuor seu octo, sed quater quatuor seu sexdecim dimensionum resolvuntur, &c. plane ut hinc appareat, CARTESIUM ejusdem, quod ipse perstringit, vitii reum esse, dum ad constructionem Problematum superiorum graduum, præter necessitatem, adhibere docet curvas magis compositas, quam eorundem natura deposcit. Quod enim circa Sectiones

Conicas

N°. 30.

Fig. 6.

M L C K G B O I E A H D

Fig. 4.

C B F G E D A

Fig. 7.

L B I O G K C E M A H D

Fig. 5.

C B G E F A H D

Fig. 8.

B L O I K C G E H D A M

Conicas recte sentiat, earum nempe ope non posse construi al- N. XXXI. tiores Æquationes quam Cubicas & Biquadraticas; videtur potius ex accidenti illi contigisse, ex eo quia coincidunt duplum & quadratum binarii, qui est numerus dimensionum, quibus constant Æquationes naturam Conicarum Sectionum exprimentes.

Sed ne quicquam gratis asseruisse videar, proponamus construendam hanc Æquationem novem dimensionum: y^9 * * $- 3py^6$ * * $+ 3ppy^3$ * $- qy - r = 0$, quæ quamvis incompleta sit, determinationemque includat, quatenus requirit quantitatem cognitam septimi termini æqualem trienti quadrati quantitatis cognitæ quarti; attamen reducibilis non est ad pauciores dimensiones; ac proinde, si credendum CARTESIO, aliter construi non poterit, nisi adhibendo curvam duobus tribusve gradibus altiorem, quam sunt Sectiones Conicæ. Dico, *duobus vel tribus gradibus*: quoniam animadverto, ipsum CARTESIUM sibi non constare, in distinguendis per certa genera curvis; quemadmodum sub finem libri primi ex resolutione quæstionis PAPPI colligere est; ubi, ad quæsitorum punctorum inventionem, adhibendam esse dicit curvam Sectionibus Conicis uno gradu altiorem, cum quæstio proposita est in 10, 11, 12, aut 13 lineis: & cum in 14, 15, 16, vel 17 lineis, requiri tum aliam curvam, quæ uno adhuc gradu supra præcedentem sit composita. Atqui vero cum quæstio proponitur in 10, 11, 12, aut 13 lineis, effici potest (ipse monente CARTESIO) ut Æquatio Problemati respondens non ultra quadrato-cubum assurgat: & cum in 14, 15, 16, 17, proponitur, fieri etiam potest, ut Æquatio biquadrato-quadratum non excedat; quarum quidem Æquationum illa, juxta Autoris methodum, resolvitur ope curvæ, cujus natura exprimitur per Æquationem cubicam; hæc vero per aliam curvam, cujus natura exprimitur per Æquationem biquadraticam: Unde omnino colligi deberet, Autori propositum fuisse, curvas istas ad duo diversa genera, vel duos differentes gradus referre; & tamen ipsemet, in paragrapho statim subsequenti, non obscure, imo libro secundo passim, disertis verbis ambas sub eodem constituit gradu; sicut etiam illas

N. XXXI. illas curvas; quarum Æquationes vel ad surdesolidum; vel ad quadrato-cubum adscendunt, promiscue sub eodem curvarum genere complectitur.

Quicquid igitur sit de distinctione hac curvarum, certum est; Æquationem supra allatam ex sententia CARTESII construi non posse, nisi ope curvæ, quæ Sectiones Conicas ad minimum duobus gradibus excedit: cum tamen eandem construam facile adminiculo solius curvæ Paraboloidicæ cubicalis, quæ Sectiones Conicas uno duntaxat gradu superat. Constructio talis: Descripto (*Fig.* I.) vulgari Paraboloide cubicali AG, cujus latus rectum AB seu 1, vertex A, & axis AF; sumatur in hoc axe $AE = p$, & ex puncto E excitetur perpendicularis $EC = (p^3 - r) : q$, circa quam ut axem, vertice C, & latere recto $CD = \sqrt{q}$, describatur aliud Paraboloides cubicale CG, intersecans alterum in puncto G; e quo si dimittatur in axem AE perpendicularis GF, erit hæc radix Æquationis propositæ. DEM. Etenim, si linea GF sic inventa vocetur y, erit, ex natura Paraboloideos, $AF = y^3$, ac proinde $HG = EF = AE - AF = p - y^3$, & $HG^3 = p^3 - 3ppy^3 + 3py^6 - y^9 =$ (propter Paraboloides CG) DC^2 in $CH = DC^2$ in $CE - GF =$ (*per construct.*) q in $(p^3 - r) : q - y = p^3 - r - qy$; hoc est, Æquatione ordinata $y^9 ** - 3py^6 ** + 3ppy^3 * - qy - r = 0$, quæ eadem est cum proposita: unde liquet, inventam lineam GF, quæ nominata fuit y, Æquationis hujus esse radicem. Q. E. D.

Potest vero etiam ipsa hæc Æquatio adhuc aliter construi, ope unius ejusdemque Paraboloideos cubicalis, id est, duorum eandem parametrum habentium, hoc modo: Ductis (*ead. Fig.* I.) EA, EC perpendicularibus indefinitis, abscissaque $EC = (p^3 - r) : q$, ut antea, fiat $EA = p : \sqrt[4]{q}$; & describantur circa axes AE, CE, sumtis verticibus A & C, ac communi Parametro AB vel $CD = \sqrt[8]{q}$, duo Paraboloidea cubicalia AG, CG, sese intersecantia in puncto G; demissa enim in AE perpendicularis GF, iterum Æquationis propositæ radicem designabit.

DEM.

DEM: $(p^3 - 3ppy^3 + 3py^6 - y^9) : \sqrt[4]{q^3} = ((p - y^3) : \sqrt[4]{q})^3 = (EA - GF^3 : AB^2)^3 = (EA - FA)^3 = HG^3 = DC^2 \times CH = DC^2 (CE - GF) = \sqrt[4]{q}((p^3 - r) : q - y) = \sqrt[4]{q} (p^3 - r - qy) : q = (p^3 - r - qy) : \sqrt[4]{q^3}$: factaque multiplicatione per $\sqrt[4]{q^3}$, habetur, ut supra, $p^3 - 3ppy^3 + 3py^6 - y^9 = p^3 - r - qy$, sive $y^9 ** - 3py^6 ** + 3ppy^3 * - qy - r = 0$; quare constat rursum GF Æquationis hujus radicem fore. Q. E. D. N. XXXI.

Dixi solam GF fore Æquationis radicem, non LM, vel IN, vel OP, ut pote quæ radices sunt differentium Æquationum: nam LM est radix vera hujus Æquationis, $y^9 ** - 3py^6 ** + 3p^2y^3 * + qy - 2p^3 + r = 0$: IN radix falsa istius, $y^9 ** + 3py^6 ** + 3ppy^3 * + qy + r = 0$: & OP falsa hujus, $y^9 ** + 3py^6 ** + 3ppy^3 * - qy + 2p^3 - r = 0$. Quod cum primo animadvertissem, suspicari simul cœpi, curvas AN & CL non easdem esse cum AG & CG; reque ulterius perpensa, mox verum deprehendi, quod curva AG infra axem AE non continuetur sinistrorsum per AN, sed potius dextrorsum per AQ, & similiter curva CG ultra axem CE non inflectatur deorsum versus L, sed sursum versus R: meminique postea, id ipsum etiam jam olim a WALLISIO, sed alia occasione, observatum esse, in Præfatione ejus ad *Tractatum contra* MEIBOMIUM. Etenim intersectiones harum curvarum RCGN, & LGAQ, dicta ratione inflexarum supra axem AP, determinabunt omnes radices veras Æquationis nostræ, & reliquæ infra axem omnes falsas: possunt autem se intersecare, supra axem AP, ad summum in tribus punctis, & infra, in duobus, si ultimus Æquationis terminus habeat signum $-$, quod fit, si ES < EA; at si habeat signum $+$, id est, si ES > EA, possunt se intersecare, supra axem, in quatuor punctis, & infra, in uno solo: sic ut, illo casu, Æquatio tres admittere possit veras radices, & duas falsas; hoc vero, quatuor veras, & unam duntaxat falsam: reliquæ enim quatuor semper hic imaginariæ sunt.

Quemadmodum vero Æquatio ista incompleta novem dimensionum constructa est, adminiculo curvæ, quæ uno tantum gradu

N. XXXI. supra Sectiones Conicas est composita: ex eodem curvarum genere seligi omnino puto posse tales, per quas omnes, etiam completæ Æquationes totidem dimensionum generaliter resolvi ac construi queant.

Sed ut veritatem usumque eorum, quæ dixi, etiam in speciali aliquo Problemate, eoque celebri admodum, circa inventionem nimirum mediarum quarundam proportionalium, palam faciam; proponantur inveniendæ sex mediæ proportionales inter duas datas a & q: ubi constat, quod si pro prima earum ponatur x, perveniatur ad Æquationem bis-sursolidam, $x^7 - a^6 q = 0$; quæ, si CARTESIO fides adhibenda, aliter construi nequit, nisi adhibendo curvam, cujus natura exprimitur per Æquationem, in qua alterutra indeterminatarum ad biquadratum assurgit: At ego illam construo facillime, ope duarum curvarum, quarum natura intra limites Æquationis cubicæ coercetur. Ductis enim [*Fig.* 2.] normalibus rectis AD, AC; si circa illas ut axes, communi vertice A, parametris AB $= a$, & AF $= q$, describantur duæ Paraboliformes curvæ AGL & AGM, sese intersecantes in puncto G; quarumque illa sit vulgaris Paraboloidica cubicalis; hæc vero, alia Paraboloidica ejus naturæ, ut solidum ex ductu lateris recti in quadratum segmenti axis, sit æquale cubo ordinatim applicatæ; erit perpendicularis GE, ex puncto intersectionis G in axem AE demissa, radix Æquationis inventæ, id est, prima sex mediarum proportionalium, quarum tertia est AE.

DEM. $aay = AB^2 \times AE =$ (ex natura Paraboloidis AGL) $EG^3 = x^3$; hinc $y = x^3 : aa$ & $y^3 = x^9 : a^6$: Rursus $qxx = AF \times AH^2 =$ (ex natura Paraboloidis AGM) $HG^3 = y^3 = x^9 : a^6$, unde $x^9 = a^6 qxx$; factaque divisione per xx, $x^7 - a^6 q = 0$: quæ, quia cum superiore convenit, patet propositum. Notandum hac occasione: quia Æquatio, ad quam primo pervenitur, dividi potest per xx, sequitur illam, præter rectam GE, adhuc duas alias habere æquales radices, quales singulæ sint æquales nihilo; adeoque duas curvas in communi vertice A sese tangere debere: quo indicio, denuo cognovi, ad quas partes inflectantur curvæ ultra verticem; deprehendique non continuari

tinuari

tinuari per AP & AO; cum absurdum foret, curvas LAP, MAO sic inflexas se in A contingere: sed priorem (quod cum WALLISIO jam annotavi) continuari per AQ, posteriorem vero (quod a nemine huc usque observatum legi) per AS: hac enim ratione contactus utriusque curvæ manifestus est. N. XXXI.

Haud absimili observatione invenientur 10, 12, 16, pluresque proportionales: nam si curva AGL sit Paraboliformis biquadratica expressa per $a^3 y = x^4$; & curva AGM Paraboliformis cubica denotata per $aqx = y^3$, erit GE prima decem proportionalium inter a & q, & AE quarta: sin & hæc sit biquadratica indicata per $qx^3 = y^4$ erit GE prima duodecim proportionalium, & AE quarta &c. Quales quidem juxta CARTESIUM inveniri non possent, nisi ope curvarum, multis adhuc gradibus supra Paraboliformes istas compositarum.

Præterea sciendum, etiam quatuor medias proportionales inveniri posse ope Parabolæ & vulgaris Paraboloidicæ cubicalis; quæ tametsi sit generis ejusdem cum illa, qua utitur CARTESIUS, tamen & constructionem multoties expeditiorem & demonstrationem planiorem efficit. Si enim (*in eadem figura* 2.) AGL fingatur esse vulgare Paraboloides cubicale, cujus latus rectum AB $= a$, & AGM Parabola, cujus latus rectum AF $= q$; erit GE prima quatuor proportionalium inter a & q, & AE tertia. Quæ constructio conferri potest cum prolixissima illa *Cartesiana* quæ habetur sub finem Libri tertii.

Quibus omnibus rite perpensis, nihil prorsus video, quid CARTESIUM hoc in passu ab ἀσυμμετρησίας vitio, quod ipsemet perstringit sæpius, liberare queat; præterquam quod dici forte possit, ea propter Geometram hunc coactum fuisse, in construendis Æquationibus quadrato-cubum excedentibus, adhibere curvam nostra altiorem, quia alteram curvarum, quarum intersectione determinari debent radices, perpetuo in omnibus suis constructionibus voluerit esse circularem, quæ simplicitate sua vicissim compenset quicquid altera nimium habet compositi. At ficulneum hoc esse præsidium, ipse si revivisceret, CARTESIUS haud gravate agnosceret: quippe nemini, puto, condonaret, qui Pro-

 blemata

N.XXXI. blemata plana, quæ duorum circulorum intersectione resolvi possunt, construere mallet ope Sectionis alicujus Conicæ & Lineæ rectæ, sub prætextu, quod sicut Sectio Conica circulo magis est composita, ita Linea recta vicissim eodem sit simplicior; neque etiam magis ab eo veniam impetraret, qui, in constructionibus Æquationum cubicarum, Circulo & Parabolæ præferret Lineam rectam & Paraboloidicam cubicalem, quarum una magis, altera minus illis est composita: ut maxime omnes Æquationes cubicæ Lineæ rectæ & unius ejusdemque Paraboloidis ope, non minus ac Circuli & Parabolæ adminiculo, scite & expedite construi possint hoc modo: Descripto (*Fig.* 3.) vulgari Paraboloide cubicali FEA, continuato, ut supra monui, per AH, cujus axis sit CAL, vertex A, & latus rectum AB $=1$, abscindatur in axe [sinistrorsum, si sit $z^3 = * - pz + q$; dextrorsum vero, si habeatur $z^2 = * + pz + q$, aut, $z^3 = * + pz - q$] AM $=p$, & AI $=q$, junctaque BM; ducaturque per I huic parallela IE, tangens vel secans curvam in puncto, vel punctis, a quibus demissæ ad axem perpendiculares denotabunt omnes Æquationis radices; nempe ED radicem veram primæ formulæ; LH veram, & FG, ED falsas secundæ: sicut illa falsam, hæ veras tertiæ (a). Cum itaque Constructiones istæ tam elegantes, tamque faciles, nihilominus e Geometria eliminentur a CARTESIO; perspicuum utique est, etiam modum, quem præscribit pro construendis Æquationibus quadrato-cubum excedentibus, repudiandum potius esse hoc nomine, quia curvam adhibere docet, utraque nostra magis compositam, quam excusandum, quod pro altera

(a) Nam si dicatur LH, z; DE & GF, $-z$, erunt, ex natura parabolæ cubicalis, AL $=z^3$; AD, & AG $=-z^3$. Igitur IL $=z^3-q$, ID & IG $=-z^3+q$. Sed AM (p) ad AB (1), ut IL (z^3-q) aut ID, IG ($-z^3+q$), ad HL (z) aut DE, FG ($-z$). Igitur $z^3-q=pz$, aut $-z^3+q=-pz$, id est $z^3=pz+q$.

Quod si posuissemus LH, $-z$, DE & FG, $+z$, habuissemus $z^3=pz-q$.

At vero, si ED $=z$, erit AD $=z^3$, & Di $=q-z^3$. Ergo Am (p) : AB (1) $=$ Di ($q-z^3$) : DE (z) dat $q-z^3=pz$, aut $z^3=-pz+q$.

altera assumat circulum, qui iisdem simplicior existit. N. XXXI.

Ut taceam de eo quod nequidem semper opus sit, in nostra methodo, quærere radices per intersectionem duarum diversarum curvarum, sed quod sæpe una sola sufficiat; prout ostendi in constructione posteriore Æquationis supra allatæ novem dimensionum, quam absolvi ope unius ejusdemque Paraboloidis, diversimode tantum positi: Cum, secundum CARTESIUM, semper describendæ sint duæ diversæ curvæ, quarum intersectionibus radices optatæ Æquationum inveniantur.

N°. XXXII.

DIONYSII PAPINI

MELETEMATA

AD GEMINAM APPENDICEM

De Perpetuo Mobili,

Actis Erudit. Lipſ. A. 1687, menſe Junio inſertam. *

PErvolvi paucis abhinc diebus *Acta Eruditorum* Mensis Junii A°. 1687, ibique a pagina 315. usque ad paginam 324. observavi Clarissimum Virum D. BERNOULLI Mobile quoddam perpetuum acriter quidem, at frustra, impugnare; quia circumstantia, ex qua Machinæ defectum deducit, nequaquam est essentialis, sed facil- *Acta Erud. Lipſ. 1688. Jun. p. 336.*

 limo

* *Supra Num.* XXVIII.

Num. XXXII. limo negotio potest immutari; sicque ipsius objectio tota subito corruet, salva interim remanente Machina, prout jamjam videbitur. Ibidem præterea perspicacissimum illum Virum video etiamnum ambigere, utrum mea contra idem inventum exceptio sufficiens, necne, habenda sit: verisimile est itaque, quamplures alios itidem ea de re addubitaturos; metuendumque esse ne Publicum spe successus Perpetui Mobilis in posterum deludatur: operæ igitur pretium fore existimo, si ostenderim objectionem meam admodum esse peremptoriam, ipsumque controversiæ jugulum recta impetere.

Figura I. Machinam exhibet inversam, ampliori nimirum parte deorsum, acumine vero sursum spectante, contra quam in priori descriptione fuerat supposita. Ut jam disquirere liceat, an nova hæc dispositio feliciorem contra me successum sortitura sit; præterea, ut ipsam tuear a *Bernoullianis* telis, quæ sane in priori descriptione metuenda erant; suppono jam follem A B C D E, quadraginta digitos altum, prismaticum potius quam pyramidalem, esse ex illorum genere, quorum alæ non circa axem quendam moventur, sed in dilatatione & contractione semper parallelæ remanent: exempli gratia, cum ala A B C accedet ad D E distantiæ A E, C D pariter decrescent sibique invicem perstabunt æquales: sic nulla amplius vectis ratio haberi poterit, ex qua tamen Machinæ defectum deducit BERNOULLIUS. Supponendum est insuper follem mercurio plenum esse, & vas H mercurium etiam continens collocatum altius axe motus F, qui medio Machinæ affixus supponitur.

Sic sperat inventor fore ut follis gravitate aeris comprimatur, mercuriumque suum per tubum A K H in vas H effundat; unde inferior pars B C D, levior facta, molem G superiori parti affixam æquiponderare amplius non valeat, deprimaturque pars superior A E: hæc autem, dum ad altitudinem axis F devenerit [*fig.* 2.], artificio aliquo poterit detineri, ne ulterius descendat, atque ita follis in situ horizontali remanebit.

Jam quoniam vas H supra axem positum est, poterit mercurius ex dicto vase per tubum K A in follem defluere; donec pars latior B C D, admisso mercurio, tantum pondus acquisierit, ut alteri parti A E molique ipsi affixæ præponderet, proindeque depressa Machinam in pristinum statum restituat: hoc facto, ab externo aere iterum comprimetur follis, motusque, successione jam descripta, semper continuabitur. Sic, inquam, sperat Author; an merito? Jam dispiciam.

Supponamus vas H duobus digitis, verbi gr. supra axem F positum esse; sicut & in priori descriptione, illud duobus digitis inferius axe collocaverat Author: Sequitur jam (cum follis sit quadraginta digitos altus) perpendicularem altitudinem tubi H A [*fig.* 1.] esse octodecim digitorum, mercuriumque in dicto tubo contentum ea altitudine aeri externo contra niti: adeoque atmosphæræ gravitas (quæ viginti septem mercurii

mercurii digitos æquare ſupponitur) debebit, per dictum tubum H A, exerere in interiora follis preſſionem novem mercurii digitis æqualem: quia ſcilicet mercurius H A octodecim ex viginti ſeptem detrahit. Jam ut preſſionem a mercurio in folle incluſo factam indagemus, eadem methodo procedendum eſt, quam in *Novellis Batavis* Menſis Septembris Anno 1686. ex *Tranſactionibus Philoſophicis Londinenſibus* deſumptam legere eſt: Obſervandum ſcilicet partes omnes alarum follis a dicto mercurio inæqualiter premi, prout magis vel minus a ſummitate diſtant: ſic enim partes infimæ a quadraginta mercurii digitis comprimuntur; ſupremæ vero, cum nullum mercurium ſupra ſe habeant, nullam poſſunt ab ipſius gravitate preſſionem pati: partes in medio ad axem ſitæ viginti digitos in ſuperiori parte ſtagnantes ſuſtinent; ac ſic de cæteris, preſſio ſemper proportionaliter cum diſtantia a vertice, minuitur, vel augetur. Cum autem iſtud preſſionis augmentum progreſſionem arithmeticam ſequatur; patet quod omnes illæ variæ preſſiones, ſimul ſumptæ, efficiunt idem quod preſſio uniformis, quæ ubique viginti mercurii digitos æquaret: addendo igitur viginti digitos novem illis per tubum H A prementibus, de quibus ſupra; fient omnino viginti novem digiti, qui in interiora follis preſſionem exerant: extus vero atmoſphæræ preſſio viginti ſeptem digitos ubique æquare ſupponitur: ergo prævalebit interior preſſio, follisque dilatabitur; cum tamen ex Authoris ſententia comprimi debuiſſet: Atque ita nova hæc diſpoſitio feliciorem ſuperiori ſucceſſum non ſortietur. Num. XXXII.

Notandum hic, quod, quemadmodum in *Novellis Batavis* ſupra citatis, nullam ad motum alarum circularem, neque ad ipſarum inæqualem latitudinem, attentionem feceram; ſic iterum dictam alarum inæqualitatem negligendam hic arbitror. Dum enim circumſtantiæ ejuſmodi mihi favent, non metuendum eſt, ne Adverſarius objectionem illam moveat; ſic enim ſe ipſum jugulandum exponeret: mihi autem, cum iſtis minus eſſentialibus ſubſidiis non opus ſit, multo ſatius eſt brevitati ſtudere, atque ex ſola liquorum altitudine (quæ genuina eſt gravitationis ipſorum menſura) argumentum deſumere, quam fuſiori diſcurſu ſuperfluas vocando ſuppetias, aliquam Antagoniſtæ excipiendi anſam præbere; unde fiat ut controverſia multo difficilius ad finem perducatur.

Jam ſi quis quærat rationem, cur follis aperiri hic debeat, cum tamen in ſuperioris deſcriptionis examinibus ipſum claudi debere demonſtraretur? Reſpondeo vas H, prout infra vel ſupra axem collocatur, in cauſa eſſe, cur follis erectus aliquando comprimi debeat; aliquando etiam dilatari. In priori enim deſcriptione, cum vas H eſſet duobus digitis depreſſius quam axis Machinæ, tubus H A æquabat viginti duos digitos, atque ita mercurius in eo contentus aeri externo eouſque reſiſtebat, ut totalis in folle preſſio eſſet ſolummodo viginti quinque digitorum; unde

ſeque-

Num. XXXII. sequebatur follis ab exteriori aere constrictio: in posteriori autem descriptione, quam hic exhibuimus, idem vas H supra axem collocandum est; unde tubus HA, brevior factus, permittit ut atmosphaera fortiorem in interiora follis pressionem exerat, follemque aperiat; prout ex computo supra ostensum est. Si quaeratur ulterius, cur vasis H positio sic immutanda sit? In promptu iterum responsio est. In priori scilicet Machinae descriptione, follis ad horizontalem situm adductus, mercurium suum effundere debuit in vas H, quod proinde infra axem collocari oportuit: in posteriori autem descriptione, idem follis, dum horizontalem positionem obtinet, mercurio ex vase H defluente debet repleri; ac proinde dictum vas altius ponatur necesse est: res nimium facilis est, quid plura? Quoniam tamen (in secunda *Appendice* †) Clarissimus BERNOULLIUS supponit, axem motus affigendum esse Machinae e regione centri gravitatis; cum nos dictum axem in media inter utrumque extremum distantia collocemus; metuendum est, ne quid negotii ejusmodi discrepantia Lectoribus facessat: proindeque illos hic monitos velim, Cl. BERNOULLIUM praeproperum hic etiam tulisse judicium, infidamque iterum Hypothesin assumpsisse. Rem enim paulo attentius inspectanti facile patuisset in Machina, de qua tractabat, axem motus & centrum gravitatis in eadem altitudine non posse collocari: posita namque illa aequalitate altitudinis, quantumcunque follis mercurio repleretur, nunquam tamen basis praeponderare posset: ac proinde optata rotationis vicissitudo frustra expectaretur. Fatendum igitur axem motus ab inventore Machinae recte fuisse medio infixum, meamque contra dictum Automa objectionem *Bernoullianis* esse anteponendam.

Manum jam de tabula sumerem, quodque Cl. BERNOULLIUS crassae me in Geometricis inscitiae insimulat, quasi pyramidis ad prisma ejusdem basis atque altitudinis rationem subtriplam esse ignoraverim, omitterem libentissime: at Clarissimi Viri verba ea ratione, hoc in loco, conscripta sunt, ut plurimos Lectores in errorem facile inducant. Ille enim me culpat, quod vasis pyramidalis capacitatem juste non aestimaverim, dum mercurii in folle pressionem computavi; quasi nimirum liquidorum pressiones ab ipsorum quantitatibus, aut vasorum capacitatibus penderent. Necessarium igitur duxi tyrones hic monere, in computationibus ejusmodi nullam prorsus figurae aut capacitatis vasorum rationem habendam: in ipso enim Hydrostatices principio demonstratur, liquidorum pressionem petendam esse solummodo ex extensione partis compressae, & perpendiculari altitudine comprimentis liquoris; nequaquam vero ex ipsius quantitate: ideoque, in omnibus a me circa hoc argumentum

† *Supra, pag.* 326.

mentum scriptis, apprime cavi ne ullam aut capacitatis follis, aut molis hydrargiri rationem haberem: quodque contrarium astruere videatur Clariss. BERNOULLIUS, festinationi potius quam ignorantiæ adscribendum est. Num. XXXII.

No. XXXIII.

JACOBI BERNOULLI
APPENDIX TERTIA
AD EXAMEN PERPETUI MOBILIS,
Qua
ad Meletemata DIONYSII PAPINI *mense Junio hujus Anni publicata respondetur.*

CLarissimus Vir in istis *Meletematis* duo sibi præstituta habet; unum, ut ostendat me frustra impugnasse Machinam; alterum, ut suam refutationem genuinam esse probet: at quantum in utroque præstiterit, mox palam me facturum spero: non quod huic labori non parcere maluissem, si existimassem de sola detecti erroris gloria inter nos disceptari, ut pote quam Excel. PAPINO, siquis attribuere volet, ego certe non invideo: sed quia sentio, agi hic præcipue de quantitate virium controverversæ Machinæ, de qua erudiri publico pluris interest, & in qua æstimanda non leviter dissentimus, necessarium esse duxi, Lectorem de rei veritate uberius paulo instruere. *Acta Erud. Lips. 1688. Nov. pag. 591.*

I. Dicit me frustra impugnare Machinam; circumstantiam enim vectium, e qua Machinæ defectum deduco, ei non essentialem esse, levique negotio sic immutari posse, ut nulla amplius vectis habeatur ratio. Hoc vero mihi tantundem videtur esse, ac si

Num. XXXIII. quempiam, qui, ex natura vectis, ostenderet potentiam bilibrem vecti applicatam pondus unius libræ, sed triplo ab axe remotius, movere non posse, culpare vellet, propterea quod eadem potentia eidem ponderi citra vectem sic applicari possit, ut sequatur motus. Etenim, si vel maxime verum esset, quod factu, quam innuit, mutatione Machinæ, obtineretur motus optatus; non tamen inde colligi posset, considerationem vectis in ea dispositione Machinæ, quam proposuit Auctor, quamque solam refutandam susceperam, minus essentialem esse. Largior quod absque vecte follis possit esse follis; at quod tum cum folli vectis inest, ejus vires, seposita vectis consideratione, calculo æstimari & subduci possint, sicuti possunt non attendendo ad materiam vel colorem alarum, aliave ejusmodi accidentia, id vero nemini facile persuadebit. Sed deinde, quod rei caput est, si quicquam adversus me efficere voluisset Clarissimus Vir, non acquiescere debuisset nova sua Machinæ fabrica; sed insuper ostendere, quod per eam salvetur motus perpetuus ex meis principiis; quod quia non fecit (neque sane facere potuit) apparet eum calculi mei rationem, vel non attendisse, vel dissimulasse: quippe si Machinæ sic dispositæ vires, juxta hunc calculum, examinare sustinuisset; facile animadvertisset, eam non majori quam antea usui futuram, tametsi nunc vectis ratio in illa cesset. Imo si inspiciatur ejus iconismus, vel absque novo calculo liquere potest, quod vires, quas habet follis, cujus alæ ABC & DE [*Fig.* 1.] parallelo motu feruntur, non aliæ sint, quam quas idem haberet, si parallelogramma EB, EC, in alas conversa, & circa firmum axem AE rotabilia conciperentur. Nam primo series filamentorum mercurialium & atmosphæricorum in alas agentium, in utraque Machinæ dispositione, eædem manent; tum vero latitudines inæquales alarum prioris dispositionis, proportionales sunt inæqualibus distantiis ab axe vectium, in posteriore; sicut e converso etiam æquales alarum latitudines posterioris dispositionis; proportionales censeri possunt distantiis ab axe vectium prioris; quandoquidem hæ distantiæ in motu parallelo alarum, ceu vectium, ubi axis velut infinite distans concipitur, itidem æquales habentur. Itaque, cum

vires

vires harum machinarum æſtimari debeant ex rationibus ponderum filamentorum, latitudinum alarum, & diſtantiarum ab axe; ſequitur omnino illas, in utraque Machinæ diſpoſitione, eaſdem eſſe; adeoque quod de una demonſtratum eſt, id perinde quoque valere de altera. Demonſtravi in ſuperioris anni *Actis* *, quod omnes ejuſmodi folles, qui alas habent circum axem rotatiles, inque vertice adjunctum tubum, ad centrum uſque gravitatis deſcendentem, ſiphones referant crurum æqualium; quare idem quoque ſentiendum de ea follium diſpoſitione, qua alæ parallelo motu moventur, hoc eſt, circa axem infinite diſtantem rotari concipiuntur †: unde ſponte tandem fluit, quod in iſta ſtructura *Papiniana*, ubi coaptatus tubus HA non deſcendit ad mediam profunditatem F, nedum ad centrum gravitatis, preſſio intra follem externæ preſſioni multum prævalere debeat; ſicque efficere, ut follis dilatetur, non conſtringatur; quod ex meis principiis oſtendendum erat. Qua inſuper occaſione non poſſum non denuo conqueri de ſiniſtro ſenſu, in quem verba mea rapuit Clariſſimus PAPINUS; quaſi exiſtimem, axem motus ipſi centro gravitatis machinæ affigendum eſſe, ad expectandam rotationis viciſſitudinem: quod enim axem motus in vicinia hujus centri collocatum ſuppoſuerim, id ideo factum, ut Inventori Machinæ (quem, uti mox explicatius oſtendam, plus juvat ut propius, quam ut remotius ab illo ſtatuatur) tanto plus largirer, eoque ipſo docerem, quod ſi perpetuus motus non ſuccedat, cum axis Machinæ prope gravitatis centrum aſſumitur, is adhuc multo minus ſucceſſurus ſit, ubi longius ab illo removetur. Ut præteream, & hoc falſum eſſe, quod nequeat axis motus in eadem altitudine cum centro gravitatis ita collocari, ut pars una alteri præponderet: ſi enim alterutri alæ ad latus dicti centri, applicetur; nunquid movebitur erecta Machina, cum totum ejus pondus tunc ſit ad unam partem, & nihil ad alteram?

Num. XXXIII.

* Supra pag. 324.

† Eadem enim remanet Theorematis Demonſtratio, quæ in Annot. ad pag. 324. habetur, ſive AD finita, ſive infinita ponatur. Infinita autem reſpondet caſui alarum motu parallelo latarum.

Num. XXXIII. Sed denique nec hoc tacendum est, Clarissimum PAPINUM, nova sua Machinæ fabrica, vel eo quoque nomine nihil contra me proficere, quod existimet, alas ejus parallello motu latum iri. Quis enim, obsecro, non videt, quod alæ istæ, tametsi solutæ sunt & nullo vinculo sibi inhærent, non possint tamen ita ferri, nisi ambabus extremitatibus æqualiter premantur? Sed ipso asserente PAPINO, premuntur inæqualiter; in partibus scilicet infimis fortius ab incluso mercurio, quam ab externo aere, & in supremis ab hoc fortius, quam ab illo: unde, sive omnes pressiones ab intra omnibus ab extra simul sumptis prævaleant, sive hæ illis, semper id efficietur potius, ut dum alæ infra magis distenduntur, supra propius ad se invicem accedant, donec in ipso vertice coeant; & sic sponte rationem vectium induant, quam tamen hac fabrica evitare studuit Clarissimus Vir. Quare dum tela mea, ut vocat, in vectium hypothesi metuenda esse agnoscit; eo ipso & contra hanc suam structuram eadem non minoris efficaciæ esse fatetur.

II. Atque ita Responsionem meam *Papinianis* telis frustra impetitam, satis quidem me defendisse auguror. Sed quid si nunc eadem in Auctorem retorqueam, & Sole clarius ostendam illius calculo controversæ Machinæ jugulum ita peti, ut, in quacunque dispositione, ad ictum hunc declinandum levissima immutatione indigeat? Utique fatebitur Clarissimus Vir, non me, sed se præpropere & festinanter egisse. Existimat, in Machina quadraginta digitorum quomodocunque disposita, seu pyramidali, seu prismatica, & sive basis sursum spectet, sive deorsum, vires inclusi mercurii perpetuo easdem esse, & pressioni uniformi viginti digitorum, ceu dimidiæ altitudinis æquipollere. Spectet igitur primo sursum erectæ Machinæ basis; atque intelligatur axis motus applicari intermedio quodam loco inter centrum gravitatis & dimidiam altitudinem, puta circa decimum sextum a base digitum, vasculum vero duobus infra axem digitis statui; qua ratione tubus ad summitatem Machinæ pertingens altitudinem habebit octodecim digitorum; quibus ex viginti septem detractis, relinquuntur novem digiti, pro quantitate pressionis quam atmosphæra per tubum

bum in interiora follis exerit; cumque inclusus mercurius, secundum PAPINI æstimationem, æquivaleat viginti digitorum pressioni; fiet, additis novem ad viginti, totalis pressio viginti novem digitorum, prævalebitque externæ, quæ tantum est digitorum viginti septem; idcirco dilatabitur follis, reliquaque ex voto Inventoris succedere debebunt. Spectet deinde basis Machinæ deorsum; iterumque axis motus inter machinæ medium & centrum gravitatis statuatur; hoc est, in isto situ, circa vigesimum quartum a vertice digitum; vasculum autem duobus supra hunc axem digitis, sic ut viginti duobus adhuc a vertice distet; quo pacto, quinque tantum atmosphæræ digiti intra follem prement, qui, juncti viginti illis a mercurio incluso profectis, efficiunt totalem pressionem viginti quinque digitis, minorem externa pressione viginti septem digitorum. Unde nunc contraria ratione constringetur follis, quo constricto cætera iterum optatum successum ex mente Inventoris, ut prius, consequentur. Quæ cuivis attendenti manifesta sunt ex eo quod, in utroque machinæ situ, centrum gravitatis, respectu axis rotationis, ad eam partem reperitur, ad quam post dilatationem aut constrictionem alarum præponderare ac deprimi debet Machina, ut obtineatur rotationis vicissitudo; quod utique depressionem hanc, & exinde motus perpetuitatem certo secuturam argueret. Unde apparet, quam largus virium hujus Machinæ æstimator fuerit Clarissimus Vir; e cujus calculo id futurum sequeretur, cujus impossibilitas hodie, a maxime eximiis Mathematicis, tantum non pro principio assumi solet.

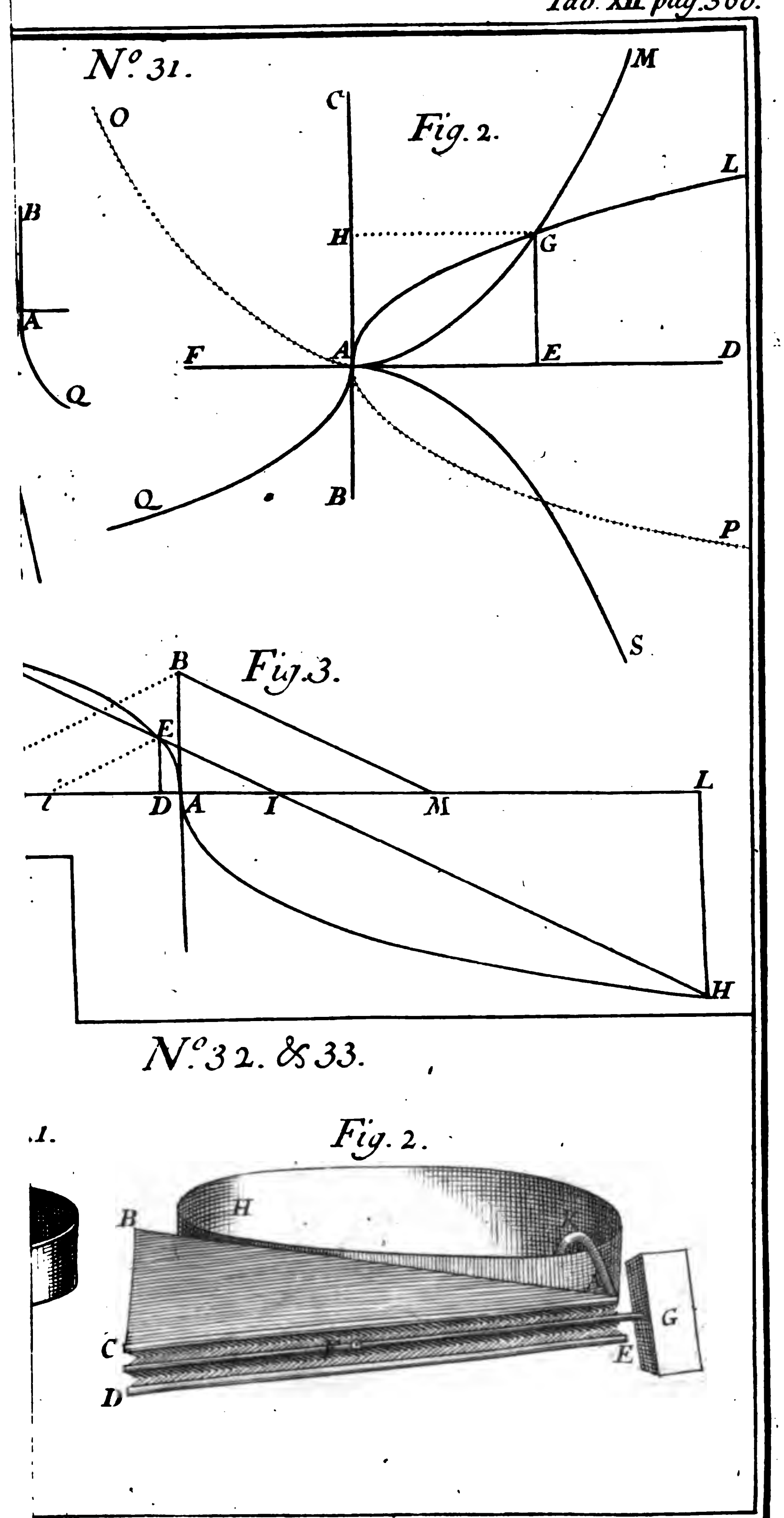
Num. XXXIII.

Quibus allatis rationibus, Clarissimo Adversario omnino satisfactum iri spero. Quod si tamen iis locum dare adhuc dum detrectet; agedum experimentis litem nostram terminemus. Quæstio inter nos agitata uno verbo huc redit; An, in æstimandis viribus controversæ Machinæ, solius altitudinis mercurii; an etiam latitudinis alarum, & vectis ratio haberi debeat? Si sola mercurii altitudo spectanda sit, ut arbitratur Clarissimus Vir; tunc vires ejus in eadem altitudine perpetuo eædem erunt, & pressionem columnæ uniformis altitudinis exæquabunt, sive machina pyramidalis, sive prismaticæ sit figuræ, & sive basis sursum,

Num. XXXIII. sive deorsum respiciat. At si præterea etiam consideratio vectis; & latitudinis alarum, in censum venire debeat, ut quidem ego sentio; tunc vires istæ æquivalebunt pressioni columnæ tantæ longitudinis, quanta est centri gravitatis machinæ ab ejus summitate distantia; adeoque pressioni nunc majori, nunc minori, prout follis hujus, vel illius est figuræ, basinque suam, vel deorsum, vel sursum obvertit. Itaque si folli cuicunque in summitate applicetur tubus descendens ad ejus medium usque; is, juxta Dn. PAPINUM, nec dilatabitur, nec constringetur, sed in perfecto erit æquilibrio cum tubo: juxta me, dilatabitur, si basis deorsum spectet; constringetur, si sursum. Rursus, si tubus inter centrum gravitatis & medium follis terminetur; tunc, juxta Clarissimum Virum, base sursum spectante, follis dilatabitur; secundum me, constringetur: at base deorsum versa, juxta illum, constringetur; & juxta me, dilatabitur.

Quæ cum, in folle etiam minimo & vix decem, duodecimve excedente digitos, locum invenire debeant; idcirco rei veritatem, exiguo sumptu & labore, experiri licebit: præsertim, si id sibi negotii præscribat Celeberrimus PAPINUS, cujus dexteritas ac industria in experimentis instituendis jam dudum Orbi literato notissima est. Verbulum igitur deinceps hac de re non addam, quo usque Natura Judex, ad cujus nunc tribunal adversam partem provoco, pro alterutro nostrum sententiam dixerit; quam si sibi favituram autumet Illustris Adversarius, paratum inveniet; qui contra se, deposita, si velit, pecunia, contrarium tueatur.

N°. XXXIV.


N°. 31.
Fig. 2.
O
C
M
L
H
G
B
A
F
A
E
D
Q
Q
B
P
S
Fig. 3.
B
E
l
D
A
I
M
L
H
N°. 32. & 33.
.1.
Fig. 2.
H
B
G
C
E
D

N°. XXXIV.

POSITIONES MATHEMATICÆ DE RATIONIBUS ET PROPORTIONIBUS,

Sub Præsidio

JACOBI BERNOULLI
Mathematatum Professoris Publici,

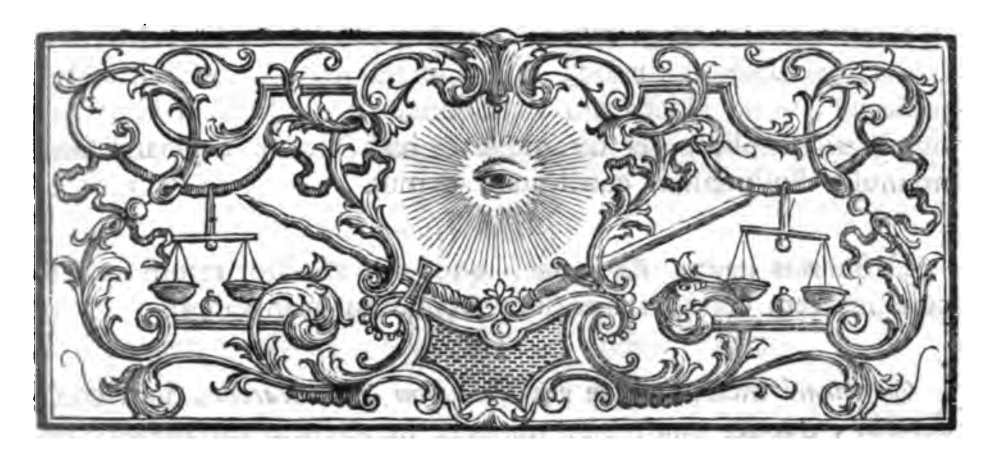
Ad diem 5. Octobris M. DC. LXXXVIII.

Ad disputandum propositæ.

Editæ primum

BASILEÆ,

1688.



POSITIONES MATHEMATICÆ DE RATIONIBUS ET PROPORTIONIBUS.

I.



D quod hac vice tractandum suscepimus, EUCLIDI Λόγος; Latine *Ratio*, dicitur; vel quod in percipiendis rerum rationibus præcipua Rationis vis appareat, vel quod in rebus ipsis Ratio vix quicquam aliud cognoscat, quam rationes & relationes quasdam, quas inter se habent. Num. XXXIV.

II.

Hoc ipsum præ cæteris in Mathesi perspicuum est: ubi nullius ei quantitatem absolutam, seu, quanta sit in se, cognoscimus;

Num. XXXIV. ſed ſolummodo quam magna, vel quam parva ſit relative ad alias, inveſtigamus: unde, non ſine ratione quis a nobis factum judicabit, quod Doctrinam Rationum, quæ relationes iſtas magnitudinum explicat, & utramque in hac Scientia paginam facit, nonnullis Poſitionibus enucleatam demus.

III.

Definimus itaque *Rationem*, quod ſit affectio rerum qua ſecum invicem comparari poſſunt ſecundum quantitatem.

IV.

Comparari dicuntur duæ res *ſecundum quantitatem*, dum conſideratur, quoties una major minorve ſit altera; ſeu quoties una alteram contineat, vel in eadem contineatur.

V.

Illa vero, quæ hoc pacto inter ſe comparantur, ſunt tum *Numeri*, tum *Res numeratæ*; interque has primario *Magnitudines*; ſecundario etiam alia, quæ ex magnitudinibus cognitis, quibuſcum relationem quandam habent, æſtimantur; ut *Pondera*, *Tempora*, *Celeritates*, *Vires*, *Soni*, *Divitiæ*, *Sortes Aleatorum*, &c.

VI.

Unus enim Motus altero tanto celerior tardiorve dicitur; ut & Sonus unus alio Sono tanto gravior vel acutior; quanto linearum eodem tempore decurſarum, vel chordarum ſonos hos edentium, una altera longior, breviorque exiſtit.

VII.

Cætera quæ, vel cum nullis, vel cum incognitis magnitudinibus relationem habent, accurate comparari, ac proinde cognoſci non poſſunt; qualia ſunt, *Eruditio*, *Prudentia*, *Facundia*, *Pulchritudo*, *Agilitas*, *Colores*, *Sapores*, *Odores*, &c.

VIII.

Quanquam enim ſciamus, Hominem homine doctiorem, vel pulchriorem, Roſam roſa fragrantiorem, & Cibum cibo ſuaviorem eſſe, ſi quidem ſat magna inter utrumque diſparitas intercedat;

cedat; attamen quanto unum altero his qualitatibus antecellat, ignoramus. Idem fere dicendum de qualitatibus tactilibus, *Calore*, *Frigore*, *Humiditate*, *Siccitate*; ut maxime earum gradus, ope Thermometri & Hygrometri, quodammodo metiri didicerimus. Num. XXXIV.

IX.

Numeri quamcunque rationem exprimentes, ejus *Termini* vocantur; quorum is qui ad alium refertur, *Antecedens*, Ἡγούμενος; & is ad quem refertur, *Consequens*, Ἑπόμενος, dicitur.

X.

Si termini sunt æquales, *Ratio æqualitatis*, Λόγος Ἰσότητος; si inæquales, *Inæqualitatis*: *Majoris* quidem, Πρόλογος, cum major terminus minoris est antecedens; at *Minoris*, Ὑπόλογος, cum ejusdem est consequens. Sic 5 ad 5, 6 ad 6, rationem habet æqualitatis; 3 ad 2 inæqualitatis majoris; 5 ad 6, minoris.

XI.

Si duarum rationum iisdem terminis constantium una est majoris, altera minoris inæqualitatis, altera alterius *Reciproca* dicitur: Sic ratio 3 ad 2 reciproca est rationis 2 ad 3, & hæc illius.

XII.

Ratio æqualitatis est singularis & individua. Inæqualitatis Ratio est *Simplex*, vel *Multiplex*, & hæc, vel præcise, vel non præcise talis.

XIII.

Si major terminus minorem semel tantum continet, & præterea unam ejus partem aliquotam; ratio est *Simplex Superparticularis*, Λόγος Ἐπιμόριος; sin plures partes aliquotas, ratio *Simplex Superpartiens*, Λόγος Ἐπιμερής.

XIV.

Si major terminus minorem aliquoties exacte continet; ratio est, *Multiplex*, Πολλαπλάσιος: si vero insuper unam ejus partem, est *Multiplex Superparticularis* Πολλαπλασιεπιμόριος; si plures, *Multiplex Superpartiens*, Πολλαπλασιεπιμερής.

 XV. Omnes

Num. XXXIV.

X V.

Omnes rationes, numero quidem explicabiles, ad unam harum ſpecierum referri poſſunt; ad quam autem quælibet referri debeat, palam facit ejus *Exponens*, qui eſt quotus reſultans ex diviſione majoris termini per minorem.

X V I.

Numerus integer hujus exponentis, ſi eſt unitas, indigitat *rationem ſimplicem*: ſi quis multitudinis numerus, *multiplicem*; puta *duplam*, ſi binarius; *triplam*, ſi ternarius; *decuplam*, ſi denarius: & ſi qua exponenti fractio adhæret, ea denotat rationem eſſe vel *Superparticularem*, vel *Superpartientem*: Superparticularem, cum fractionis numerator eſt unitas; Superpartientem, cum eſt numerus aliquis multitudinis.

X V I I.

Superparticularis ratio ſpecialem ſuam nomenclationem accipit a denominatore fractionis, præfixa vocula *ſeſqui*; ut *ſeſqui-altera*, *ſeſqui-tertia*, *ſeſqui-quarta*, &c. Superpartiens ab utroque fractionis termino, ut *Superpartiens duas tertias*, *tres quartas*, &c. quæ & ita efferuntur, *Superbipartiens tertias*, *Supertripartiens quartas*, &c.

XVIII.

Exemplis res fiet clarior. Ratio 6 ad 3, vocatur *dupla*, quia $6:3=2$. Ratio 12 ad 4, *tripla*, quia $12:4=3$. Ratio 3 ad 2, *ſeſqui-altera*, quia $3:2=1\frac{1}{2}$. Ratio 5 ad 4, *ſeſquiquarta*, quia $5:4=1\frac{1}{4}$. Ratio 19 ad 7, *dupla ſuperquintupartiens ſeptimas*, quia $19:7=2\frac{5}{7}$.

X I X.

Si fractio exponenti adhærens numeris compoſitis conſtet, quod fit quotieſcunque ipſi rationum termini inter ſe compoſiti fuerint; tunc prius reducenda eſt ad terminos ſimpliciſſimos: alias ratio videri poſſet ſuperpartiens, quæ non niſi eſt ſuperparticularis: ſic ratio 6 ad 4, non dicenda eſt ſuperbipartiens quartas, ut maxime $6:4=1\frac{2}{4}$; ſed ſeſqui-altera, quia $\frac{2}{4}$ æquipollent $\frac{1}{2}$.

XX. Ratio-

XX.

Rationes minoris inæqualitatis eodem pacto exprimuntur, quo earum reciprocæ, præmissa, discriminis ergo, syllaba *Sub*: ut *Ratio* 3 ad 6 est *subdupla*: 4 ad 12 *subtripla*: 2 ad 3 *subsesquialtera*: 4 ad 5 *subsesquiquarta*: 7 ad 19, *subdupla subsuperquintupartiens septimas*. Num. XXXIV.

XXI.

Sciendum tamen, barbara ista Veterum vocabula obsoleta fere nunc esse, & modernos Mathematicos rationem quamlibet frequentius ipsis terminis innuere: Malunt enim ex. gr. dicere, circumferentiam Circuli ad diametrum se habere in ratione 22 ad 7, aut 223 ad 71, quam in ratione tripla sesquiseptima, vel tripla superdecupartiente septuagesimas primas.

XXII.

Si duæ Rationes inæquales comparantur invicem; illa dicitur *Major*, cujus antecedens sæpius continet suum consequentem, vel majorem consequentis partem: Idcirco Ratio majoris inæqualitatis major est quavis Ratione minoris inæqualitatis: duarum vero Rationum majoris inæqualitatis, illa major est, quæ majorem sortitur exponentem; at duarum minoris inæqualitatis illa major, quæ minorem.

XXIII.

Hinc inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem habet rationem, quam minor: sed eadem ad minorem majorem rationem habet, quam ad majorem. Ex. gr. 8 ad 3 majorem habet rationem, quam 7 ad 3: Contra 3 ad 7 majorem habet rationem, quam 3 ad 8.

XXIV.

Si rationes æquales invicem comparantur, existit *Proportio*, quæ proinde nihil aliud est, quam rationum æqualitas, & denotatur ita ::, ut A. B :: C. D; quo significatur, A ad B eandem habere rationem, quam habet C ad D; seu quantitates A, B, C, D proportionales esse.

Num. XXXIV.

XXV.

De Proportionalibus hæc capiantur Theoremata: Si termini rationis cujuscunque, per communem aliquem numerum, seu multiplicentur, seu dividantur; habebunt producti, vel quoti, eandem cum illis rationem. Sic 6 ad 4 eandem habet rationem, quam bis 6 ad bis 4, ter 6 ad ter 4, dimidium 6 ad dimidium 4, &c.

XXVI.

Quatuor proportionalium prima ducta in ultimam, idem efficit, atque secunda in tertiam; quæ proprietas Regulæ Aureæ fundamentum existit.

XXVII.

Si totum ad totum, ut ablatum ad ablatum; erit etiam reliquum ad reliquum, ut totum ad totum: hoc est, Si A. B:: C. D. erit etiam A — C. B — D:: A. B.

XXVIII.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint A. B:: C. D:: E. F:: G. H, &c. erit ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes simul ad omnes consequentes, id est, erit A. B:: A + C + E + G. B + D + F + H.

XXIX.

Si A. B:: C. D, erit *invertendo* B. A:: D. C; *permutando* A. C:: B. D; *componendo* A + B. B:: C + D. D; *dividendo* A — B. B:: C — D. D; *convertendo* A. A — B:: C. C — D; *sumendo antecedentium dupla* 2 A. B:: 2 C. D.

XXX.

Si quotcunque magnitudines A. B. C. D. fuerint ab una parte, totidemque ab altera E. F. G. H; sitque A. B:: E. F, & B. C:: F. G, & C. D:: G. H, erit *ex æquo ordinate* A. D:: E. H. Sin vero A. B:: G. H, & B. C:: F. G, & C. D:: E. F, erit *ex æqualitate perturbata* A. D:: E. H.

Atque hi, præter nonnullos alios, sunt modi illi argumentandi, quos Geometræ, in Propositionum maxime perplexarum demonstra-

monstrationibus, ingeniose admodum & magno legentium emolumento adhibent.

Num. XXXIV.

XXXI.

Si duæ Rationes sint æquales, & consequens primæ conveniat cum antecedente secundæ, *Proportio continua* dicitur. Hæc, si per terminos plures continuetur, *Progressio* vocatur; quæ vel *Ascendens* est, si ratio per quam progreditur, est minoris inæqualitatis, ut 1. 3. 9. 27. &c. vel *Descendens*, si majoris, ut 8. 4. 2. 1.

XXXII.

Omnis Progressio continuari potest per infinitos terminos: descendendo tamen, nulla potest per terminos integros continuari; ascendendo potest, si ratio per quam continuatur, sit exacte multiplex.

XXXIII.

Dato primo, secundo, & ultimo Progressionis cujuscunque termino, Summa omnium ita invenitur: Primus terminus ducatur in differentiam primi & ultimi; Productum dividatur per differentiam primi & secundi; Quoto addatur ultimus, & habebitur Progressionis Summa.

XXXIV.

Quoniam in Progressione descendente infinitorum terminorum, postremus terminus perpetuo o est; idcirco duntaxat quadratum primi per differentiam primi & secundi dividendum: Quæ insuper differentia si sit unitas; ipsum statim quadratum primi Summam prodit.

XXXV.

Patet hinc, qua ratione infinitæ numero magnitudines finitam summam constituere possunt; quod ignaris forte mirum videbitur, quanquam sit verissimum. Ita, si quis facturus iter 100 milliarium, primo die conficeret milliaria 10, secundo 9, tertio $8\frac{1}{10}$, & sic, quolibet sequentium dierum, itineris præcedentis diei $\frac{9}{10}$ partes, ac per totam æternitatem iter faceret, nunquam 100 milliaria absolveret.

XXXVI. Si

Num. XXXIV.

XXXVI.

Si quotcunque rationes proponantur, productum omnium antecedentium ad productum omnium consequentium habere dicitur *Rationem compositam* ex rationibus propositis.

XXXVII.

Hinc datis quotcunque magnitudinibus, Ratio primæ ad ultimam *composita* censetur ex Ratione primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, & sic porro usque ad ultimam.

XXXVIII.

Omnia Triangula, Parallelogramma, Pyramides, Prismata, Coni, Cylindri, rationem habent ex rationibus basium & altitudinum compositam.

XXXIX.

Si duæ rationes æquales componantur; Composita, alterutrius componentium *Duplicata* dicitur; si tres, *Triplicata*; si quatuor, *Quadruplicata*; & vicissim una componentium, compositæ *subduplicata*, *subtriplicata*, *subquadruplicata*. E quibus patet immane discrimen esse inter Rationem duplam & duplicatam, Λόγον διπλάσιον, καὶ διπλασίονα; adeoque perperam a nonnullis, quos inter MEIBOMIUS in *Dial. de Proportionibus*, confundi.

X L.

Infertur hinc, Quadrata habere rationem duplicatam, Cubos triplicatam laterum suorum. Et si quantitates aliquot continue proportionales sint, Rationem primæ ad tertiam esse duplicatam, primæ ad quartam triplicatam, primæ ad quintam quadruplicatam rationis ejus, quam prima habet ad secundam.

X L I.

Similes superficies duplicatam, similia solida triplicatam habent rationem laterum homologorum. Intellige hæc etiam de Circulis ac Sphæris.

XLII. Cæte-

XLII.

Num. XXXIV.

Cæterum animadvertimus, ARCHIMEDEM, *Lib. 2. De phara & Cyl. Prop. 9.* ipsas rationes compositas denuo inter : comparare, dum Rationem triplicatam rationis alicujus ejus-em duplicatæ *sesquialteram* * vocat, unde Ratio quasi *decomposita* exsurgit.

XLIII.

Si ratio quæcunque addita rationi æqualitatis componat ali-uam; Composita non differt a Componente. Hinc est, quod Triangula, Parallelogramma, Pyramides, Prismata, Coni, Cy-indri, & quæcunque Figuræ ex rationibus basium & altitudinum omponuntur, in basibus æqualibus se habeant ut altitudines, & ı altitudinibus æqualibus, ut bases. Item, quod momenta pon-lerum æqualium se habeant ut distantiæ ab axe motus; & vice ersa momenta æqualiter distantium, ut pondera.

XLIV.

Si duæ rationes reciprocæ componantur; exsurgit ratio æquali-atis: Hinc recensitæ figuræ sunt æquales, quotiescunque ipsarum ases & altitudines reciprocantur; & momenta sunt æqualia, uotiescunque pondera se habent in ratione reciproca distantiarum.

XLV.

Explicata Rationum doctrina; verbo adhuc indicandum est, uænam sint illa, quæ inter se rationem habere possunt, vel non ossunt. Rationem non suscipiunt heterogenea; sic Pondus ad Tempus, Sonus ad Colorem, Linea ad Superficiem, rationem ıullam habet. Nihilominus, quia, in Arithmetica Infinitorum, inea, ut pars infinitesima corporis concipitur; potest ejus ad su-erficiem *Ratio* dici *infinite exigua*.

XLVI.

Finitum quoque ad infinitum, licet homogeneum, linea fini-a ad infinitam, rationem nullam, vel, si dicere mavis, infinite xiguam habet.

* Recentiores *Sesquiplicatam* dicere malunt.

Num. XXXIV.

XLVII.

Magnitudines homogeneæ finitæ ſunt, vel Rationales, ῥηταὶ, quæ numero integro, fracto, aut miſto exprimi poſſunt, vel Irrationales, ἄλογαι; quæ non poſſunt. (Obiter notamus URSTISIUM, qui Cap. 3. Arith. miſtos numeros abſurde ſurdis accenſet.) Omnes magnitudines rationales; quia ſunt commenſurabiles, hoc eſt, quia menſuram aliquam communem admittunt, rationem habent numero explicabilem. Inter rationalem & irrationalem contra, quamvis ratio ſit, hæc tamen, ob aſymmetriam earum, numero explicari nequit. Sic Ratio inter latus quadrati & diagonium ejus, vel inter 1 & $\sqrt{2}$, nullo numero exprimi poteſt. Inter duas irrationales ratio plerumque quidem numero eſt inexplicabilis, velut inter $\sqrt{2}$ & $\sqrt{7}$: quandoque tamen numero comprehendi poteſt, ſic $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{8}$ rationem habet exacte ſubduplam, eam videlicet quam habet 1 ad 2.

XLVIII.

Quin etiam nulla datur earum, quæ numero exprimi poſſunt, quæ non etiam in irrationabilibus locum inveniat: & hoc omnium forte in Geometria admirabiliſſimum, quod dentur tales quantitates; quæ, ſeorſim quidem acceptæ, nullo numero intelligibili exprimuntur, inter ſe tamen collatæ rationem habent exacte cognitam & numero determinatam.

XLIX.

Imo, ipſi quoque infinito hæc quodammodo accommodari poſſunt. Quemadmodum enim rationale ad irrationale nullam habere poteſt rationem numero determinabilem; poteſt tamen unum irrationale ad aliud irrationale: Sic quamvis finitum inter & infinitum nulla ratio ſit; ea tamen inter duo infinita obtinere poteſt: quandoquidem unum infinitum alterius infiniti concipere poſſum duplum, triplum, decuplum, centuplum, millecuplum, infinitecuplum, infinities infinitecuplum. Finge Cubo ad latus meridionale apponi alium æqualem Cubum, huic alium, huic iterum alium, & alium ſine fine; qua ratione naſcetur Parallelepi-

epipedum oblongum, quod bis, ter, quater, & tandem infinities majus fiet Cubo proposito: Huic, a plaga meridionali interminato, versus orientem adjice secundum, tertium, quartum, usque ad infinitum: quod inde conflabitur ab ortu & meridie interminatum corpus, infinities superabit Parallelepipedum; adeoque infinities infinitis vicibus Cubum. Idem præsta versus occidentem, & producetur corpus bis infinities infinitecuplo majus Cubo; cui si ex parte septentrionali simile adjeceris, habebis discum versus omnes horizontis plagas infinite extensum, qui Cubum quater infinities infinitis vicibus superabit. Huic disco si infinitos alios æque crassos substernas, totidemque superstruas, corpus habebis, quod omne conceptibile spatium replebit, eritque octies infinities - infinities - infinities majus Cubo. Deinde quia hedra est pars infinitesima Cubi; & Cubi latus pars infinitesima hedræ; & punctum lateris: Idcirco immensa illa moles, quæ Cubum octies inf. inf. infinities vicibus superat, superabit punctum 8 inf. inf. inf. inf. inf. infinitis vicibus. Sic ut secundum hunc conceptum, dicendum quod Corpus in omnes mundi plagas conceptibiles infinite extensum habeat ad atomum rationem octies inf. inf. inf. inf. infinities infinitecuplam. Num. XXXIV.

L.

Quanquam vero isthæc insanientium deliriis non absimilia plerisque videbuntur; nihilominus vix aliter se exprimere poterit sana mens, quæ, secundum conceptus a Deo sibi inditos, loqui volet. Fateor multis contradictionibus involuta esse; forte propterea, quia finito intellectui infiniti comprehensio impossibilis; forte etiam, quia nihil est, nec esse potest, extra mentem nostram, quod his conceptibus respondeat. Deus solus est is, quem scimus & actu esse, & infinitum esse, ad quem cætera omnia, quantacunque sunt, ne umbram quidem rationis habent. In hujus cognitione summa Sapientia, in fruitione summa Salus. Hoc qui potitur, habet omnia; etiamsi nihil haberet: qui caret, nihil habet; tametsi infinitorum mundorum opes possideret.

N°. XXXV.

POSITIONES ARITHMETICÆ
DE
SERIEBUS
INFINITIS,
Earumque
SUMMA FINITA.

Quas

Auctore Præside

JACOBO BERNOULLI Math. Pr. P.

defendit

JOH. JAC. FRITZIUS, Basil.

Ad diem 7. Junii M. DC. LXXXIX.

Editæ primum

BASILEÆ,

1689.

AD DN. RESPONDENTEM
PRÆSES.

Ut non finitam ſeriem finita coercet
  Summula, & in nullo limite limes adeſt:
Sic modico immenſi veſtigia Numinis hærent
  Corpore, & anguſto limite limes abeſt.
Cernere in immenſo parvum, dic, quanta voluptas!
  In parvo immenſum cernere, quanta, Deum!



POSITIONES ARITHMETICÆ DE SERIEBUS INFINITIS.

PRÆFATIO.



UM non ita pridem in Serierum Infinitarum *speculationem incidissem, prima cujus summa, post geometricam Progressionem ab aliis jam tractatam, mihi sese offerebat, erat Series fractionum, quarum denominatores geometrica, numeratores arithmetica progressione crescunt: quod cum Fratri indicassem, non tantum mox idem adinvenit ille, sed & praterea nova cujusdam ractionum Seriei, cujus denominatores Trigonalium, ut vocantur, umerorum dupli erant, summam pervestigavit; quam vero & ipse, cum*

cum significasset, postridie detexi; propositis ei vicissim aliis nonnullis, quæ interea, ut clavus clavum trudere solet, occasione hac repereram. Quibus inventis certatim alter alterum sic exercuimus, ut paucorum dierum spatio non tantum serierum illarum, quas Celeb. LEIBNITIUS *in* Actis Erud. Lipſ. Anno 1682. M. Febr. *&* 1683. M. Octob. *recenset, nosque paulo antea mirati fuimus, summas dare possemus, sed & plura alia, eaque non contemnenda, ex gemino duntaxat fundamento invenerimus, quorum unum consistit in resolutione Seriei in alias infinitas Series, alterum in subductione Seriei, uno alterove termino mutilatæ, a seipsa integra. Horum vero præcipua [cum eorum nihil apud hos, quos legi hactenus, publicatum viderim] enucleanda proponam, præmissis nonnullis, quæ passim apud alios quoque vulgata prostant, Propositionibus, ne illas aliunde petere opus esset. Cæterum quanta sit necessitatis pariter & utilitatis hæc Serierum contemplatio, ei sane ignotum esse non poterit, qui perspectum habuerit, ejusmodi Series sacram quasi esse anchoram, ad quam in maxime arduis & desperatæ solutionis Problematibus, ubi omnes alias humani ingenii vires naufragium passæ, velut ultimi remedii loco, confugiendum est.*

AXIO-

AXIOMATA
seu
POSTULATA.

I.



MNE quantum est divisibile in partes se minores. N. XXXV.

II.

Omni quantitate finita potest accipi major.

III.

Si quantitas quæpiam multata parte sui aliqua subtrahitur a seipsa integra, relinquitur illa pars.

PROPOSITIONES.

I.

Quod data quavis quantitate minus est, illud est non-quantum seu nihil.

Dem. Nam si quantum esset, dividi posset in partes se minores, per Axiom. 1. Non igitur esset data quavis quantitate minus, contra hypothesin.

II.

Quod data quavis quantitate majus est, infinitum est.

Nam si finitum esset, illo posset accipi quantitas major, per Ax. 2. Non igitur quavis data quantitate foret majus, contra hypothesin.

N.XXXV

III.

Omnis Progressio geometrica continuari potest per terminos infinitos.

Semper enim fieri potest: Ut primus terminus ad secundum, sic postremus ad sequentem, & sequens ad alium, & alium sine fine in infinitum; quorum quidem terminorum nullus æquari potest vel nihilo, vel infinito, cum secus ad illum præcedens eam rationem habere non posset, quam habet primus ad secundum, contra definitionem progressionis.

IV.

Si sit Progressio geometrica quæcunque A, B, C, D, E; *& alia arithmetica totidem terminorum* A, B, F, G, H, *incipiens ab iisdem terminis* A *&* B, *erunt reliquorum singuli in geometrica singulis ordine sibi respondentibus in arithmetica majores, tertius tertio, quartus quarto, ultimus ultimo, adeoque omnes omnibus.*

Quia enim $A:B=B:C=C:D=D:E$. erit per 25. 5. Eucl. tum $A+C > 2B =$ (ex nat. Progr. arith.) $A+F$; unde $C > F$: tum $A+D > B+C > B+F = A+G$; unde $D > G$: tum $A+E > B+D > B+G = A+H$; unde $E > H$. *Quæ erant demonstranda.*

V.

In Progressione geometrica crescente A, B, C, D, E, *perveniri tandem potest ad terminum* E *quovis dato* Z *majorem.*

Incipiat ab iisdem terminis Progressio arithm. A, B, F, G, H, continuata quousque ultimus H superet Z [id enim fieri posse claret,] tum vero continuetur geometrica per terminos totidem, eritque, per præced. postremus $E > H > Z$. Q. E. D.

Coroll. Hinc in Progr. geom. crescente infinitorum terminorum postremus terminus est ∞, per Prop. II. [∞ est Nota Infiniti.]

VI.

In Progress. geometrica decrescente A, B, C, D, E, *pervenitur tandem ad terminum* E *quovis dato* Z *minorem.*

Constituatur Progressio ascendens Z, Y, X, V, T, in ratione

B ad

B ad A, quousque ultimus terminus T superet A, [quod fieri N.XXXV
posse, per præced. constat;] tum continuetur altera descendendo per totidem terminos A, B, C, D, E; eritque ultimus $E <$ dato Z. Quia enim Progressiones A, B, C, D, E; & T, V, X, Y, Z, per eandem rationem A ad B progrediuntur, & terminos numero æquales habent, erit *ex æquo* $A : E = T : Z$. sed $A < T$, per constr. Ergo & $E < Z$. Q. E. D.

COROLL. Hinc in Progr. geomet. decrescente in infinitum continuata, ultimus terminus est o, per Prop. I.

VII.

In omni Progr. geom. A, B, C, D, E, *primus terminus est ad secundum, sicut summa omnium, excepto ultimo; ad summam omnium, excepto primo.* [$A : B = A + B + C + D : B + C + D + E$.]

Quia enim $A : B = B : C = C : D = D : E$. erit per 12. 5. EUCL. $A : B = A + B + C + D : B + C + D + E$. Q. E. D.

VIII.

Progressionis geom. cujuscunque A, B, C, D, E, *summam* S *invenire.*

Per præc. est $A : B = S - E : S - A$; quare convertendo $A : A \backsim B = S - E : A \backsim E$; unde $S - E = A \times (A \backsim E) : (A \backsim B)$, & $S = A \times (A \backsim E) : (A \backsim B) + E$. ($\backsim$ denotat differentiam duarum quantitatum, quibus interseritur, cum non definitur, penes utram sit excessus.)

COROLL. Si Progressio geometr. descendendo continuetur in infinitum, adeoque ultimus terminus per Coroll. VI. evanescat, erit summa omnium $Aq : (A - B)$; unde liquet, quo pacto infiniti etiam termini finitam summam constituere possunt.

IX.

Si Series infinita continue proportionalium A, B, C, D, E, *&c. decrescat in ratione* A *ad* B, *erunt summæ omnium terminorum, omnium demto primo, omnium demtis duobus primis, &c. etiam continue proportionales, & quidem in eadem ratione* A *ad* B.

 Quo-

N.XXXV Quoniam $A : B = B : C = C : D$, erit tum $Aq : Bq = Bq : Cq$; tum etiam $A : B = A - B : B - C = B - C : C - D$, quare dividendo rationes æquales per æquales, $\frac{Aq}{A - B} : \frac{Bq}{B - C} = \frac{Bq}{B - C} : \frac{Cq}{C - D}$, hoc eſt, per Cor. præced., Summa omnium ad omnes ſequentes primum, ut hi ad omnes ſequentes ſecundum. Q. E. D. Et proinde per 19. 5. EUCL. ſumma omnium ad omnes ſequentes primum, ut primus ad ſecundum. Q. E. D.

X.

Seriei infinitæ fractionum, $a : b$, $(a + c) : (b + d)$, $(a + 2c) : (b + 2d)$, $(a + 3c) : (b + 3d)$, &c. *quarum numeratores & denominatores creſcunt Progreſſione arithmet. ultimus terminus eſt fractio* $c : d$, *cujus numerator & denominator ſunt communes progreſſionum differentiæ.*

Ad hoc analytice inveſtigandum, conſideretur quæſitus terminus ut cognitus, & vocetur t; numerus vero termini ut quæſitus, & dicatur n; eritque ex generatione progreſſionis terminus optatus $t = (a + nc - c) : (b + nd - d)$, ideoque $n = 1 + (bt - a) : (c - dt)$, quod æquari debet infinito: & quia numerator hujus fractionis eſt finitus [nam infinitus eſſe non poteſt, alias t deberet eſſe $= \infty$; ideoque eſſet $c - dt$, ipſaque adeo fractio negativa quantitas, quod abſurdum,] oportet ut denominator ſit æqualis nihilo, ac proinde $c = dt$, & $t = c : d$. Q. E. D.

Brevius ita: Ex ſeriei geneſi patet, terminum infiniteſimum eſſe $(a + \infty c) : (b + \infty d) = \infty c : \infty d = c : d$. Q. E. D.

COROLL. Summa omnium terminorum, ſive ultimus primo major ſit, minorve, neceſſario infinita eſt; infiniti enim termini minori horum duorum æquales infinitam dant ſummam: Unde a fortiori, &c.

XI. *Fractio-*

XI.

Fractionis ad aliam ratio composita est ex ratione directa numeratorum & reciproca denominatorum.

Nam $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} : \frac{BC}{BD} :: AD : BC = A : C + D : B$, Q. E. D.

XII.

In serie fractionum, quarum numeratores crescunt Progressione arithmetica, denominatores geometrica, aut vice versa, ut A : F, (A + C) : G, (A + 2 C) : H, (A + 3 C) : I, *aut* F : A, G : (A + C), H : (A + 2 C), I : (A + 3 C); *Si* N *nomen ordinis ultimi termini ad unitatem majorem rationem habeat, quam* G *ad* G — F, *erit ille terminus ibi sequenti major, hic minor.*

1. *Hyp.* Quia $N : 1 > G : G - F$, erit convertendo $N : N - 1 < G : F$, & $CN : CN - C < G : F$. Ergo $(CN - C) \times G > CN \times F$; ergo fortius [ob $AG > AF$] $(A + NC - C) \times G > (A + CN) \times F$, hoc est, Numerator termini N in $G >$ Numeratore termini sequentis in F: Sed ita se habet terminus N ad terminum sequentem, per præced. Quare terminus N major sequenti, & ita deinceps ab illo omnes. Q. E. D.

2. *Hyp.* Inversis invertendis eodem modo demonstratur.

XIII.

Si infinita sint fractiones $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}, \frac{E}{F}, \frac{G}{H}, \frac{I}{L}, \frac{M}{N}, \frac{O}{P}$, *&c. quarum numeratores crescant progr. arithm. & denominatores geom. erit ultimus terminus* 0; *sin illi crescant geometr. hi arithm., erit ultimus* ∞.

1. *Hyp.* Si primus terminus secundo non sit major, continuari saltem poterit Progressio, quousque præcedens superet sequentem, per præced. Esto $G : H > I : L$, & sint infiniti continue proportionales G, I, Q, R, &c. unde propter H, L, N, P, continue proport. erunt & ipsæ fractiones $\frac{G}{H}, \frac{I}{L}, \frac{Q}{N}, \frac{R}{P}$ &c.

N.XXXV continue proport. quæ ob $G:H > I:L$, in nihilum tandem abeunt per Cor. VI. Quare cum $Q > M$, $R > O$, &c. per IV. multo magis $\frac{G}{H}$, $\frac{I}{L}$, $\frac{M}{N}$, $\frac{O}{P}$, &c. in nihilum abibunt. Q. E. D.

2. *Hyp.* Nisi primus secundo minor sit, continuetur progressio, quousque præcedens sequenti minor fiat, per præced. Esto $G:H < I:L$, & sint infiniti H, L, S, T, &c. contin. proport. unde propter G, I, M, O, &c. contin. proport. & ipsæ fractiones $\frac{G}{H}$, $\frac{I}{L}$, $\frac{M}{S}$, $\frac{O}{T}$, &c. proportionales erunt, quæ ob $G:H < I:L$ in infinitum desinunt per Cor. V. Quare cum $S > N$, $T > P$, &c. per IV. multo magis $\frac{G}{H}$, $\frac{I}{L}$, $\frac{M}{N}$, $\frac{O}{P}$, &c. in infinitum excrescent. Q. E. D.

XIV.

Invenire summam Seriei infinitæ fractionum, quarum denominatores crescunt progressione geometrica quacunque, numeratores vero progrediuntur, vel juxta numeros naturales 1, 2, 3, 4, *&c. vel trigonales* 1, 3, 6, 10, *&c. vel pyramidales* 1, 4, 10, 20, *&c. aut juxta quadratos* 1, 4, 9, 16, *&c. aut cubos* 1, 8, 27, 64, *&c. eorumve æquemultiplices.*

1. *Si Numeratores progrediuntur juxta numeros naturales:*

Summa invenitur, resolvendo seriem propositam A in alias infinitas series B, C, D, E, &c. quæ singulæ geometrice progrediuntur, quarumque summæ [si primam hic excipias] novam geometricam progressionem F constituunt per IX. cujus quidem, uti cæterarum, summa per Coroll. VIII. reperitur. En operationem:

A =

$$A = \frac{a}{b} + \frac{a+c}{bd} + \frac{a+2c}{bdd} + \frac{a+3c}{bd^3} \ \&c. = B + C + D + E + \&c.$$

$$B = \frac{a}{b} + \frac{a}{bd} + \frac{a}{bdd} + \frac{a}{bd^3} \ \&c. = \frac{ad}{bd-b}$$

$$C = \cdot + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \ \&c. = \frac{c}{bd-b}$$

$$D = \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \ \&c. = \frac{c}{bdd-bd}$$

$$E = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{c}{bd^3} \ \&c. = \frac{c}{bd^3-bdd}$$

$$\&c. = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \ \&c. = \&c.$$

} $F = cd : b\,(d-1)^2$ cui additus primus terminus $ad : b\,(d-1)$ producit totius propositæ seriei A summam $= ad : b\,(d-1) + cd : b\,(d-1)^2$.

2. *Si Numeratores sunt juxta Trigonales:*

Series proposita G resolvenda est in aliam H, cujus numeratores sint juxta præcedentem hypothesin, hoc modo:

$$G = \frac{c}{b} + \frac{3c}{bd} + \frac{6c}{bdd} + \frac{10c}{bd^3} \ \&c.$$

$$\frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \ \&c. = \frac{cd}{bd-b}$$

$$+ \frac{2c}{bd} + \frac{2c}{bdd} + \frac{2c}{bd^3} \ \&c. = \frac{2c}{bd-b}$$

$$+ \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3} \ \&c. = \frac{3c}{bdd-bd}$$

$$+ \frac{4c}{bd^3} \ \&c. = \frac{4c}{bd^3-bdd}$$

$$\&c. = \&c.$$

} $H = cd^3 : b\,(d-1)^3$ quandoquidem hæc series ad præced. $\frac{c}{bd} + \frac{2c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3}$ &c. $= cd : b\,(d-1)^2$ se habeat ut dd ad $d-1$.

3. *Si Numeratores sunt juxta Pyramidales:*

Series resolvitur in aliam, cujus numeratores progrediuntur juxta Trigonales, quæque ad præcedentem seriem se habet, ut d ad $d-1$; unde summa ejus invenitur $= cd^4 : b\,(d-1)^4$.

Gene-

N.XXXV Generaliter, si propositæ seriei numeratores sint juxta figuratos cujuslibet gradus, ejus summa se habebit ad summam similis seriei gradus præcedentis, ut d ad $d-1$: unde reliquarum omnium summam invenire proclive admodum est.

4. *Si Numeratores sunt juxta Quadratos:*

Series L resolvitur in aliam M, cujus numeratores sunt arithmetice progressionales, adeoque juxta primam hypothesin:

$$L = \frac{c}{b} + \frac{4c}{bd} + \frac{9c}{bdd} + \frac{16c}{bd^3} \text{ \&c.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \text{ \&c} = \frac{cd}{bd-b} \\ \quad + \frac{3c}{bd} + \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3} \text{ \&c.} = \frac{3c}{bd-b} \\ \quad\quad + \frac{5c}{bdd} + \frac{5c}{bd^3} \text{ \&c.} = \frac{5c}{bdd-bd} \\ \quad\quad\quad + \frac{7c}{bd^3} \text{ \&c.} = \frac{7c}{bd^3-bdd} \\ \quad\quad\quad\quad \text{\&c.} = \text{\&c.} \end{array}\right\} M = cdd : b(d-1)^2 + 2cdd : b(d-1)^3 = (cd^3 + cdd) : b(d-1)^3.$$

5. *Si Numeratores sunt juxta Cubos:*

Series resolvitur in aliam, cujus numeratores sunt Trigonalium sextupli unitate aucti; unde ejus summa juxta secundam hypothesin invenitur $cdd : b(d-1)^2 + 6cd^3 : b(d-1)^4 = (cd^4 + 4cd^3 + cdd) : b(d-1)^4$. Exempli loco sint series sequentes, Numeratorum

Naturalium	$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32}$	&c. $= 2$
Trigonalium	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{6}{8} + \frac{10}{16} + \frac{15}{32}$	&c. $= 4$
Pyramidalium	$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{10}{8} + \frac{20}{16} + \frac{35}{32}$	&c. $= 8$
Quadratorum	$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32}$	&c. $= 6$
Cuborum . .	$\frac{1}{2} + \frac{8}{4} + \frac{27}{8} + \frac{64}{16} + \frac{125}{32}$	&c. $= 26$

COROLL.

COROLL. Patet, in omnibus hujusmodi seriebus postremos terminos in nihilum desinere, & evanescere debere (quod ipsum jam præced. Propos. de earum una ex abundanti ostendimus;) cum alias illarum summæ finitæ esse non possent. (a) N.XXXV

XV. *In-*

(a) Vix potest satis dici quantopere placuerit Mathematicis Tractatio Serierum infinitarum, postquam Auctor noster argumentum istud, hac Dissertatione & sequentibus N. LIV. LXXIV. XC. CI. illustravit. Videantur quæ de hisce scripserunt MONTMORTIUS, TAYLORUS, MOIVRÆUS, STIRLINGIUS, NICOLE, *Nicolaus* BERNOULLI, aliique plures. Ingeniosam methodum, qua in hac Propositione utitur noster, extendere licet 1°. ad omnes series fractionum, quarum denominatores crescunt progressione geometrica, numeratores progrediuntur juxta numeros quosvis figuratos.

Sic [posito facilioris scriptionis gratia $1 : d = e$]

Series $1 + 1e + 1e^2 + 1e^3 + \&c. = 1 : (1 - e) = d : (d - 1)$
Series $1 + 2e + 3e^2 + 4e^3 + \&c. = 1 : (1 - e)^2 = d^2 : (d - 1)^2$
Series $1 + 3e + 6e^2 + 10e^3 + \&c. = 1 : (1 - e)^3 = d^3 : (d - 1)^3$
Series $1 + 4e + 10e^2 + 20e^3 + \&c. = 1 : (1 - e)^4 = d^4 : (d - 1)^4$
Series $1 + 5e + 15e^2 + 35e^3 + \&c. = 1 : (1 - e)^5 = d^5 : (d - 1)^5$

& ita porro.

2°. Extenditur hæc methodus ad series omnes fractionum, quarum denominatoribus existentibus in progressione geometrica, numeratores constituunt seriem terminorum quorum differentiæ, vel primæ, vel secundæ, id est, differentiarum differentiæ, vel tertiæ, hoc est, differentiarum secundarum differentiæ, vel quartæ, vel quintæ, vel quæcunque differentiæ dant tandem seriem magnitudinum æqualium, adeo ut, differentiæ ulteriores evanescant. Etenim si primus terminus seriei numeratorum sit a, prima differentiarum primarum sit b, prima secundarum, c; tertiarum, f; quartarum, g; quintarum h, &c. Series ipsa erit (I) $ae + (a + b) e^2 + (a + 2b + c) e^3 + (a + 3b + 3c + f) e^4 + (a + 4b + 6c + 4f + g) e^5 + (a + 5b + 10c + 10f + 5g + h) e^6 +$ &c. quæ, Methodo Auctoris resolvitur in sequentes

$$\left.\begin{array}{l} ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + ae^5 \ \&c. = ae : (1 - e) \\ \quad + be^2 + 2be^3 + 3be^4 + 4be^5 \ \&c. = be^2 : (1 - e)^2 \\ \quad\quad + ce^3 + 3ce^4 + 6ce^5 \ \&c. = ce^3 : (1 - e)^3 \\ \quad\quad\quad + fe^4 + 4fe^5 \ \&c. = fe^4 : (1 - e)^4 \\ \quad\quad\quad\quad + ge^5 \ \&c. = ge^5 : (1 - e)^5 \\ \quad\quad\quad\quad\quad \&c. \qquad \&c. \end{array}\right\} K$$

 Ergo

N.XXXV

XV.

Invenire summam Seriei infinitæ fractionum R, quarum numeratores constituunt seriem æqualium, denominatores vero Trigonalium eorumve æquemultiplicium.

Si a Serie harmonice proportionalium N, eademmet multata primo termino P subtrahatur; exoritur nova Series Q, cujus denominatores Trigonalium dupli sunt, cujusque adeo summa æqualis erit ipsi primo termino Seriei harmonicæ N, per Ax. 3.

Operatio talis: A Serie $N = \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c}$ &c.

subtracta Series $P = \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \frac{a}{6c}$ &c. $= N - \frac{a}{c}$

relinquit Seriem $Q = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c}$ &c. $= \frac{a}{c}$

cujus

Ergo Series I = Seriei K, vel mutato e in $1:d$, Series $a:d + (a+b):d^2 + (a+2b+c):d^3 + (a+3b+3c+f):d^4 + (a+4b+6c+4f+g):d^5 +$ &c. æqualis est $a:(d-1) + b:(d-1)^2 + c:(d-1)^3 + f:(d-1)^4 + g:(d-1)^5$, &c. quæ ultima Series tandem abrumpitur, evanescente aliqua differentiarum, $b, c, f, g,$ &c.

Sic, quia Seriei quadratorum differentiæ tertiæ nullæ sunt,

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. &c.
3. 5. 7. 9. 11. 13
2. 2. 2. 2. 2
0 0 0 0

fiat $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, $f = 0 = g = h$ &c. & Seriei $1:d + 4:d^2 + 9:d^3 + 16:d^4 +$ &c. summa est $1:(d-1) + 3:(d-1)^2 + 2:(d-1)^3 = (dd+d):(d-1)^3$

Pariter sumptis differentiis Seriei cuborum, invenies quartas evanescere

1. 8. 27. 64. 125. 216
7. 19. 37. 61. 91
12. 18. 24. 30
6. 6. 6
0 0

Est igitur $a = 1$, $b = 7$, $c = 12$, $f = 6$, $g = 0$ &c. & Seriei $1:d + 8:d^2 + 27:d^3 + 64:d^4 +$ &c. summa est $1:(d-1) + 7:(d-1)^2 + 12:(d-1)^3 + 6:(d-1)^4 = (d^3 + 4dd + d):(d-1)^4$. Nec multo difficilius esse summas invenire, non totius seriei in infinitum continuatæ, sed plurium, dato numero, terminorum initialium.

cujus duplum $R = \frac{a}{c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{10c} + \frac{a}{15c}$ &c. $= \frac{2a}{c}$ N.XXXV

Series scil. fractionum proposita, quarum denominatores sunt numeri Trigonales, eorumve æque-multiplices (b).

 Obser-

(b) Non eget alia demonstratione hæc Methodus, per se satis perspicua. Gratum tamen arbitror fore tyronibus, si ipsis ostendam, rationem investigandi Seriem, aut Series harmonice proportionalium, quæ multatæ uno, vel pluribus terminis initialibus, si a se ipsis subtrahantur, producant novam Seriem datam.

Data Series hic intelligitur, cujus datur terminus generalis, hoc est, talis ut x existente indice loci quem terminus quilibet quæsitus occupat, vel $x - 1$ existente numero terminorum istum præcedentium, detur valor istius per x & constantes. Sic Seriei R, quæ summatur in hac Propos. terminus generalis est $2a : cx(x+1)$. Nam, in illa expressione, si pro x scribantur successive 1, 2, 3, &c. prodibit Series R. Si quæratur, v. gr. terminus decimus, scribe 10 pro x, & habebis $2a : 10.11\,c = a : 55\,c$.

Terminus autem generalis Seriei, cujus dantur aliquot initiales termini, plerumque inveniri potest, nisi satis obvius sit, quærendo differentias tam numeratorum quam denominatorum, non modo primas, sed secundas, tertias, &c. donec ad ultimas, id est, æquales perveniatur. Nam si sit m primus terminus Seriei cujusvis; n, prima differentiarum primarum; p, prima secundarum; q, tertiarum; r, quartarum &c. sintque ultimæ differentiæ ordine z: Quæritur terminus, cujus loci index est x. Excerpantur coefficientes terminorum z primorum binomii ad potestatem $x - 1$ elevati, nempe $1, x-1, \frac{(x-1).(x-2)}{1.\ 2}, \frac{(x-1).(x-2).(x-3)}{1.\ 2.\ 3}$, &c. & ii successive multiplicentur per m, n, p, q, r, &c. eritque $m + (x-1)n + \frac{(x-1)\ (x-2)}{1.\ 2.}p + \frac{(x-1).(x-2).(x-3)}{1.\ 2.\ 3.}q +$ &c. terminus generalis Seriei, cujus istæ sunt differentiæ; id quod per inductionem satis liquet. Ex. gr. Seriei R denominatores sunt

	1.	3.	6.	10.	15.	21.	&c.
Diff. primæ	2.	3.	4.	5.	6.	&c.	
Diff. secundæ.	1	1	1	1	ultimæ		

Ergo $m = 1$, $n = 2$, $p = 1$, Igitur terminus generalis $m + (x-1)n + \frac{(x-1).(x-2)}{1.\ 2.}p = 1 + 2(x-1) + (x-1).(x-2) : 2 = (xx + x) : 2 = x(x+1) : 2$.

Dato Seriei termino generali, summam

N.XXXV summam ejus venabimur, reducendo fractionem, quæ termini generalis expressio est, in tot, quot fieri potest, fractiones simplices $A : (x + a) + B : (x + b) + C : (x + c) + D : (x + d) +$ &c. quæ singulæ respondent totidem Seriebus harmonice proportionalium, scribendo nempe pro x successive terminos progressionis arithmeticæ. Nam si hujus differentia sit divisor aliquis communis quantitatum $b - a$, $c - a$, $d - a$, &c. Atque insuper, si $A + B + C + D +$ &c. sit $= 0$, Series semper summari poterit.

Ex. gr. Seriei R terminus generalis est $2a : cx (x + 1) =$ [si $a : c$ dicatur d] $2d : x (x + 1)$. Fiat $\frac{2d}{x. x + 1} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1}$ [ubi x crescendo per unitates satisfacit conditioni priori] & quoniam $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A + B) x + A}{x. \ x + 1}$, comparemus numeratorem $(A + B) x + A$, cum numeratore $2d$, & inveniemus $A = 2d$, atque $A + B = 0$ [quo satisfit conditioni posteriori] seu $B = - A = - 2d$. Ergo $2d : x (x + 1) = 2d : x - 2d : (x + 1)$. Termino generali reducto ad duas fractiones simplices, Series ipsa R reducetur ad duas Series harmonicas, scil.

$$R = \frac{d}{1} + \frac{d}{3} + \frac{d}{6} + \frac{d}{10} + \frac{d}{15} + \text{\&c.}$$

$$= 2d \left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \text{\&c.} \dots \right)$$

$$- 2d \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \text{\&c.} \dots \right)$$

cujus summa est $2d. \frac{1}{1} = 2d = 2a : c$.

Quod si hujus Seriei terminos, non omnes, sed initiales tantum aliquot, numero dato, summare vellemus, id eodem modo liceret exequi. Proponatur summanda Series R, usque ad terminum ordine x, qui est $2d : x (x + 1)$. Ea reducitur ad duas has Series

$$2d \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{x} \right)$$

$$- 2d \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{x+1} \right)$$

$= 2d. \frac{1}{1} - 2d. \frac{1}{x + 1} = 2dx : (x + 1)$.

Summanda sit Series $\frac{1}{3. 5. 7} + \frac{2}{4. 6. 8} + \frac{3}{5. 7. 9} +$ &c. cujus terminus generalis $x : (x + 2). (x + 4). (x + 6)$. Ea reducitur ad $A : (x + 2) + B : (x + 4) + C : (x + 6)$, in quibus x crescendo per unitates, crescit per divisorem communem quantitatum $4 - 2$, $6 - 2$, adeoque satisfacit conditioni priori. Rursus $A : (x + 2) + B : (x + 4) + C : (x + 6) = ((A + B + C) xx + (10 A + 8 B + 6 C) x + 24 A + 12 B + 8 C) : (x + 2). (x + 4). (x + 6)$. Comparetur numerator cum numeratore x, & habebitur $A + B + C = 0$ [quo satisfit conditioni posteriori, unde concludimus Seriem esse summabilem], $10 A + 8 B + 6 C = 1$, & $24 A + 12 B + 8 C = 0$, ex quibus elicitur $A = - \frac{1}{4}$, $B = 1$,

$C =$

$c = -\frac{3}{4}$. Ergo terminus generalis $x : (x+2).(x+4).(x+6)$, reducitur ad $-\frac{1}{4}:(x+2)+1:(x+4)-\frac{3}{4}:(x+6)$. & Series proposita in has tres dispescitur N.XXXV.

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots\ldots\frac{1}{x+2}\right)$$

$$+1\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\ldots\ldots\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)$$

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\ldots\ldots\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}\right)$$

quarum summa $= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) + 1\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right) = \frac{31}{240}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}\right)$.

Adhæc si termino generali reducto ad fractiones simplices $A:(x+a)+B:(x+b)+C:(x+c)+D:(x+d)$ &c. inveniatur x non crescere per differentiam quæ sit communis divisor quantitatum $b-a$, $c-a$, $d-a$, &c. sed tamen incrementum ipsius x dividat $b-a$, & $d-c$, fitque simul $A+B=0$, & $C+D=0$, poterit series summari.

Ita Seriei $\frac{11}{1.3.1.4}+\frac{23}{3.5.4.7}+\frac{35}{5.7.7.10}+$ &c. terminus generalis $(12x-1):(2x-1)(2x+1).(3x-2).(3x+1)$, vel $(\frac{1}{3}x-\frac{1}{36}):(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x-\frac{2}{3})(x+\frac{1}{3})$ resolvitur in fractiones $-\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{x-\frac{2}{3}}-\frac{1}{x+\frac{1}{3}}$ vel $-\frac{2}{2x-1}+\frac{2}{2x+1}+\frac{3}{3x-2}-\frac{3}{3x+1}$ adeoque series ipsa in has quatuor

$$-2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\ldots\ldots+\frac{1}{2x-1}\right)$$

$$+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\ldots\ldots\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2x+1}\right)$$

$$+3\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}\ldots\ldots+\frac{1}{3x-2}\right)$$

$$-3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}\ldots\ldots\frac{1}{3x-2}+\frac{1}{3x+1}\right)$$

quæ-

N.XXXV Observandum tamen, non sine cautela hac utendum esse methodo: Nam si a sequente Serie S eadem, demto primo termino, T subtrahatur, prodibit eadem series Q, quæ antea; nec tamen inde sequitur, summam Seriei Q æqualem esse primo termino seriei $S = \frac{2a}{c}$. Cujus rei ratio est, quod, si a Serie S subtrahitur Series terminorum totidem T, in qua singuli termini postremum præcedentes singulos primum consequentes in altera destruunt, residuum, hoc est resultans Series Q, evidenter debet adæquari primo termino Seriei S minus ultimo ipsius T; adeoque ipsi primo Seriei S absolute æqualis esse nequit, nisi tum cum ultimus ipsius T in nihilum desinit, uti quidem desinere perspicuum est in Serie P vel N: at non evanescit pariter in Serie T vel S, verum est $= a : c$, per X. Quin itaque potius summa Seriei $Q = 2a : c - a : c = a : c$, ut supra.

$$S = \frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} \text{ \&c.}$$
$$T = \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} + \frac{7a}{6c} \text{ \&c.}$$
$$Q = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} \text{ \&c.} = \frac{2a}{c} - \frac{a}{c} = \frac{a}{c}.$$

XVI.

Summa seriei infinitæ harmonice progressionalium, $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ *&c. est infinita.*

Id primus deprehendit Frater: inventa namque, per præced. summa Seriei $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$, &c. visurus porro, quid emergeret ex ista Serie, $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30}$, &c. si resolveretur methodo

quarum summa $= - 2.\frac{1}{1} + 2.$ $(2x+1)\ (3x+1)$.

$\frac{1}{2x+1} + 3.\frac{1}{1} - 3.\frac{1}{3x+1} = 1$ Hæc methodus, quoad substantiam, est D. TAYLOR.

$+\frac{2}{2x+1} - \frac{3}{3x+1} = (6x+5)x$:

methodo Prop. XIV. collegit propositionis veritatem ex absur- NXXXV.
ditate manifesta, quæ sequeretur, si summa Seriei harmonicæ finita statueretur. Animadvertit enim,

Seriem A, $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$, &c. $=$ (fractionibus singulis in alias, quarum numeratores sunt 1, 2, 3, 4, &c. transmutatis)

$$\text{Seriei B}, \frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}+\frac{6}{42}, \text{\&c.} = C+D+E+F, \text{\&c.}$$

$$\left.\begin{array}{l}
C.\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}, \text{\&c.} = \text{per præc.}\ \frac{1}{1} \\
D.\ +\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}, \text{\&c.} = C-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
E\ \ldots +\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}, \text{\&c.} = D-\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \\
F\ \ldots\ldots +\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}, \text{\&c.} = E-\frac{1}{12} = \frac{1}{4} \\
\qquad\qquad\qquad \text{\&c.} = \qquad \text{\&c.}
\end{array}\right\} = G;$$

unde sequitur, Seriem $G = A$, totum parti, si summa finita esset.

Ego postmodum, cum indicasset, idem ostensive hunc in modum: Summa Seriei infinitæ harmonicæ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, &c. superat datum quemvis numerum. Ergo infinita est, per II. Esto datus numerus N quantumcunque magnus: Abscinde a principio Seriei aliquot terminos, quorum summa æquet vel superet unam unitatem numeri N, & a Serie reliqua iterum aliquos abscinde, quorum summa aliam unitatem numeri N superet, idque si fieri possit, repete toties, quot in numero N sunt unitates; sic termini abscissi omnes superabunt totum numerum, multo magis igitur tota Series eundem superabit. Si neges, abscissis aliquot, reliquos unitatem superare posse, esto primus reliquorum, qui post abscissionem ultimam remanserunt, $1:a$, & sequentes $1:(a+1)$, $1:(a+2)$, $1:(a+3)$, &c. Constituatur ad duos primos terminos $1:a$ & $1:(a+1)$ Progressio geometrica, cujus ideo singuli post secundum termini singulis respondentibus in Progressione harmonica minores sunt, ob denominatores majores, per IV. & continuetur hæc usque ad $1:aa$ (quod quidem fiet in termi-

nis

N.XXXV nis numero finitis, propter *a* numerum finitum) eritque hæc Series geometrica finita = 1; per VIII. Harmonica itaque terminorum totidem superabit unitatem. Q. E. D.

Coroll. 1. In proposita Serie initio sumto a quolibet termino, erunt ab illo deinceps omnes, usque ad illum, cujus locus designatur per quadratum numeri ordinis primi termini, simul sumti unitate majores: sic termini a 2do ad 4^{tum} usque unitatem superant, hinc a 5to ad 25^{tum}, hinc a 26 ad 676 [$= 26^2$] hinc a 677 ad 458329 [$= 677^2$] &c. Nam in geometrica progressione, termini his limitibus intercepti unitatem æquant; ergo in harmonica superant, ubi & plures intercipiuntur & majores: majores quidem uti vidimus; plures, quia denominatores terminorum, cum sint minores quam in geometrica, per IV, tardius illos limites assequuntur.

2. Patet, omnem aliam Seriem harmonicam infinitam, summam quoque exhibere infinitam; ut ex. gr. si loco $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ &c. proponatur $\frac{1}{1000}+\frac{1}{2000}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{4000}$ &c. ubi singuli termini singulorum sibi respondentium in altera, adeoque & omnes omnium, sunt submillecupli: nam infiniti pars millesima & ipsa infinita est.

3. Summa Seriei infinitæ, cujus postremus terminus evanescit, quandoque finita est, quandoque infinita.

Tab. X. b. No. 35. 4. Sequitur etiam, si modo in geometriam saltum facere permissum est, spatium Curva Hyperbolica & Asymptotis comprehensum infinitum esse: Secta intelligatur Asymptotos linea a centro *A* in partes æquales infinitas in punctis *B*, *C*, *D*, *E*, &c. e quibus ad curvam educantur rectæ totidem alteri Asymptoton parallelæ *BM*, *CN*, *DO*, *EP*, &c. & compleantur parallelogramma *AM*, *BN*, *CO*, *DP*, &c. quæ, ob basium æqualitatem inter se erunt, ut altitudines, seu ut rectæ *BM*, *CN*, *DO*, *EP*, &c. hoc est, ut $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. ex natura Hyperbolæ; cum igitur summa $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ &c. infinita ostensa sit, erit & summa Parallelogrammorum *AM*, *BN*, *CO*, *DP*, &c. infinita, multoque

toque magis spatium hyperbolicum, quod parallelogrammis illis conscriptum est. N.XXXV

XVII.

Invenire summam serierum Leibnitzianarum, D, H, I, *aliarumque, quarum denominatores sunt numeri Quadrati aut Trigonales, minuti aliis Quadratis vel Trigonalibus.*

Cel. LEIBNITIUS occasione mirabilis suæ Quadraturæ Circuli in principio *Actorum Lips.* publicatæ, mentionem injicit summæ quarundam serierum infinitarum, quarum denominatores constituunt seriem Quadratorum unitate minutorum, dissimulato quo eam repererat artificio. En breviter totum misterium:

A serie . . . $A = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c. subtrahatur ipsamet demtis duobus

primis terminis, $B = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ &c. $= A - \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

relinquitur $C = \frac{2}{3}+\frac{2}{8}+\frac{2}{15}+\frac{2}{24}+\frac{2}{35}$ &c. $= A - B = \frac{1}{1}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

& propterea $D = \frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}$ &c. $= \frac{1}{2}C = \frac{3}{4}$

A serie . . . $E = \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$ &c. subtrahatur eadem demto primo

termino . . . $F = \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}$ &c. $= E - 1$

relinquitur $G = \frac{2}{3}+\frac{2}{15}+\frac{2}{35}+\frac{2}{63}+\frac{2}{99}$ &c. $= E - F = 1$.

& propterea . . $H = \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}$ &c. $= \frac{1}{2}G = \frac{1}{2}$,

& proinde etiam $I = \frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}$ &c. $= D - H = \frac{3}{4}-\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Quod ipsum quoque sic ostenditur:

N.XXXV A serie . ? . $L = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$ &c. subtrahatur eadem demto primo

termino . . . . $M = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}$ &c. $= L - \frac{1}{2}$

relinquitur $N = \frac{2}{8} + \frac{2}{24} + \frac{2}{48} + \frac{2}{80} + \frac{2}{120}$ &c. $= L - M = \frac{1}{2}$

& proinde . . . $I = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120}$ &c. $= \frac{1}{2} N = \frac{1}{4}$, ut antea.

Memorabile autem prorsus est, quod summa Seriei D, $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63}$ &c. (cujus denominatores sunt numeri quadrati 4, 9, 16, 25, 36, &c. unitate minuti) invenitur $\frac{3}{4}$, quin & excerptis per saltum alternis terminis, summa Seriei H, $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63}$ &c. $= \frac{1}{2}$; at si ex hac iterum simplici saltu terminos loco pari positos excerpas, ut relinquatur $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ &c. ejus Seriei infinitæ summa est vera magnitudo circuli, nullo numero exprimibilis, sumto vid. quadrato diametri $= \frac{1}{2}$ (*). Cæte-

(*) Terminus generalis Seriei, cujus denominatores sunt numeri quadrati, minuti aliquo quadrato, erit

$$\frac{1}{xx + 2ax + aa - bb}$$

$$= \frac{1}{(x + a + b).(x + a - b)}$$

qui resolvitur in duas fractiones simplices $\frac{1:2b}{x + a - b} - \frac{1:2b}{x + a + b}$.
Ergo series resolvetur in alias duas, & proinde, quoniam posterior conditio locum habet, summabilis erit, si prior obtineat, hoc est si x crescat per differentiam aliquam, quæ sit divisor differentiæ $(a + b) - (a - b) = 2b$. Id quod succedit in Seriebus D, H, I. Nam in prima, x crescit per unitates; est vero $a = 1$, & $b = 1$, adeoque $2b = 2$. In secunda, x crescit per binarios: est autem $a = 0$, $b = 1$, ideoque $2b = 2$. In tertia x crescit pariter per binarios, & est $a = 2$, $b = 1$. At in Serie $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} +$ &c. $= \frac{1}{4 - 1} + \frac{1}{36 - 1} + \frac{1}{100 - 1}$ &c. x crescit per quaternarios, & est $a = 1$, $b = 1$ & $2b = 2$: Non crescit igitur x per differentiam quæ dividat $2b$. Quamobrem hæc series hac methodo non est summabilis. Hujus autem summam exhibere veram magnitudinem Circuli,

Cæterum generaliter invenire possumus summam cujuslibet Seriei, cujus numeratores constituunt Seriem æqualium, & denominatores seriem Quadratorum minutorum communi aliquo Quadrato Q, aut etiam seriem Trigonalium minutorum communi aliquo numero Trigonali T: si observemus, ejusmodi Series nasci per subductionem Seriei harmonicæ truncatæ ab initio tot terminis (quot indicat ibi duplum radicis quadratæ communis quadrati Q, hîc duplum unitate auctum radicis trigonalis numeri Trigonalis T) a seipsa integra: N.XXXV.

Ex. gr. ad inveniendam summam Seriei D, $\frac{1}{7}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{40}+\frac{1}{55}$ &c.
cujus denominatores sunt Quadrati, 16, 25, 36, 49, 64, 81, &c.
minuti communi Quadrato Q. . . . 9, 9, 9, 9, 9, 9.
(cujus Radix Quad. 3, & duplum 6,) 7, 16, 27, 40, 55, 72, &c.

A Serie . . . $A = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ &c. subtrahatur eadem multata sex

primis terminis . $B = \frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}$ &c.

relinquitur : . $C = \frac{6}{7}+\frac{6}{16}+\frac{6}{27}+\frac{6}{40}+\frac{6}{55}+\frac{6}{72}$ &c. $= A - B =$
$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = 2\frac{9}{20}$

adeoque : . . $D = \frac{1}{7}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{40}+\frac{1}{55}+\frac{1}{72}$ &c. $= \frac{1}{6}C = \frac{49}{120}$.

 Rur-

li; demonstrabitur N°. LIV. Prop. 45. Cor. 1.

Terminus generalis Seriei, cujus denominatores sunt Trigonales minuti aliquo Trigonali, erit

$$\frac{2}{(x+a)(x+a+1)-b(b+1)} =$$

$$\frac{2}{(x+a+b+1)(x+a-b)} = .$$

$$\frac{2:(2b+1)}{x+a-b} - \frac{2:(2b+1)}{x+a+b+1}$$

Unde sequitur seriem summabilem esse, quotiescunque x crescit per divisorem differentiæ $(a+b+1) - (a-b) = (2b+1)$.

N.XXXV Rursus pro invenienda summa Seriei E, $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{22}+\frac{1}{30}+\frac{1}{39}$ &c.

cujus denominatores sunt Trigonales 10, 15, 21, 28, 36, 45, &c.
minuti communi Trigonali T . . . . 6, 6, 6, 6, 6, 6, &c.
(cujus Radix Trigon. 3. & duplum 4, 9, 15, 22, 30, 39, &c.
unitate auctum 7)

A Serie . . $A=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ &c. subtrahatur eadem truncata septem primis terminis

$$F=\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14} \text{ \&c.}$$

relinquitur $G=\frac{7}{8}+\frac{7}{18}+\frac{7}{30}+\frac{7}{44}+\frac{7}{60}+\frac{7}{78}+\frac{7}{98}$ &c. $=A-F=$
$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{363}{140}$

adeoque . . $E=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{22}+\frac{1}{30}+\frac{1}{39}+\frac{1}{49}$ &c. $=\frac{2}{7}G=\frac{363}{490}$.

Atque ita per hanc Propositionem inveniri possunt summæ serierum, cum denominatores sunt vel numeri Trigonales minuti alio Trigonali, vel Quadrati minuti alio Quadrato; ut & per XV. quando sunt puri Trigonales, ut in Serie $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ &c. At, quod notatu dignum, quando sunt puri Quadrati, ut in Serie $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$ &c. difficilior est, quam quis expectaverit, summæ pervestigatio, quam tamen finitam esse, ex altera, qua manifesto minor est, colligimus: Si quis inveniat nobisque communicet, quod industriam nostram elusit hactenus, magnas de nobis gratias feret. (b)

Hoc

(b) Non potest hac arte summari Series cujus denominatores sunt Quadrati puri, & ea plerasque Methodos quæ, magno satis numero, post Autoris fata, inventæ sunt, elusit, donec tandem Cl. Eulerus

Hoc saltem monere adhuc liceat, quod spatium Hyperboloide Cubicali [cujus natura exprimitur per æquationem $xxy = aab$, hoc est, in qua Quadrata abscissarum ex Asymptotis sunt in applicatarum ratione reciproca] & Asymptotis suis comprehensum, eodem modo ex finita hujus Seriei summa finitum esse demonstrari possit, quo simile spatium in ipsa Hyperbole ex infinita Seriei harmonicæ summa infinitum ostensum est. * N.XXXV

 ΕΠΙΜΕΤΡΑ

RUS, *Joh.* & *Nicol.* BERNOULLII detexerunt ejus summam æqualem esse sextæ parti quadrati circumferentiæ, cujus Diameter est 1. Subjiciam Demonstrationem EULERI, indirectam quidem, sed mira quadam & inexpectata brevitate, sese commendantem. Notum est æquationem infinitam $y = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 +$ &c. exprimere relationem inter sinum y & arcum x, in circulo cujus radius $= 1$. Posito igitur sinu $y = 0$, designabunt radices hujus æquationis $0 = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 -$ &c. arcus omnes, quorum sinus sunt 0, id est, posita $c =$ circumferentiæ circuli cujus Diameter $= 1$, vel semicircumferentiæ circuli cujus radius $= 1$, radices ejus æquationis infinitæ erunt $0, c, 2c, 3c, 4c,$ &c. Igitur, dividendo per x, radices hujus æquationis $0 = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 -$ &c. erunt $c, 2c, 3c$, &c, vel, posito $zz = 1 : x$, radices æquationis istius $0 = 1 - \frac{1}{6z} + \frac{1}{120zz} -$ &c. erunt $\frac{1}{c^2}, \frac{1}{4c^2}, \frac{1}{9c^2}$ &c. Hinc, quia in omni æquatione algebraica, ubi termini secundum potestates descendentes indeterminatæ disponuntur, coefficiens secundi termini, mutato signo, æqualis est summæ radicum omnium, erit $\frac{1}{6} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{4c^2} + \frac{1}{9c^2} +$ &c. Ergo $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ &c. in infinitum $= \frac{1}{6}c^2 = \frac{c^2}{6}$. Q. E. D.

* *Videatur Nus, LIV.*

N.XXXV.

ΕΠΙΜΕΤΡΑ.

I.

Sicut nec corpus infinitum, ita nec atomum dari posse credo; sed utrumque nudam mentis fictionem esse puto, qua postquam corpus corpori aliquandiu addidit ademitve, pertæsa tandem operationis sine fine repetendæ, omnes multiplicationes vel divisiones uno immani saltu transilit, ultimamque jam factam esse, quam tamen unquam fieri repugnat, προληπτικῶς supponit.

II.

Vacuum, eo modo quo concipi a nobis solet, necessario datur.

III.

Hinc vacui metus inepte naturæ affingitur, nec ullius phænomeni naturalis causa esse potest.

IV.

Fluviorum alvei non possunt esse perfecte horizontales, sed requiritur in illis ad minimum unius pedis declivitas in milliari: unde & fluminum ostia ipsorum scaturiginibus, Oceanus & loca maritima regionibus mediterraneis necessario depressiora sunt.

V.

Hinc vero non levis controversia, qua vi aquæ ex Oceano in altissimorum montium cacumina revehantur; frustra saltem illi sunt, qui existimant, hoc ad eundem modum per angustos terræ meatus & canaliculos fieri posse, quo videmus, liquorem intra graciliores fistulas altius assurgere posse, quam consistit externi liquoris superficies.

VI.

Solutio quæstionum circa figuram & situm Iridis, quam antehac in rore prati conspexit Christ. MENZELIUS, *ut refert in* Ephemer. Nat. Curiosor. An. 1686, *& qua in re omnium cujusque loci Mathematicorum opem implorat, facilis est, nulloque* Archimede

chimede *indiget. Nam* 1°. *si Solis altitudo* $<$ 42 *gr. Iris apparebit Hyperbolica : si* $=$ 42 *gr. Parabolica : si* $>$ 42 *gr. Elliptica : si* 90 *gr. Circularis.* 2°. *Axis Iridis perpetuo est in linea umbra intuentis hominis.* 3°. *Elevatione oculi supra Terra planitiem sumta pro radio, distantia proximi verticis coni-sectionis a loco stationis est Tangens differentia inter* 48 *gr. & arcum elevationis Solis, numeranda a facie, ubi* 48 *gr.* $>$ *elev. Solis; a tergo, ubi* $<$. 4°. *Latus rectum in omni casu est duplum Tangentis* 42 *gr.* 5°. *Transversum in Hyperbola, aggregatum ex Tangente summa & Tangente differentia* 48 *gr. & elevat. Solis : in Ellipsi, existente elevatione Solis* $>$ 48 *gr. aggregatum ex Tang. summa & Tang. differentia* 42 *gr. & complementi altitudinis Solis; existente vero elevat. Solis* $<$ 48 *gr. differentia earumdem* (*). N.XXXV

VII. Li-

(*) Notum est omnibus, Iridis primariæ causam esse refractionem duplicem, simplicemque reflexionem radiorum solarium in guttas pluvias incidentium, quæ guttæ sunt omnes in superficie conica, cujus axis est linea per Solis centrum & oculum spectatoris acta, latus vero ad axem inclinatur sub angulo, quem 42 gr. assumit Autor, medium scil. inter angulos arcus rubri & arcus violacei. Hæc coni superficies si secta intelligatur per Terræ planitiem roris guttulis sparsam, dabit Iridis horizontalis figuram. Sit S, Sol; O, spectatoris oculus; OT, ejus altitudo supra Terræ superficiem TA; SOA, axis coni; OV, OR, ejus latera, cum axe comprehendentia angulos AOV, AOR, 42 gr. atque cum OP ad axem perpendiculari angulum POV 48 gr. & manifestum est I°. Si OT in axem OA incidat, id est, si Solis elevatio sit 90 gr. sectionem Terræ & superficiei conicæ dare Iridem circularem: Inclinata vero OT ad OA, Terræ planitiem TA efficere, cum latere coni OV, angulum OVP æqualem summæ angulor. OAT (elevat. Solis) & AOV (42 gr.); cum latere autem OR, angulum ORT æqualem differentiæ angulor. OAT (elev. Solis) & AOR (42 gr.). Igitur, si Solis elevatio sit $>$ 42 gr., TA secabit utrumque latus coni, & sectio VAR erit elliptica: si Solis elevatio sit $=$ 42 gr. TA erit parallela lateri OR, & Sectio VA parabola: si Solis elevatio sit $<$ 42 gr. latus OR cum TA non concurret, nisi producatur ab altera parte in Or, adeoque sectio VA erit hyperbola.

II. Axis sectionis VA cadit in lineam

N. XXXV

VII.

Lineam Spiralem Archimedeam *dimidiam esse peripheriæ sui Circuli, male asserit* Cl. STURMIUS *in* Mathesi *sua* enucleata.

VIII.

Agrimensoriam nisi Geometriæ peritus rite exercere non potest; unde in Rebuspub. non citra insigne præjudicium ejus cura illiteratis & plebeiis committi solet.

lineam umbræ TA hominis intuentis.

III. Distantia TV proximi verticis V a loco stationis T est (sumpta OT pro sinu toto) Tangens anguli TOV, seu differentiæ angul. POV (48 gr.) & POT = [propter simil. triang. POT, POA] = OAT (Solis elevat.) hæc autem distantia, in 1ª. Ellipsis figura [ubi AOT < AOV, 42 gr. atque ideo OAT, Solis elev. > 48 gr.] numeratur a tergo, in reliquis figuris a facie spectatoris a Sole aversi.

IV. Latus rectum habetur (vid. infra N°. XXXVIII.) faciendo OA ad MN [sin. totus ad duplum Tangent. anguli MOA vel NOA, 42 gr.], ut OT ad latus rect. Ergo ubi OT est sin. tot., etiam latus rectum est duplum Tang. 42 gr.

V. In hyperbola, latus transversum Vr = Tr + TV = Tang. TOr [summæ ang. POr, 48 gr. & POT, Solis elev.] + Tang. TOV [diff. POV, 48 gr. & POT, Solis elev.]

In ellipsis fig. 1. Latus transversum VR = TR + TV = Tang. TOR [summæ AOR, 42 gr. & AOT, compl. OAT Solis elev.] + Tang. TOV [differentiæ AOV, 42 gr. & AOT, compl. Solis elev.] In ellipsis fig. 2. Latus transversum VR = TR — TV = Tangent. TOR [summæ AOR, 42 gr. & AOT, compl. elev. Solis] — Tang. TOV, [differentiæ AOV, 42 gr. & AOT, compl. elevat. Solis.]

N°. XXXVI.

N°. XXXVI.

DE INVENIENDA CUJUSQUE PLANI DECLINATIONE,

ex unica observatione projectæ a stylo umbræ.

Per JAC. BERNOULLI.

PRo hac invenienda varii varias invenerunt methodos: sed cum ad artis perfectionem conducat, in re præsertim non adeo facili & obvia, nosse vias plurimas, quibus eadem conficiatur; exponam hic modum, quo declinatio Plani cujuscunque, ex unica observatione umbræ in illo projectæ, mediante tamen Solis azimutho reperiri possit. Quem quidem modum, ut omnibus accommodarem casibus, sequenti typo inclusi. *Acta Erud. Lips. 1689. Jun. p. 311.*

In Plano proposito ducantur duæ lineæ rectæ, una horizontalis, altera perpendicularis, priorem ad angulos rectos secans; in intersectione linearum erigatur stylus notæ longitudinis normaliter ad planum, & splendente Sole notetur longitudo umbræ de illo sparsæ, angulusque, quem umbra cum perpendiculari constituit. Quibus cognitis, tum declinatio Plani a verticali Solis, tum altitudo Solis, indeque ejus azimuth, Planique declinatio a meridiana investigabuntur, ut sequitur.

Planum autem *Verticale* appello, quod cum Horizonte angu-

Num. XXXVI. lum rectum constituit: *Reclinatum*, quod obtusum: *Inclinatum*, quod acutum.

Inclinationem voco ipsam quantitatem anguli acuti, quem Planum inclinatum cum horizonte constituit: *Reclinationem* vero anguli illius obtusi, quem Planum reclinatum cum Horizonte facit, complementum ad 180.

Azimuthum Solis est arcus Horizontis interceptus inter quadrantem Solis verticalem, & Punctum meridiei; qui arcus quadrante major esse potest.

In omni Plano,

Sicubi necesse est; explorare distantiam Solis a polo Plani, fiat: Ut stylus ad umbram; ita Sinus totus ad Tangentem distantiæ Solis quæsitæ.

In Verticalibus,

I. Si *nulla umbra:* Planum non declinat a Solis verticali, & Sol est in Horizonte.

II. Si *umbra perpendiculariter deorsum vergit:* Planum non declinat a Solis verticali; altitudo autem Solis est æqualis distantiæ illius a polo Plani.

III. Si *umbra cadit horizontaliter:* Sol est in Horizonte; declinationem autem Plani a Solis verticali mensurat vicissim ejus distantia a polo plani.

IV Si *umbra cadit inter horizontalem & perpendicularem, & altitudo Solis supponitur quadrante explorata:* erit:

Ut Sinus totus ad Tangentem anguli perpendicularis & umbræ; ita Tangens altitudinis Solis ad Sinum declinationis Plani a verticali Solis.

non supponitur cognita, utrumque sic explorabitur:

α. Ut stylus ad umbram; ita Sinus anguli perpendicularis & umbræ ad Tangentem declinationis Plani a verticali Solis.

β. Ut Sinus totus ad Tangentem complementi anguli perpendicularis

dicularis & umbræ; ita Sinus declinationis plani a verticali Solis ad Tangentem altitudinis Solis. Num. XXXVI.

In Reclinatis,

I. Si *nulla umbra*: Planum non declinat a Solis verticali; altitudo vero Solis est æqualis complemento reclinationis.

II. Si *umbra perpendiculariter deorsum vergit*, erit aggregatum ex distantia Solis a polo Plani & complemento reclinationis [siquidem quadrante minus sit] Solis altitudo, nec declinabit Planum a Solis verticali: at si aggregatum illud sit quadrante majus; erit ejus complementum ad 180 gr, Solis altitudo, Planique facies ab illius verticali abest integro semicirculo.

III. Si *umbra perpendiculariter sursum tendit*, non declinat Planum a Solis verticali, sed distantia Solis a polo Plani subtracta ex complemento reclinationis, erit residuum Solis altitudo.

IV. Si *umbra cadit horizontaliter*, *& altitudo Solis quadrante explorata habetur*: erit

Ut Sinus totus ad Tangentem altitudinis Solis: ita Tangens reclinationis ad Sinum complementi declinationis Plani a Solis verticali.

non habetur per quadrantem, utrumque sic invenitur:

α. Ut Sinus reclinationis ad Sinum totum; ita Tangens distantiæ Solis a polo Plani, ad Tangentem declinationis Plani a Solis verticali.

β. Ut Sinus totus ad Sinum complementi declinationis Plani a Solis verticali: ita Tangens complementi reclinationis ad Tangentem altitudinis Solis.

V. *Si umbra cadit inter horizontalem & perpendicularem*, *& altitudo Solis cognita habetur*, erit

Ut Sinus complementi altitudinis Solis, ad Sinum anguli perpendicularis & umbræ, ita Sinus distantiæ Solis a polo Plani,

 ad

Num. XXXVI. ad Sinum anguli, qui ipsam exhibet declinationem Plani a verticali Solis [siquidem hæc declinatio quadrante non sit major;] secus enim anguli illius complementi ad 180° est quæsita declinatio, ubi hæc quadrantem excedere debet: quod cognoscitur perpendiculo, cujus umbra si infra lineam horizontalem cadit, indicio est, murum plus 90° declinare.

Si non est cognita, utraque sic investigabitur.

α. Ut stylus ad umbram, ita Sinus complementi anguli perpendicularis & umbræ, ad Tangentem segmenti cujusdam [addendi ad reclinationem, ubi umbra styli supra lineam horizontalem spargitur; aut subtrahendi a reclinatione, illave minuendi, ubi infra dictam lineam projicitur].

β. Ut Sinus summæ vel residui, ad Sinum segmenti modo inventi; ita Tangens anguli perpendicularis &, umbræ ad Tangentem anguli, qui exhibet declinationem Plani a Solis verticali [ubi segmentum modo dictum minus est reclinatione;] secus enim illius anguli complementum ad 180° declinationem Plani modo dictam metitur, sicubi segmentum illud reclinatione majus fuerit.

γ. Ut Sinus complementi segmenti [modo additi, ablati, minutive] ad Sinum complementi summæ vel residui; ita Sinus complementi distantiæ Solis a polo Plani, ad Sinum altitudinis Solis.

In Inclinatis,

I. *Si umbra perpendiculariter deorsum vergit:* Planum non declinat a Solis verticali; complementum vero inclinationis subtractum a distantia Solis a Plani polo relinquit Solis altitudinem.

II. *Si umbra cadit horizontaliter:* Sol est in Horizonte, Planumque stringit; quare declinatio Plani a Solis verticali est 90. gr.

III. *Si umbra spargitur inter perpendicularem & horizontalem, & altitudo Solis per quadrantem habetur*, erit

Ut

Ut Sinus complementi altitudinis Solis, ad Sinum complementi anguli perpendicularis & umbræ, ita Sinus diſtantiæ Solis a polo Plani ad Sinum declinationis Plani a verticali Solis. Num. XXXVI.

Si non habetur, utraque ſic inveſtigabitur:

α. Ut ſtylus ad umbram; ita Sinus complementi anguli perpendicularis & umbræ ad Tangentem ſegmenti, a cujus complemento ad 180° ſubtrahatur inclinatio.

β. Ut Sinus reſidui ad Sinum ſegmenti; ita Tangens anguli perpendicularis & umbræ ad Tangentem anguli declinationis Plani a verticali Solis.

γ. Ut Sinus complementi ſegmenti, ad Sinum complementi reſidui; ita Sinus complementi diſtantiæ Solis a polo Plani, ad Sinum altitudinis Solis.

Exploratis ita declinatione Plani a verticali Solis, hujuſque altitudine [unde azimuthum ejus via communi elici poteſt] ita porro declinatio Plani ab ipſa Meridiana inveſtigatur.

Obſervatione facta

Ante meridiem;

I. *Si umbra reſpectu tui ante Planum conſtituti a linea perpendiculari ſpargitur dextrorſum*: adde azimuth ad declinationem Plani a Solis verticali: Aggregatum [ſi minus eſt 90°] dat *declinationem a meridie ad ortum*; [ſi 90°] *orientale directum*; [ſi majus 90°] ejus complementum ad 180° dat *declinationem a ſeptentrione in ortum*; [ſi 180°] *ſeptentrionale directum*; [ſi majus 180°] demtis 180°, relinquitur *declinatio a ſeptentrione in occaſum*; [ſi 270°] *occidentale directum*; [ſi majus 270°] ejus complementum ad 360° relinquit *declinationem a meridie in occaſum*.

II. *Si umbra ſpargitur ſiniſtrorſum*: ſubtractis vel *Declinatione Plani a verticali Solis & azimutho*, [ſi nihil remanet] eſt *meridionale directum*; [ſi quod remanet, eſt minus 90°] *declinatio eſt a meridie in ortum*; [ſi 90°] *Orientale directum*; [ſi majus 90°] ejus complementum ad 180 dat *declinationem a ſeptentrione in ortum*.

Num. XXXVI. *Azimutho a declinatione Plani a verticali Solis* [si nihil remanet] est *meridionale directum*; [si remanet minus 90°] *declinatio est a meridie in occasum*; [si 90°] *occidentale directum*; [si majus 90°] ejus complementum ad 180° dat *declinationem a septentrione in occasum.*

Post meridiem;

I. *Si umbra cadit dextrorsum*: subtractis vel

Declinatione Plani a verticali Solis ex azimutho; [si nihil remanet] est *meridionale directum*; [si minus 90°] *declinatio est a meridie in occasum*; [si 90°] *occidentale directum*; [si majus 90°] ejus complementum ad 180° dat *declinationem a septentrione in occasum.*

Azimutho a declinatione Plani a Solis verticali: [si nihil remanet] est *meridionale directum*; [si minus 90°] *declinatio est a meridie in ortum*; [si 90°] *orientale directum*; [si majus 90°] ejus complementum ad 180°, dat *declinationem a septentrione in ortum.*

II. *Si umbra cadit sinistrorsum*: adde azimuth ad declinationem Plani a Solis verticali: Aggregatum [si minus est 90°] dat *declinationem a meridie in occasum*; [si 90°] *occidentale directum*; [si majus 90°] ejus complementum ad 180° dat *declinationem a septentrione in occasum*; [si 180°] *septentrionale directum* [si majus 180°] demtis 180° relinquitur *declinatio a septentrione in ortum* [si 270°] *orientale directum* [si majus 270°] ejus complementum ad 360° dat *declinationem a meridie in ortum.*

OBSERVANDA.

I. Necessum non est, ut stylus muro sit infixus perpendiculariter: possumus uti gnomone quocunque fortuito inserto; dummodo (quod facile fieri potest) determinetur in muro punctum illud, quod omnium brevissime distat a styli apice, & per hoc

hoc punctum normaliter agantur duæ istæ lineæ, horizontalis & perpendicularis: tum enim distantia inter apicem styli & hoc punctum repræsentabit longitudinem styli; distantia inter punctum illud & extremitatem umbræ referet longitudinem umbræ, &c. Num. XXXVI.

2. Sed nec opus est, cuilibet Plano examinando stylum infigere: poterimus Instrumento uti ad id jam præparato, omnibusque indifferenter Planis applicando, quale (exempli gratia) pro Planis verticalibus esse potest gemina norma CAB & EFG, *Fig.* 1. quarum illa sit crurum æqualium, & utrique cruri inscriptas habeat divisiones sinuum pro singulis gradibus, sumpta longitudine alterutrius cruris pro radio; in concursu vero crurum erectum normaliter stylum AD, cujus longitudo sit æqualis radio. Volens enim explorare declinationem Plani verticalis, applica alterutrum normæ hujus latus lineæ perpendiculari in Plano ductæ IH, sic ut umbra de stylo sparsa AL utrique cruri interjaceat: dehinc volve alterius normæ GFE crus brevius FE super linea perpendiculari Plani IH sursum deorsumve, donec crus longius FG (quod capiat divisiones tangentium ad 60° vel 70°) *Fig.* 2. transeat per apicem umbræ; tum enim gradus abscissi FL exhibebunt declinationem Plani a verticali Solis: hos ipsos gradus numera simul in crure horizontali normæ BAC, atque in fine numerationis applica illi crus brevius normæ GFE, sic abscindet umbra gnomonis in crure longiori gradus altitudinis Solis.

3. Observatio non instituatur prope meridiem, aut Sole multum elevato, sed duabus tribusve horis ante vel post, tempore & loco, ubi paralleli Solis sunt maxime declives: quia error unius minuti prope meridiem integros gradus in azimutho involvere potest.

4. Pro operationis certitudine consultum est, eodem aut differentibus diebus, illam ter quaterve repetere; cum vix caveri possit, ne in singulis aliquot minutorum differentia reperiatur: Quare tum inter omnes declinationes mediam assumere expediet.

ANNO

Num. XXXVI.

ANNOTATIO.

Tab. XII. b No. 36.

HÆc inveniendæ cujuſque Plani propoſiti declinationis ratio tota pendet ex Trigonometria Sphærica. Sit (*Fig.* 1.) Planum propoſitum verticale ZHNR; SP ſtylus, quem ad Sphæram uſque Solis productum fingimus, ut ibi deſignet P, polum Plani; HR, linea horizontalis per quam ducatur planum HPR horizontale; ZN, linea verticalis, per quam planum ZPN verticale, in quo ſignentur Z, Zenith, & N, Nadir.

Igitur I. *Si nulla umbra*; Sol eſt in P.

II. *Si umbra perpendicularis*, Sol ponitur in Ω, ejuſque altitudo PΩ.

III. *Si umbra horizontalis*, Sol ponitur in A, ejus verticalis ZA; declinationem Plani a verticali Solis PZA metitur arcus PA.

IV. *Si umbra obliqua*, Sol ponitur in O; ubi PO, diſtantiam Solis a polo Plani; OA altitudinem ejus; OPZ angulum perpendicularis & umbræ quæ in plano MOP per Solem & ſtylum ducto ſpargitur; denique OZP, declinationem Plani a verticali Solis deſignat, atque inſtituta Trianguli ZOM, in M rectanguli; Analyſis juxta vulgares Trigonometriæ ſphæricæ regulas, Autoris noſtri Analogias ſuppeditat.

Sit deinde Planum propoſitum reclinatum HBRC (*Fig.* 2) SP ſtylus, P Polus plani; HR linea horizontalis, & BC huic perpendicularis in plano ducta, per quas agantur Plana propoſito perpendicularia HPR, & BPC, quod erit verticale. Sit præterea HIR horizon; Z, Zenith; unde IC, vel ZP, reclinatio Plani.

Et I. *Si nulla umbra*, Sol exiſtit in P, ejus altitudo PI, complem. IC, vel PZ.

II. *Si umbra perpendicularis deorſum*, Sol in D; ejus altitudo DI = DP + PI; vel Sol in Δ, ejus altitudo = Semic. minus ΔI [ΔP + PI]

III. *Si umbra perpendicularis ſurſum*; Sol in *d*, ejus altit. *d*I = PI — P*d*.

IV. *Si umbra horizontalis*, Sol erit in *o*, & Analyſis Trianguli rectanguli ZP*o*, dat Autoris noſtri analogias.

V. *Si umbra obliqua*, Sol erit in O vel in Ω, & ex conſideratione Trianguli ZPO, vel ZPΩ, eruitur Analogia prima. Reliquæ tres, α, β, γ, habentur, demittendo OD, vel Ω*d* perpendiculariter in BDC. Eſt enim PD vel P*d*, ſegmentum illud, quod ex Analogia α invenitur.

Deni-

Denique sit Planum inclinatum, *Fig.* 3. in qua eadem eisdem literis uibus in 2ª. designantur, nisi quod hic, Horizontis HAR pars superior, una cum Zenith, lateat, Nadir N conspiciatur, & PI sit Plani nclinatio. Num. XXXVI.

I. *Si umbra perpendicularis*, Sol est in D, ejus altitudo DI = PD — PI.

II. *Si umbra horizontalis*, Sol est in H, vel R,

III. *Si umbra obliqua*, Sol est in O, & Analysis Trianguli NOP dat Analogiam primam.

Reliquæ α, β, γ, habentur, demisso arcu OD ad BDC perpendiculari. Hic enim resecat segmentum PD, cujus magnitudo per Analogiam α supputatur.

Quæ sequuntur nihil habent difficultatis.

N°. XXXVII.

VERA CONSTRUCTIO GEOMETRICA PROBLEMATUM SOLIDORUM ET HYPERSOLIDORUM,

Per rectas lineas & circulos.

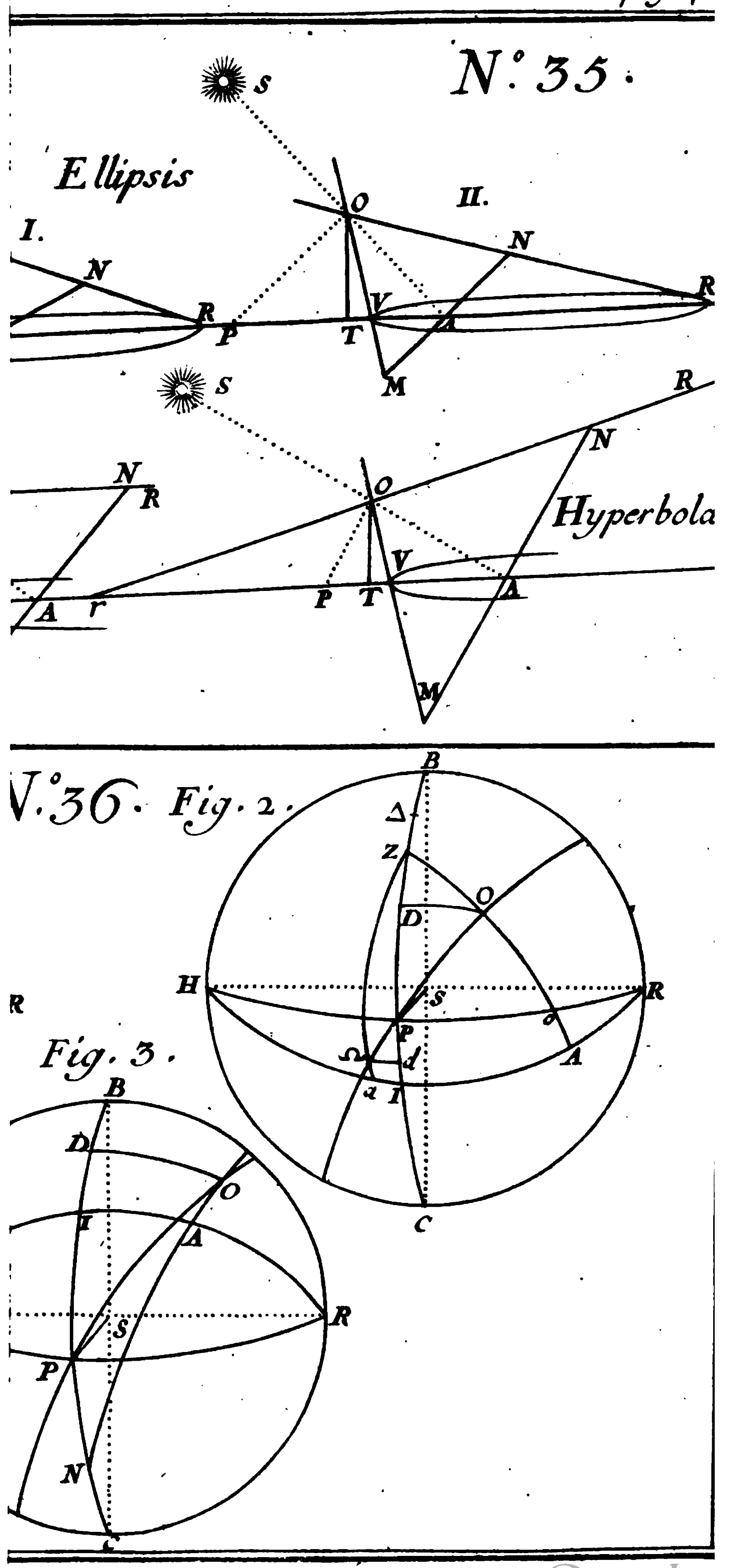
Auctore JACOBO BERNOULLI.

Quadratura circuli, Inventio quarundam mediarum proportionalium inter datas rectas, Cubi Duplicatio, Trisectio Anguli, &c. Problemata fuere, ab omni retro memoria, vexatissima & antiquitus usque adeo celebratissima. Inter illa, *Acta Erud. Lips.* 1689. Sept. pag. 454.

Num. XXXVII. illa, hoc intercedere notatur discriminis, quod Circuli Tetragonismus nullatenus, vel calculo exhiberi, vel constructione accurata confici, huc usque potuit; dum cætera construi quidem possunt, sed ita ut ad ipsorum constructionem requirantur lineæ, quas Veteres, ob difficilem & incommodam earum delineationem, non omnino in Geometriam admittere ausi fuerunt: quapropter præstantissimi omnium seculorum Geometræ, in rei arduæ molimine quærentes gloriam, eo semper omnes suas vires intenderunt, ut tum circulum, si qua possent arte, quadrarent, tum reliqua memoratorum Problematum, linearum rectarum & circulorum ope, construerent. Quorum tamen utrumque pari difficultate involutum senserunt; quousque a perspicacioribus ingeniis omnimoda utriusque impossibilitas, hoc nostro ævo, detecta fuit. Hac itaque visa, alia sibi incedendum esse via rati sunt; cumque Circuli exactum valorem uno aliquo numero exhiberi posse impossibile ducerent, eundem saltem per seriem infinitorum numerorum exprimere sunt annisi; qualem omnium primus initio horum *Actorum* vulgavit Celeberrimus LEIBNITIUS. Ei, quod hic in quadrando circulo præstitit, simile nunc ego quiddam, circa reliqua illa, & in genere circa omnia solida, multaque etiam hypersolida Problemata aggredior; & quod circini normæque ope, una aliqua constructione, accurate consequi hactenus non licuit, hoc per seriem, ut sic dicam, constructionis, certa lege in infinitum continuandæ, exequor; eaque ratione id obtineo, ut quæsitæ radici ita continuo magis magisque appropinquetur, ut error tandem data quavis quantitate minor fiat; totaque adeo constructionis series exactum ejus valorem exprimere debeat.

Notum, omnes æquationes cubicas, ad quas Problematum solidorum difficultates referuntur, ad unam harum formularum reduci posse: $x^3 = -apx + aaq$, $x^3 = -apx - aaq$, $x^3 = +apx + aaq$ & $x^3 = +apx - aaq$; quarum prima habet unam radicem veram, altera unam falsam, tertia unam veram cum duabus falsis, & quarta unam falsam cum duabus veris.

I. Pro


N.° 35.
Ellipsis
I.
II.
S
O
N
R
P
T
V
A
M
Hyperbola
r
N.° 36. Fig. 2.
B
Δ
Z
O
D
H
S
R
P
d
a
I
A
C
Fig. 3.
B
D
O
I
A
S
R
P
N

Num. XXXVII.

1. *Pro invenienda Radice vera Æquationis* $x^3 = -apx + aaq$, *aut falsa hujus* $x^3 = -apx - aaq$.

Constr. Ductis (*Figura* 1.) indefinitis rectis BP, GV, normaliter se decussantibus in puncto A, assume in earum una $AH = a$, & ex eadem parte $AG = \frac{1}{2}p$; in altera $AB = q$, & in parte opposita punctum utcunque P; tum ita perge: *Fig.* 1.

BP	describ.	V	& ipsi	AV	fiat	AC	distantiæque	GC	sumatur	GL	diametroque	HL	describ.	Q
BQ	arcus	X		AX	=	AD		GD	=	GM		HM	arcus	R
BR	circuli	Y		AY		AE		GE		GN		HN	circuli	S
BS	secans AV in	Z		AZ		AF		GF		GO		HO	secans AP in	T, &c.

Ubi observandum, quod si punctum P casu sic assumptum fuerit, ut, facta deinceps circini revolutione, punctum Q coincidat cum puncto P; erit AP, vel AQ, ipsa quæsita radix accurata: sin minus, rectæ AP, AQ, AR, AS &c. ad verum valorem radicis continuo magis magisque, & tandem data quavis quantitate propius accedent.

2. *Pro invenienda Radice vera Æquationis* $x^3 = +apx + aaq$ *aut falsa hujus*, $x^3 = +apx - aaq$.

Constructio (*Figura* 2.) eadem, quæ præcedens, nisi quod AH & AG ad partes oppositas sumendæ, & GL, GM, GN, &c. non deorsum versus A, sed sursum abscindendæ sunt: qua ratione lineæ AP, AQ, AR &c. valori radicis, ut prius, magis magisque appropinquabunt. *Fig.* 2.

3. *Pro inveniendis Radicibus falsis Æquationis* $x^3 = +apx + aaq$ *aut veris hujus* $x^3 = +apx - aaq$.

Fiat, ibidem $Ab = AB$, sumptoque AR quam minimum & insensibiliter differre a radice vera prioris, aut falsa posterioris æquationis, (prout illa per præcedentem constructionem reperta fuit) jungatur RH, eique parallela ducatur bh, factisque $As = \frac{1}{2}AR$, & $Ag = Ah$, diametro gH describatur arcus circuli

Num. XXXVII. culi secans AP in l, aliusque centro s radio As, quem secet, vel tangat recta lq parallela ipsi AG in punctis p & q; eruntque lp, lq, binæ radices quæsitæ.

Nota. Si circulum centro s descriptum non secet, vel tangat recta lq (quod fit, cum ultimus æquationis terminus major est quarta parte cubi, aut quantitas cognita penultimi minor tribus quartis partibus quadrati radicis AR; aut etiam cum quadratum semissis ultimi majus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi:) indicio est, duas reliquas radices esse imaginarias.

Fig. 3. *Aliter per peculiarem constructionis seriem:* Fiant eadem, quæ supra, (*Figura* 3.) nisi quod rectæ AC, AD, AE &c. (Ac, Ad, Ae &c.) non jam capiendæ sunt in linea AB, sed applicandæ semicirculo super diametro AG descripto; distantiisque GC, GD, GE &c. æquales abscindendæ GL, GM, GN &c. sursum pro majore radicum quæsitarum (saltem in primo sequentium casuum:) & ipsis Gc, Gd, Ge &c. æquales Gl, Gm, Gn &c. deorsum pro minore: Ubi cavendum, ne punctum P [p] quod constructionem inchoat, assumatur, vel prope, vel remote nimis a puncto A; fieri enim posset, ut sic assumptum alteruttram rectarum AC vel AD [Ac, Ad] majorem exhiberet, quam quæ circulo inscribi posset: facile autem assignari possunt limites, intra quos si capiatur punctum P, id incommodi evitabitur; nam

Fig. 4. 1. *Si Quadratum ultimi termini minus est Cubo semissis quantitatis cognitæ penultimi:* Sumatur (*Fig.* 4.) ad BA & AG tertia proportionalis AM, ut & tertia ad HA & inventam AM, quæ sit AL, major scilicet futura ipsa AG; hinc semicirculo applicetur GC = GL, junctaque AC quæratur tertia proportionalis ad AB & AC, quæ sit AN: eruntque puncta M & N limites, quos intra quodvis punctum accipi poterit pro invenienda radice majore: pro minore nullo indigemus limite ex parte A, sed quodvis punctum inter A & M pro initio constructionis accipi poterit; quod & de radice majore intelligendum, quando ipsa GL major est, quam ut semicirculo inscribi possit.

2. Si

2. *Si Quadratum ultimi termini æquale est Cubo semissis quantitatis cognitæ penultimi*; limites M & N indistantes fiunt; proinde ipsa AM vel AN est radix major. Num. XXXVII.

3. *Si Quadratum ultimi termini majus est Cubo semissis quantitatis cognitæ penultimi*, radix major consistit in indivisibili, hoc est, quo diutius continuatur constructio, eo longius ex utraque parte ab ejus genuino valore receditur: quare tum sola minor appropinquando inveniri poterit: qua tamen cognita, nec major latebit amplius; quandoquidem ambarum summa tertiam radicem, supra per constructionem figuræ secundæ inventam, perpetuo, ut notum est, in istis æquationibus æquat. Sumpto igitur rectam AR huic tertiæ radici proxime accedere, ut statuminentur porro limites pro invenienda altera, bisecetur AR; poteritque punctum quodvis in sinistra ejus medietate acceptum pro operationis initio statui.

4. *Si denique Quadratum semissis ultimi termini æquet Cubum trientis quantitatis cognitæ penultimi*, erit quæsita radix utraque æqualis semissi rectæ AR: *sin Cubum hunc superet*, constat utramque esse imaginariam; quare nec per hanc constructionem ulla inveniri potest.

Cæterum observare non injucundum, quo pacto in omnibus istis constructionibus rectæ AP, AQ, AR, AS &c. [Ap, Aq, Ar, As &c.] (*fig.* 1. 2. 3.) continuis, vel incrementis, vel decrementis, vero radicum valori appropinquant; præterquam pro sola radice majore figuræ tertiæ, ubi alternis, nunc decrementis, nunc incrementis ad ejus valorem accedunt: sic ut verus radicis valor ibi exprimatur per seriem infinitam: AP + PQ + QR + RS &c. vel AP — PQ — QR — RS &c. hic per seriem: AP + PQ — QR + RS — ST &c.

Quemadmodum vero nulla jam dari potest æquatio cubica, quæ non eo reduci possit, ut juxta allata præcepta, solius circini & normæ ope, construi queat; ita similes omnino afferre possem regulas pro constructionibus æquationum quatuor dimensionum, si Lectori voluptatem easdem proprio marte eruendi præripere vellem. Unam exempli loco dabo, pro æquatione $x^4 * + apxx -$

Num. XXXVII. $aaqx - a^3 r = 0$, ad quam construendam eadem prorsus observanda, quæ fieri jubentur in *figura* 1. nisi quod insuper in recta BP abscindenda est, ex A, in alterutram partem recta Ar, quæ sit media proportionalis inter a & r; & tum rectæ AC, AD, AE &c. non ipsis AV, AX, AY &c. sed distantiis rV, rX, rY &c. æquales capiendæ.

Subjungo nunc applicationem novæ hujus construendi methodi ad nobilissimum Problema de Inventione quarundam mediarum proportionalium.

Fig. 5.

α. Invenire duas medias proportionales inter duas datas: (Fig. 5.)

Constructio: Ductis normalibus indefinitis CB, NR, sese ad rectos angulos secantibus in A; abscindantur ex earum una rectæ AC, AB, æquales datis: quo facto

	BC --		AN --		N --		AN --		AH --	
	-- CH		-- AR		-- R		-- AR		-- AD	
Dia-	BD --	describ. arcus	AN --		O --	ipsi-	AO --		AI --	
me-	--- CI	circuli se-	-- AR	in	-- S	que	-- AS	fiat =	-- AE	
tro.	BE --	cans	AN --		P --		AP --		AL --	
	-- CL		-- AR		-- T		-- AT		-- AF	
	BF --		AN --		Q --		AQ --		AM --	&c.

Hac ratione rectæ AD, AE, AF &c. magis magisque appropinquabunt primæ & rectæ AH, AI, AL, &c. secundæ duarum mediarum proportionalium inter datas AC & AB; quousque easdem post infinitam operationis seriem præcise assequantur.

Fig. 6.

β. Invenire quatuor medias proportionales: (Fig. 6.)

	BC		N		AN		AH		AH		AD	
Diametro	BD	describ. arcus circuli secans AN in	O	ipsique	AO	fiat =	AI	Hinc quæratur per præcedent. prima 2 med. proport. inter AC &	AI	quæ fit	AE	
	BE		P		AP		AL		AL		AF	&c.

Hac

N°. 36.

Fig. 2.

Fig. 2.

Fig. 3.

Hac ratione ipsæ AD, AE, AF &c. accedent primæ & AH, AI, AL &c. tertiæ quæsitarum quatuor proportionalium inter AC & AB, Num. XXXVII.

7. Invenire sex medias proportionales: (Fig. 7.) *Fig. 7.*

Datæ sint, sicut antea, CA, & AB; & fiat AQ = AC; tum vero

Dia-	BC - - - -	def-	AN - - - -		N - -		AN		AH	
me-	- - CH - -	crib.	- - AR - -		- R -		- -		- -	
tro	- - - - QR	arcus	- - - - AC	in	- - D	ipsi-	- -	fiat	- -	
	BD - - - -	circu-	AN - - - -		O - -	que	AO	=	A I	
	- - CI - -	li se-	- - AR - -		- S -		- -		- -	
	- - - - QS	cans	- - - - AC		- - E		- -		- -,	&c.

Quo pacto ipsæ AD, AE &c. appropinquabunt primæ; AR, AS &c. secundæ; & AH, AI &c. quartæ sex mediarum proportionalium.

In plerisque harum, ut & superiorum constructionum, hoc peculiare annotamus, quod delineatis semel normalibus indefinitis, & abscissis rite datis, cætera constructio, seu appropinquatio, fieri possit, ut circinus non amoveatur e charta, sed perpetuo alternis super illa pedibus incedat, & quasi in orbem ambulet; si modo concedatur rectæ bisectio mechanica, quæ nunc aperiendo, nunc claudendo circinum, peragitur.

Observandum etiam, non necessum esse, ut diametro CB arcus describatur, ad determinanda puncta H & D: potest enim alterutrum horum, initio statim operationis, accipi ad lubitum, & ab illo inchoari constructio: & quidem si constructionem compendifacere desideres, poteris rectas AH vel AD tales assumere, quas, judicio oculorum, æstimaveris, aut aliunde sciveris, quæsitis proportionalibus quam proxime accedere.

Qualescunque vero assumantur; plerumque paucæ admodum circini revolutiones requiruntur, ut error penitus insensibilis evadat: adeo ut, præter geometricam hujus negotii ἀκρίβειαν, ad ipsam quoque praxim mechanicam vix quicquam accuratius & expe-

Num. XXXVII. expeditius dari possit: quod si quis secum rite pensitaverit, fatebitur, & hoc invento, non levem Geometriæ accessionem factam esse.

ANNOTATIO.

Harum constructionum fundamentum videsis N°. LIV. Propp. 29-35. ex quo non difficile est singulas demonstrare. Videri etiam potest *March.* HOSPITALII *Tractatu Analyticus de Sectionibus Conicis*, Lib. IX. Prop. 12. pag. 351-358.

N°. XXXVIII.

NOVUM THEOREMA PRO DOCTRINA SECTIONUM CONICARUM,

Per JAC. BERNOULLI.

Act. Erud. Lips. 1689. Nov. p. 586

MIRUM est, in materia Veteribus ac Recentioribus adeo trita, relictum esse aliquid, quod eorum industriam adhuc effugerit; præsertim proprietatem adeo generalem, cujusmodi est hæc, quæ sequitur:

Si in triangulo per axem coni ACD, demittatur a vertice in basin perpendicularis AI, & ex ea abscindatur AN, æqualis perpendiculari AB, ex eodem vertice A in diametrum ex generatione coni-sectionis HO demissæ; ac per N agatur FE parallela

lela basi, secans crura trianguli per axem in F & E; erit FE Latus Rectum coni-Sectionis. Num. XXXVIII.

DEMONSTRATIO.

Ducantur AQ & AL parallelæ diametro HO & basi CD, uarum prior secet ipsam FE in G; eruntque Triangula FAG, IAL, HCO, ut & AGE, MLA, MOD, similia: sed & ıL = AG [est enim angulus LAN = angulo BAG, demptoque communi BAN, angulus LAB = NAG; præterea anguli ıBL, ANG, recti, & latus AB = lateri AN, ac propterea Triangula ABL, ANG similia & æqualia] Hinc

1. In *Parabola.* FG : AF = AL [AG] : AH; quare Rectangulum FAG = AH × FG. Sed, ex Apollonio *, Rect. FAG [AH × FG]: FG^2 [= AH : FG] = AH : R. Latus rectum Parabolæ.] Ergo FG vel FE = R. *Q. E. D.*

Idem ex alia proprietate Parabolæ: HO : CO = AG [AL vel OQ] : FG. Hinc HO × FG = COQ = OP^2 = [ex natura Parabolæ] HO × R. Ergo FG vel FE = R. *Q. E. D.*

2. *In Hyperbola & Ellipsi:* FG : AG = AL : LH (unde FG × LH = GAL.) Item AG : GE = ML : AL; quare *ex æquo perturbate*, FG : GE = ML : LH; &, *componendo* seu *dividendo*, FE : GE = MH : LH; *permutandoque* FE : MH = GE : LH = FGE : FG × LH [GAL seu GA^2] = R : MH, ex Apollonio †. Ergo FE = R. *Q. E. D.*

Idem ex alia proprietate harum Sectionum:

GE : AG = LA : ML, & AG : FG = LH : LA, unde *perturbate* & *composite*, vel *divisim*, ut antea, *permutandoque* FE : MH = GE : LH = GE : AG + AG [AL] LH = OD : MO + OC:

* Conic. I. 11.
† Conic. I. 12. & 13.

Num. XXXVIII OC : HO = COD [OP^2] : MOH = R : MH, ex natura Sectionum. Ergo FE = R. *Q. E. D.*

3. *In Circulo* basi subcontrarie posito, res evidentior est, quam ut demonstratione indigeat.

Demonstratio universalis pro omnibus sectionibus.

Ducatur HZ basi parallela, secans ipsam AQ in X; eritque HZ : FE = HX [LA seu AG] : FG = HO : OC = HZ : R; per ea quæ habet WALLISIUS in *Tractatu de Sectionibus Conicis* pag. 28. 37. & 43. Ergo FE = R. *Q. E. D.*

Corollarium I. Si centro A, radio quocunque AB, in plano trianguli per axem, descriptus sit circulus, & circa illum rotetur planum BO, tangens subinde ejus peripheriam, secansque basin coni secundum rectam OP, quæ basi trianguli per axem perpendicularis est, omnes hac rotatione genitæ Coni-Sectiones, sive Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipses, sive denique Circuli, idem habebunt Latus rectum, æquale videlicet rectæ FE.

Corollarium II. Quia AI : CD = AN [AB] : FE [R]; sequitur, in quavis Coni-Sectione, Latus rectum esse quartam proportionalem ad AI, CD & AB. Unde, vel ex hoc indicio, colligo, nihil hucusque constitisse Conicorum Scriptoribus de hoc Theoremate; cum non verisimile sit, illos (si scivissent) designaturos fuisse rationem Parametri ad aliam rectam, per rationem Quadrati CD ad Rectangulum CAD (ut in Parabola) aut Rectanguli CQD ad Quadratum AQ (ut in Hyperbola & Ellipsi,) quam tamen per simplicem rationem rectarum constantium CD & AI, & quidem universaliter in quavis sectione, characterisare potuissent.

Cum Fratri hæc aperuissem, mox eadem suis quoque demonstrationibus munivit; quas, quia non inconcinnæ mihi visæ sunt, hic subjungam; quod in novo Theoremate facile merebitur veniam:

1. *In Parabola* : FG : HX = AG [HX] : AX; proinde HX^2

$HX^2 = FG \times AX$; est autem * $HA : R = HA \times AX : HX^2 [FG \times AX] = HA : FG$. Ergo FG vel $FE = R$. *Q. E. D.* Num. XXXVIII

Aliter. $AH : FG = AH : HX + HX : FG = AF : FG + HX [AG] : FG = AF \times AG : FG^2 = AH : R$ *. Ergo $FG = R$. *Q. E. D.*

2. *In Hyperbola & Ellipsi.* $MH : FE = MH : HZ + HZ : FE = AG : GE + AX : AG [HX] = AG : GE + AG : GF = AG^2 : EGF = MH : R$ †. Ergo $FE = R$. *Q. E. D.*

* *Apollon.* Conic. I. 11.
† *Apollon.* Conic. I. 12. & 13.

No. XXXIX.

JACOBI BERNOULLI
ANALYSIS
PROBLEMATIS ANTEHAC PROPOSITI.

De Inventione Lineæ descensus a corpore gravi percurrendæ uniformiter, sic ut temporibus æqualibus æquales altitudines emetiatur: & alterius cujusdam Problematis Propositio.

SOlutionem Problematis nudam dedit Illustrissimus HUGENIUS in *Novellis Roterodami:* Hanc postea excepit in *Actis Lips.* A. 1689. p. 195. *seqq.* Celeberrimi Auctoris * Demon- *Acta Erud. Lips. 1690. Mai. p. 217*

* G. G. LEIBNITII.

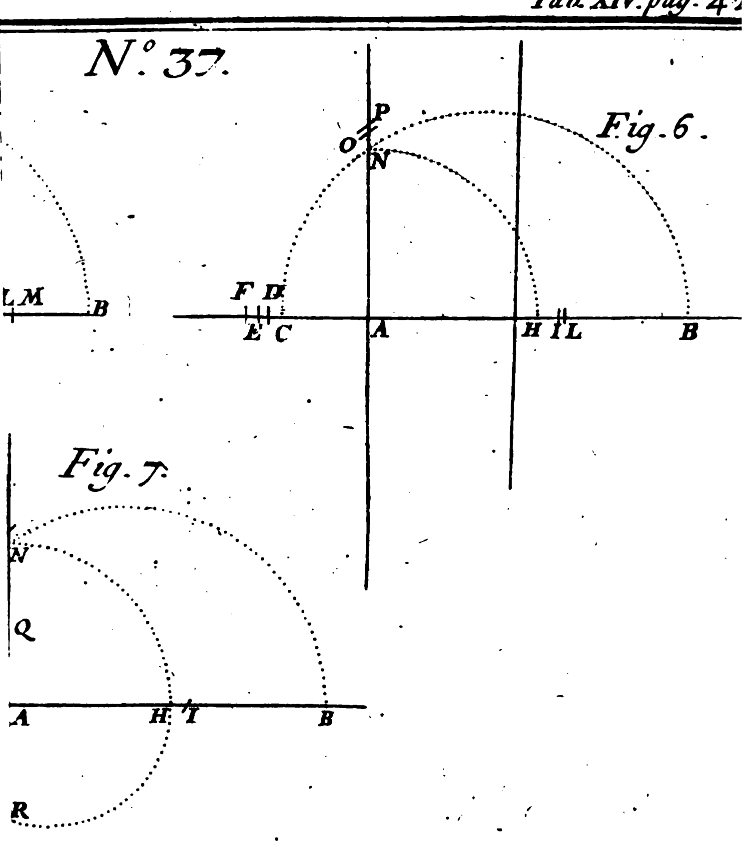
Num. XXXIX. monſtratio Synthetica. Analyſin, quam ſuppreſſit uterque, ipſius Auctoris calculo differentiali inſtitutam nunc pando; cum in finem, ut Virum Celeberrimum ad par officii genus publico præſtandum, tentandamque, ſua Methodo, Problematis deinceps proponendi ſolutionem invitem.

Intelligatur grave demiſſum ab A per curvam quæſitam BFG, in qua ſumptæ ſint particulæ infinite parvæ, adeoque pro rectis habendæ, DG, FH, altitudinum æqualium GI, HL; eæque producantur in M, N, ut fiant Tangentes GM, HN; ipſique HN parallela ducatur GP. Celeritates gravis acquiſitæ in G & H eædem ſunt cum iis quas acquireret, deſcendendo perpendiculariter, ab eadem linea horizontali AC, per rectas CG, EH, quæ quidem ſunt ut quadrata ipſarum celeritatum, ut notum. Quibus poſitis,

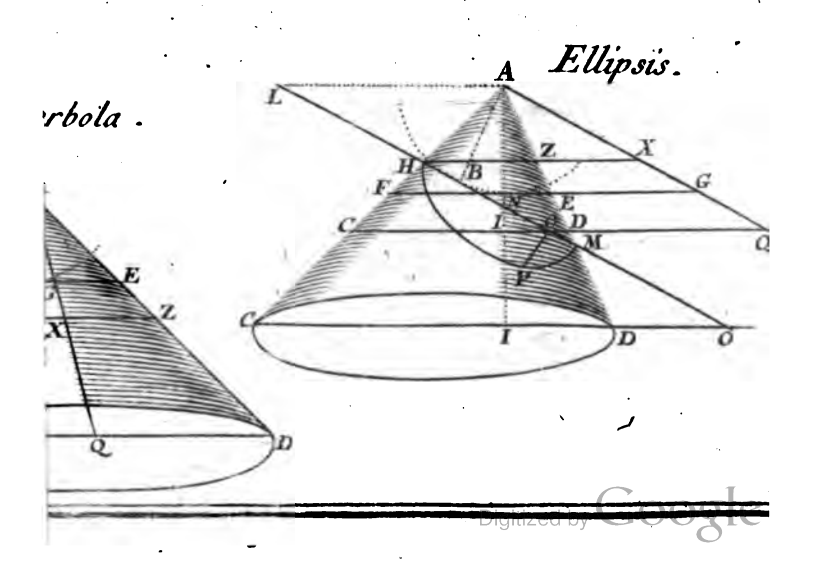
CG eſt ad EH, ut quadr. celeritatis in G, ad quadr. celeritatis in H, ut DGq ad FHq, ut DGq ad GIq & GIq [HLq] ad FHq, ut GMq ad GCq & HEq ad HNq, ut GMq ad GCq & GCq ad GPq, ut GMq ad GPq. Unde Problema, ad puram Geometriam reductum, huc redit: Datis poſitione recta AC, & puncto A; invenire curvam BHG talem, ut applicata CG ad applicatam EH rationem habeat duplicatam ejus, quam habet tangens GM ad rectam GP parallelam tangenti HN. Patet autem, rectam AC, ad quam applicantur CG, EH, non poſſe eſſe axem curvæ, nec A verticem: cum alias applicata ad punctum A evaneſceret, ac proinde applicatarum ratio fieret infinite magna, ejuſdem ſubduplicata manente finita. *Q. E. Abſ.*

ANA-

N°. 37.


Fig. 6.
P
O
N
F D
E C
A
H I L
B
L M
B
Fig. 7.
N
Q
A
H I
B
R

N°. 38.


Ellipsis.
rbola.
A
L
X
Z
H
B
G
F
N
E
C
L
D
M
Q
P
C
I
D
O
E
Z
X
Q
D

ANALYSIS.

Num. XXXIX.

$CG = a$	$HL : HF = GC : GP$
$GM = b$	$dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = a : \frac{a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$.
$AE = x$	$CG : EH = GMq : GPq$
$EH = y$	$a : y = bb : \frac{aadx^2 + aady^2}{dy^2}$.

$$a : y = bbdy^2 : aadx^2 + aady^2.$$
$$bbydy^2 = a^3 dx^2 + a^3 dy^2$$
$$bbydy^2 - a^3 dy^2 = a^3 dx^2$$
$$dy\sqrt{(bby - a^3)} = dx\sqrt{a^3}$$

Ergo & horum Integralia æquantur, nempe, $\frac{2bby - 2a^3}{3bb}\sqrt{(bby - a^3)} = x\sqrt{a^3}$; positoque $y - a^3 : bb = z$, habetur $\frac{2}{3}z\sqrt{bbz} = x\sqrt{a^3}$, vel $\frac{4}{9}bbz^3 = a^3xx$, & $z^3 = 9a^3xx : 4bb$. Quare demissa ex A perpendiculari $AB = a^3 : bb$, ductaque BR parallela ipsi AC, si vertice B, axe BR, & latere recto $9a^3 : 4bb$, seu $\frac{9}{4}AB$, describatur Curva paraboloidica BHG, ejus naturæ, ut solidum ex latere recto in quadratum abscissæ æquetur cubo applicatæ; habetur quæsitum. Porro, quia per Curvam BHG descendens grave temporibus æqualibus æquales altitudines percurrit; tantundem est quoad descensus altitudinem, ac si celeritate in B acquisita deinceps uniformiter descenderet per BS; quo casu constat, eodem tempore, duplo plus spatii confici, quam conficitur motu a quiete æqualiter accelerato: adeoque si BS dupla sumatur ipsius AB, fore tempus descensus per BH, post AB, æquale tempori per AB.

Num. XXXIX.

PROBLEMA

Vicissim proponendum hoc esto :

Invenire, quam curvam referat funis laxus & inter duo puncta fixa libere suspensus.

Sumo autem, funem esse lineam in omnibus suis partibus facillime flexilem. *

* Problematis istius, quod primum fere dubitantes Geometras usum Calculi *Leibnitiani* docuit, solutiones dederunt, in *Actis Erudit.* 1691. Jun. pag. 273-282, Viri praest. LEIBNITIUS, HUGENIUS, *Joh.* BERNOULLIUS. Proxime secuta sunt Problemata Velariae & Lintearia, quae omnia diversis investigari possunt mediis. Methodum Auctoris nostri, a Fraterna, quam expositurus sum, haud adeo dissimilem fuisse, non temere conjectari licet.

LEMMA. *Si filum perfecte flexile*, (Fig. 1) ABCDEFGHI, *in*
TAB. XVIII. b. N°. 39. *punctis* A & I *affixum, incurvetur in polygonum a potentiis quotlibet* BK, CK, DK, EK, FK, GK, HK, *quae sint omnes in aequilibrio: Dico, aequilibrium non turbari, si, ablata fili portione quavis* CDEFG, *& potentiis* CK, DK, EK, FK, GK *ipsi applicatis, producantur fila* BC, HG, *ad mutuum concursum* T, *ibique applicentur potentiae* TX, TV, *quarum illa*, TX, *verticalis aequalis sit summae potentiarum verticalium*, CL + DL + EL + FL + GL; *haec*, TV, *horizontalis aequalis sit summae horizontalium* CM + DM + EM — FM — GM, *in quas ablatae potentiae*, CK, DK, EK, FK GK, *resolvi possunt.*

Nota, per summam potentiarum horizontalium intelligi summam earum quae in unam partem trahunt, demta summa illarum quae trahunt in partem oppositam, & pariter, per summam verticalium, intelligi excessum summae earum quae trahunt deorsum supra summam earum, si quae sint, quae trahunt sursum.

Nota etiam, resolutionem potentiarum quae in horizontales & verticales facta est, in laterales quasvis, potuisse fieri, modo omnes CL, DL, EL, &c. TX; item CM, DM, EM, &c. TV, sint inter se parallelae.

DEMONSTR. Repraesentent CP, GQ, tensiones filorum CB, GH, eaeque resolvantur in horizontales & verticales tensiones CN, CR; GO, GS. Igitur punctum T, tensionibus CP, GQ, conjunctim trahitur, sursum, nisu CR + GS; horizontaliter versus H, nisu GO — CN. Sed trahitur a potentia TX deorsum, a potent. TV horizontaliter versus V. Datur ideo aequilibrium si TX = CR + GS, & TV = GO — CN. Id autem ita comparatum

ratum est. Nam, si resolvantur singulorum filorum CD, DE, EF, FG tensiones in horizontales & verticales; necesse est, quoniam tres potentiæ CP, CK, & tensio fili CD, circa punctum C sunt in æquilibrio, tensionem verticalem CR fili CB æqualem esse potentiæ verticali CL simul, & tensioni verticali fili CD; ac, propter æquilibrium circa punctum D, tensionem vertical. fili CD æqualem esse pot. DL & tensioni vertic. fili DE, quæ etiam æquatur pot. EL & tensioni vert. fili EF: hæc autem æqualis est pot. FL minus tensione vert. fili FG, quæ tensio, una cum pot. GL æquatur tensioni vert. GS fili GH. Ergo CR = CL + DL + EL + FL + GL — GS, seu CR + GS = [CL + DL + EL + FL + GL =] TX. Similiter tensio horizontalis CN fili CB, una cum pot. CM æqualis est tensioni horiz. fili CD, & hæc tensio, cum pot. DM æquatur tensioni horiz. fili DE, quæ tensio, cum pot. EM, æqualis est tensioni horiz. fili EF: ista vero æquatur pot. FM simul & tensioni horiz. fili FG, quæ & potentiæ GM & tensioni horizontali GO fili GH æqualis est. Ergo CN + CM + DM + EM = FM + GM + GO; unde TV = [CM + DM + EM — FM — GM =] GO — CN. *Q. E. D.*

Coroll. Completo Parallelogrammo TVZX erit TZ, media directio, & potentia æquipollens omn. pot. CK, DK, EK, FK, GK.

PROPOSITIO. Num. XXXIX.

Sit filum perfecte flexile ab innumeris potentiis BK, *in curvam* BAC *inflexum, quæritur curvæ natura.*

Sit AT [*Fig.* 2] tangens horizontalis Curvæ; AF, ipsi insistens ad angulos rectos, axis; in quo, sumta ad libitum abscissa AF dicatur x; FB ordinata, y; curva AB, z; potentia BK = $p\,dz$; sinus totus = 1, sinus anguli KBM, quem potentia BK cum horizonte constituit, s; ejus cosinus, vel sinus anguli KBL, $\surd(1 - ss)$: adeoque potentiæ, verticalis BL, $p\,s\,dz$; horizontalis BM, $p\,dz\surd(1 - ss)$; quia BK, BL, & BM sunt ut sinus totus, sinus ang. KBM, & sin. ang. KBL. Igitur si, ducta tangente BT, capiatur TV = $\int p\,s\,dz$, & TX = $\int p\,dz\surd(1 - ss)$; compleaturque parallelogrammum TVZX, erit TZ media directio, & potentia omnibus BK æquipollens. Tab. XVIII. b. N. 39.

Jam si tensio fili in A dicatur a, potentia TA erit a — TX = $a - \int p\,dz\surd(1 - ss)$ potent. vero TV = $\int p\,s\,dz$. Atqui, propter æquilibrium in T, potent. agentes secundum TA, TV, TB sunt ut latera parallela bE [dy], BE [dx], Bb [dz], trianguli BbE. Ergo $a - \int p\,dz\surd(1 - ss) : \int p\,s\,dz = dy : dx$, hoc est, $a\,dx = dy\int p\,s\,dz + dx\int p\,dz\surd(1 - ss)$, quæ æquatio dabit curvæ BAC naturam.

Coroll. 1. Hinc etiam dabitur media directio & potentia æquipollens TZ.

Co-

Num. XXXIX. COROLL. 2. Tensio fili $Bb = \frac{dz}{dx} \int psdz$.

Ut ad specialem casum Funiculariæ vel Catenariæ descendamus, quoniam, hic, vires BK sunt pondera, aut gravamina, particularum funis Bb; linea BK cadit in BL, evanescit angulus KBL, & ang. KBM rectus evadit. Unde fit $s = 1$, & $\sqrt{(1 - ss)} = 0$; quo ipso, æquatio generalis mutatur in hanc $adx = dy \int pdz = Pdy$, (posito $P =$ summæ potentiarum).

Si P sit functio data ipsius z, hoc est si funis gravamina $[pdz]$ varientur utcunque, sed relate ad funis longitudinem; erit $dz = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \sqrt{(dy^2 + P^2 dy^2 : a^2)} = \frac{dy}{a} \sqrt{(aa + PP)}$ atque $dy = adz : \sqrt{(aa + PP)}$, & $dx = [Pdy : a] = Pdz : \sqrt{(aa + PP)}$. Ergo y & x functiones erunt ipsius z, datæ, saltem transcendenter. Assumpta igitur ad libitum z, dantur x & y & ipsa curva funicularia, saltem transcendenter.

Tensio autem fili $Bb = \frac{Pdz}{dx} = \sqrt{(aa + PP)} = \frac{adz}{dy}$.

Exemplum. Ponamus funem uniformiter crassum, proprio duntaxat pondere gravatum, qui casus est Problematis ab Auctore propositi. Ergo $p = 1$, & $pdz = dz$, atque $P = [\int pdz =] z$. Igitur $dx = [Pdz : \sqrt{(aa + PP)}] = zdz : \sqrt{(aa + zz)}$ & integrando, $x + c = \sqrt{(aa + zz)}$. Quia vero abscissæ principium ponitur in A, erit $x = 0$, quando $z = 0$, unde fit $c = a$. Ergo $x + a = \sqrt{(aa + zz)}$, atque $z = \sqrt{(xx + 2ax)}$ & $dz = \frac{x + a}{\sqrt{(xx + 2ax)}} dx$. Igitur $dy = [adz : \sqrt{(aa + PP)} =] adx : \sqrt{(xx + 2ax)}$, æquatio est ad funiculariam vulgarem, quæ quoniam nequit integrari, indicio est curvam inter Mechanicas referendam esse.

Tensio autem fili in $B = \sqrt{(aa + PP)} = \sqrt{(aa + zz)} = x + a$. Media directio TV, verticalis; Potentia æquipollens $= \int pdz = z$, pondus catenæ.

Quod si P non ipsius z, sed ipsarum x, aut y sit data functio, nihilominus naturam curvæ reperire licebit, quemadmodum N°. XLII. Nota g videre est.

N°. XL

N°. XL.

JACOBI BERNOULLI QUÆSTIONES NONNULLÆ DE USURIS,

Cum solutione Problematis de sorte Aleatorum, propositi in Ephemerid. Gallic. *A.* 1685. *Art.* 25. *

FRequens mos obtinet, ut qui alteri pecuniæ summam debet, & parato ære instructus non est, cum Creditore suo ita paciscatur, ut, quod simul ac semel solvere nequit, hoc successive & per partes solvere, ac interim dilationis nomine legitimam usuram Creditori præstare teneatur; ita quidem ut, quod quavis vice ultra debitam usuram solvit, hoc in partem solutæ sortis venire censendum sit. Accidit autem post aliquod tempus, ut, persoluta jam maxima parte debiti, alter ab altero debitæ & acceptæ pecuniæ rationes poscat; quas aliter format Creditor, aliter Debitor. Creditor hunc in modum: *Acta Erud. Lips. 1690. Mai. p. 219.*

Sors debita initio temporis - - - - - - - - a

Hinc [posito sortem m tempore n parere usuram p] usura per tempus b - - - - $abp : mn$.

Summa - - - $a + abp : mn$

* *Supra Num.* XIV.

No. XL. Exacto tempore b solvit Debitor - - - $f + abp : mn$

Residuum sortis initio temporis c - - - - - $a - f$

Hinc usura per tempus c - - - - $(acp - fcp) : mn$

Summa - $a - f + (acp - fcp) : mn$

Elapso tempore c solvit Debitor - $g + (acp - fcp) : mn$

Residuum sortis initio temporis d, - - $a - f - g$

Hinc usura per tempus d - - $(adp - fdp - gdp) : mn$

Summa $a - f - g + (adp - fdp - gdp) : mn$

Finito tempore d solvit Debitor. $h + (adp - fdp - gdp) : mn$

Residuum debiti sub finem temporis d, in die præsenti rationum - - $a - f - g - h$

Debitor rationes suas sic disponit:

Tabula Debiti.

Sors debita - - - - - - - - a

Hinc usura per tempus $b + c + d$. - $(abp + acp + adp) : mn$

Summa debiti ad diem rationum - $a + (abp + acp + adp) : mn$

Tabula Soluti.

Exacto tempore b solvi Creditori - - $f + abp : mn$

Hinc usura per tempus $c + d$ ad diem usque rationum - $(fcp + fdp) : mn + (abcpp + abdpp) : mmnn$

Finito tempore c solvi iterum - $g + (acp - fcp) : mn$

Hinc usura per tempus d ad diem præsentem - $gdp : mn + (acdpp - fcdpp) : mmnn$

Hoc

Hoc ipso die rationum solvo denuo - $b + (adp - fdp - gdp) : mn$ No. XL.

Summa soluti
$f + g + b + (abp + acp + adp) : mn + (abcpp + abdpp + acdpp - fcdpp) : mmnn$

Hæc si subtrahatur a summa debiti, remanet pro residuo debiti in diem præsentem, $a - f - g - b - (abcpp + abdpp + acdpp - fcdpp) : mmnn$

Hoc residuum, cum a Creditoris residuo $a - f - g - b$, differat, illoque minus sit, tota quantitate $(abcpp + abdpp + acdpp - fcdpp) : mmnn$

Quæritur uter recte?

Respondetur facile: Creditoris rationes probas & genuinas, Debitoris vero erroneas esse, & in eo fallere, quod totum hoc, quod quavis vice solvit, in sortem computet; cum ab illo prius detrahendum fuisset, quod ad eum usque diem usuræ nomine deberet.

Hinc fit, ut quantitas illa $(abcpp + abdpp + acdpp - fcdpp) : mmnn$, qua ambæ rationes differunt, præcise exprimat usuram, quam usura Creditori persoluta, ut sors spectata, a die solutionis ad diem usque rationum, parere posset; adeoque dum hanc sibi remitti vult Debitor, usuræ usuram poscere censendus est; quod regulariter in legibus prohibitum esse constat. Sed levia hæc sunt, nec monuissem, nisi viderem ejusmodi supputandi modum, qui in fraudem Creditorum vergit, Mercatoribus, ob commodiorem calculum, admodum solemnem esse.

Alterius naturæ hoc Problema est: Quæritur, si Creditor aliquis pecuniæ summam fœnori exponat, ea lege, ut singulis momentis pars proportionalis usuræ annuæ sorti annumeretur; quantum ipsi finito anno debeatur? Resp. Si sors vocetur a, usura annua b, Creditori elapso anno debebitur $a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2.3aa} + \frac{b^4}{2.3.4a^3} + \frac{b^5}{2.3.4.5a^4}$, &c. in infinitum; quæ summa major est, quam $a + b + bb : 2a$, ut patet: sed minor quam $a + b + bb : (2a - b)$,

No. XL. $bb:(2a-b)$, quoniam $bb:(2a-b)$ est summa progressionis geometricæ $\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2.2a^2}+\frac{b^4}{2.2.2a^3}$, &c. quæ nostra serie $\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2.3a^2}+\frac{b^4}{2.3.4a^3}$ &c. major est. Idcirco, si usura sit subvigecupla sortis, seu $a=20$, & $b=1$, debebitur, post annum, plus quam $21\frac{1}{40}$, & minus quam $21\frac{1}{39}$: si $a=b$, debebitur plus quam $2\frac{1}{2}a$, & minus quam $3a$. Observo etiam, præsentem seriem in re geometrica suum usum habere: nam si ad axem curvæ Logarithmicæ duæ rectæ applicentur, quarum minor dicatur a, sitque portio axis inter utramque applicatam ad portionem ejusdem inter applicatam quamcunque & respectivam tangentem, in constanti ratione b ad a: exprimetur major applicatarum per eandem hanc seriem $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2.3a^2}+$ &c. *

Porro Seriei hujus infinitæ occasione recordor Problematis illius de sorte Aleatorum, quod in *Ephemeridibus Gallicis*, A. 1685. Artic. 25. proposui hunc in modum: Duo Aleatores A & B ludunt una tessera; ea conditione, ut qui primus assignatum in illa punctorum numerum jecerit, vincat: A primo instituit unum jactum, & B unum, dein A duos jactus consequenter, & B duos: hinc A tres, & B tres &c. Vel, A instituit unum jactum, dein B duos, hinc A tres, postea B quatuor &c. quousque alteruter eorum vincat. Quæritur ratio sortium? Hoc Problema cum frustra hactenus expectaverit solutionem, eandem, per series infinitas, sic exhibeo: Sors Collusoris A ad sortem Collusoris B, in priori casu, se habet, ut $1+(\frac{5}{6})^2+(\frac{5}{6})^6+(\frac{5}{6})^{12}+(\frac{5}{6})^{20}$ &c. $-\frac{5}{6}-(\frac{5}{6})^4-(\frac{5}{6})^9-(\frac{5}{6})^{16}$ &c. in posteriori, ut $1+(\frac{5}{6})^3+(\frac{5}{6})^{10}+(\frac{5}{6})^{21}+(\frac{5}{6})^{36}$ &c. $-\frac{5}{6}-(\frac{5}{6})^6-(\frac{5}{6})^{15}-(\frac{5}{6})^{28}$ &c. ad unitatis complementum. Harum serierum termini repræsentant totidem potestates fractionis $\frac{5}{6}$, quarum indices crescunt, diffe-

* Vide Num. CI. Schol. Prop. 59.

differentiis servantibus inter se progressionem arithmeticam ; cujus communis excessus ibi est binarius, hic quaternarius. * No. XL.

* Vide Artis Conjectandi Part. I. Append. Probl. 1. pag. 49-57.

N°. XLI.

SPECIMEN CALCULI DIFFERENTIALIS

In dimensione Parabolæ helicoidis,

Ubi de flexuris curvarum in genere, earundem evolutionibus, aliisque.

Per JAC. BERNOULLI.

CUm ex *Actis* nuperis conjecerim, Celeb. Dn. L. * Analysin Problematis a se propositi, calculo suo differentiali institutam, minime displicuisse; credidi nec ægre laturum sequens illius specimen, quod in gratiam Lectorum nostrorum, quibus calculum hunc agitare volupe fuerit, in lucem emitto: ut, si forte mentem Viri acutissimi, ex iis quæ in *Actis* 1684. de Invento isthoc suo edidit, ob summam brevitatem, non satis assecuti sint; vel hinc ejus applicandi methodum discere possint. Quanquam ut verum fatear, qui calculum *Barrowianum*, (quem decennio ante in Lectionibus suis Geometricis † adumbravit *Act Erud. Lips.* 1691. Jan. p. 13.

* LEIBNITIO.

† Lectiones Opticæ & Geometricæ; *Auctore* Is. BARROW. Lond. 1674. 4°.

N. XLI. vit Auctor, cujusque specimina sunt tota illa propositionum inibi contentarum farrago) intellexerit, alterum a Dn. L. inventum ignorare vix poterit; ut pote qui in priori illo fundatus est, & nisi forte in differentialium notatione, & operationis aliquo compendio, ab eo non differt.

Fig. I. Cum axis vulgaris Parabolæ curvatur in peripheriam circuli BDM, curva BFGNA, quæ per extremitates applicatarum CF, DG, in centrum circuli A vergentium transit, dicitur nobis *Parabola heliceides*, vel si mavis, *Spiralis parabolica*; cujus propositum sit investigare tangentem LH, spatium curva comprehensum, curvæ longitudinem, & flexuram, &c. Esto hunc in finem $AB = r$, $BDMB = c$, Arcus $BC = x$, $CF = y$; & ducantur CL, AH, perpendiculares ipsi AC, sitque CD particula circumferentiæ infinite parva, cui sit similis & concentricus arculus GE. Natura curvæ, $lx = yy$, adeoque $l\,dx = 2y\,dy$, & $dy : dx = l : 2y$.

I. *Tangens.*

$$AD : AG = DC : GE$$

$$r : r - y = dx : \frac{r-y}{r}dx$$

$$FE : GE = FA : AH = FC : CL$$

$$dy : \frac{r-y}{r}dx = r - y : \frac{(r-y)^2\,dx}{r\,dy} = y : \frac{(ry - yy)\,dx}{r\,dy}$$

Ut generalis expressionis fiat specialis applicatio ad curvam propositam; ponantur loco dy & dx, ipsorum proportionalia l & $2y$ fietque $AH = (2y^3 - 4ryy + 2rry) : lr =$ (substituto lx pro yy) $2xy : r - 4x + 2ry : l$, & $CL = (2ryy - 2y^3) : lr = 2x - 2xy : r$

Maxima AH [aut CL] reperitur, si ejus differentiale, puta $(6yydy - 8rydy + 2rrdy) : lr$, [aut $(4rydy - 6yydy) : lr$,] æquetur nihilo: unde habetur $y = \frac{1}{3}r$ [aut $\frac{2}{3}r$,] ipsaque proin, tum AH, tum CL maxima $= 8rr : 27\,l$.

COROLL.

COROLL. Si ponatur latus rectum $l = rr : r$; scilicet, ut circumferentiæ integræ respondens applicata sit ipse radius ([a]), ut in præsenti schemate, erit AH vel CL maxima $= \frac{1}{4} c$. N.XLI.

Maximus angulus tangentis & applicata AFH, seu CFL invenitur ponendo rationem CL : CF seu $(2ry - 2yy) : lr =$ maximæ, hoc est, ejus differentiale $(2rdy - 4ydy) : lr = 0$; unde resultat $y = \frac{1}{2} r$ ac proinde CL : CF $= r : 2l$. Speciatim vero in hypothesi $l = rr : c$, exit $x = [yy : l = cyy : rr =] \frac{1}{4} c$, & CL : CF $= c : 2r$.

COROLL. Si in puncto I, ubi curva radium AM intersecat, ipsam tangat recta IK secans diametrum productam BAK in K; erit AK æqualis quartæ parti peripheriæ circuli. ([b])

II. *Spatium.*

$(DC + GE) \times \frac{1}{2} DG = CDGE$, hoc est, $\frac{2rdx - ydx}{r} \times \frac{1}{2} y = \frac{2rydx - yydx}{2r} =$ [substituto $\frac{2ydy}{l}$ pro dx] $2yydy : l - y^3 dy : lr$; cujus igitur integrale $2y^3 : 3l - y^4 : 4lr$, seu $\frac{2}{3} xy - lxx : 4r$ æquatur spatio curvilineo BFGDCB: quocirca, posito $y = r$, fiet spatium totum BANGFBCDMB $= 5r^3 : 12l$, hoc est (in casu $l = rr : c$) $\frac{5}{12} rc$; cumque circulus integer BDMB sit $\frac{1}{2} rc$ seu $\frac{6}{12} rc$; erit dictum spatium ad circulum, ut quinque ad sex; ideoque spatium reliquum BANGBA sexta pars circuli.

III. *Longitudo Curvæ.*

$FGq = FEq + EGq = dy^2 + (rr - 2ry + yy) dx^2 : rr =$ [substituto

([a]) Nam in æquatione $yy = rrx : c$; quando $x = c$, $y = r$.

([b]) In eadem scilicet hypothesi $l = rr : c$. Tunc enim $x = \frac{1}{4} c$; $yy = rrx : c = \frac{1}{4} rr$, & $y = \frac{1}{2} r$, AH $= 2xy : r - 4x + 2ry : l = \frac{1}{4} cr : r - c + rr : l = \frac{1}{4} c - c + c = \frac{1}{4} c$.

N.XLI. stituto $2ydy:l$ loco dx] $(rrll+4rryy-8ry^3+4y^4)\,dy^2:rll$. Hinc FG $=dy\sqrt{(rrll+4rryy-8ry^3+4y^4)}:rl$; cujus quantitatis integrale, si dari posset, exhiberet longitudinem curvæ BFG; quæ tamen utcunque sic cognoscetur: Diametro AB describatur semicirculus $AT\chi B$ & abscindatur $A\alpha=l$: hinc ductis perpendicularibus indefinitis quibuslibet WV, ZY, æquidistantibus ab A & B, & secantibus peripheriam semicirculi in T & χ, agatur recta χTS, & juncta $S\alpha$, sumtaque AK $=$ AS, fiat KR parallela ipsi αS, & ducatur in centrum semicirculi recta Rb, cui abscindantur æquales WV, ZY, eruntque puncta V, Y, ad curvam quandam $\gamma VY\delta$, quæ ejus est naturæ ut abscissa BZ $=$ DG, spatium $BZY\delta B$, applicatum ad Ab $=\frac{1}{2}AB$ exhibeat rectam curvæ BFG æqualem.

Demonst. $AK=AS=WT=Z\chi=\sqrt{BZA}=\sqrt{(y\times(r-y))}=\sqrt{(ry-yy)}$ & $A\alpha\,[l]:AS\,[\sqrt{(ry-yy)}]=AK\,[\sqrt{(ry-yy)}]:AR=\frac{ry-yy}{l}$; quare ZY $(=WV=Rb=\sqrt{(Abq+ARq)}=\sqrt{(\frac{1}{4}rrll+rryy-2ry^3+y^4)}:l$; unde portio spatii $ZY\delta B$, latitudinis $dy=dy\sqrt{(rrll+4rryy-8ry^3+4y^4)}:2l$, quæ applicata ad Ab $=\frac{1}{2}r$ exhibet $dy\sqrt{(rrll+4rryy-8ry^3+4y^4)}:rl=$ FG; & proin, *componendo*, totum spatium $ZY\delta B$ ad $\frac{1}{2}r$ applicatum $=$ portioni curvæ BFG. *Q. E. D.*

Coroll. Sumtis BZ, AW æqualibus, si centro A, radiis AZ, Ab, AW, describantur arcus secantes curvam in G, I, & N, [Nota mediam intersectionem I, in casu præsentis Schematis, incidere in radium AM] portiones curvæ BG & AN, GI & NI, nec non BGI & ANI inter se æquantur: unde patet quod, in curvis etiam illis quæ rectificationem nondum acceperunt, nonnunquam partes æquales dissimilares assignari possunt.

Id cum Fratrem monuissem, in his quoque non leviter versatum, protinus animadvertit ille, posse cuilibet fere Spirali, æquatione algebraica expressæ, aliam curvam geometricam æqualem assignari: Descriptis enim centro A, intervallo AF & AG arcu-

ircubus $F\rho$, $G\pi$, si concipiatur curva $M\psi$ talis, ut applicatarum N.XLI.
νx, $\pi\psi$ differentia $\nu\psi$ æquetur arcui EG; erit propter $\nu x = \pi\rho = EF$, & $\nu\psi = EG$, & angulos $\psi\nu x$, FEG, utrinque rectos, etiam $\psi x = FG$, & proinde *componendo*, tota portio curvæ $M\psi =$ toti portioni Spiralis BG. Ad inveniendam autem naturam curvæ $M\psi$, substituendus tantum in quantitate $(r - y)\,dx : r$, [quæ semper exprimit ipsam EG, vel $\nu\psi$] valor ipsius dx, qui in nostra curva est $2ydy : l$, ut habeatur $2ydy : l - 2yydy : lr$, cujus integrale $yy : l - 2y^3 : 3lr$ denotat longitudinem applicatæ $\pi\psi$, quæ si vocetur z, habebitur æquatio inter z & $yy : l - 2y^3 : 3rl$, seu $3rlz + 2y^3 - 3ryy = 0$, quæ relationem exprimit inter abscissam $M\pi$ (y) & applicatam $\pi\psi$ (z).

In genere vero Spiralis Parabolica gradus cujusvis, hac ratione commutatur in aliam Paraboloidem geometricam uno gradu altiorem ([c]). Sed & hoc observavimus, quod si curva ANIGK sit Spiralis *Archimedæa*, & describatur centro A ad axem AK communis Parabola $A\mu$, cujus parameter sit quarta proportionalis ad peripheriam, diametrum, & radium circuli BDM; erunt, (quod memoratu dignum est) & curvæ, & illis comprehensa spatia æqualia: nimirum sumpto in recta AM quovis puncto λ, si ad illud applicetur recta $\lambda\mu$, secans parabolam in μ, & ducatur arcus λN concentricus peripheriæ circuli BM, secans helicem in N, æquabitur perpetuo portio helicis AN portioni curvæ parabolicæ $A\mu$; & spatium AN, recta AN & spirali comprehensum, spatio parabolico $A\lambda\mu$ A ([d]). Quam miram Parabolæ & Spiralis convenientiam, post modum, apud WALLISIUM deprehendimus, qui de ejus detectione HOBBIUM & ROBERVALLIUM

([c]). Sit enim Spiralis Parabolicæ æquatio $x = y^n : l$, erit $dx = ny^{n-1}\,dy : l$, quo substituto in $(r - y)\,dx : r$, fit $ny^{n-1}\,dy : l - ny^n\,dy : lr$, cujus integrale est $y^n : l - ny^{n+1} : (n+1)\,lr$. Ergo $z = ((n+1)\,ry^n - ny^{n+1}) : (n+1)\,lr$, quæ est æquatio ad Paraboloidem geometricam gradus $n+1$.

([d]) Id demonstrare, calculum infinitesimalem intelligenti nihil habet difficultatis.

N. XLI. inter se disceptasse refert; quasi non possint plures & tempore & loco dissidentes in idem inventum suapte ingenio incidere.

IV. *Flexura.*

Quod curva in partes contrarias flecti debeat, evidens est: quia enim peripheria BC, a vertice B aliquousque, a linea recta sensibiliter non differt; sequitur, ex natura Parabolæ, curvam in partibus vertici proximis versus circumferentiam, in reliquis vero, ob curvaturam BC, versus centrum cavam esse debere.

Si G sit punctum flexus contrarii; erit AO segmentum radii, centro & tangenti interjectum Minimum (M.) Producatur GE in P, & ducatur PQ parallela ipsi EF; sitque secans arcus BD $= s$, & tangens t; Sic erit $r : r - y$ [AG] $= t : \frac{t}{r}(r - y)$ [GP] $= s : \frac{s}{r}(r - y)$ [AP] Deinde GE $[(r - y)dx : r]$: EF $[dy]$ $=$ PG $[\frac{t}{r}(r - y)]$: PQ $[tdy : dx]$. Denique AF $[r - y]$: PQ $[tdy : dx] =$ AO $[M]$: PO seu AO — AP $[M - \frac{s}{r}(r - y)]$; unde obtinebitur $M = (rrsdx - 2rsydx + syydx) : (rrdx - rydx - rtdy)$, positoque $ldx : 2y$ loco dy, & facta divisione per dx, $M = (2rrsy - 4rsyy + 2sy^3) : (2rry - 2ryy - rlt)$: hujus igitur differentiale debebit esse $= 0$: at fractionis differentiale tum est $= 0$, cum termini ejus ducti in alterna differentialia æquantur: [etenim fractionis $y : z$ differentiale est $(\pm zdy \mp ydz) : zz$, unde si sit $= 0$, erit & $\pm zdy \mp ydz = 0$, hoc est, $zdy = ydz$;] qua duce regula, pervenitur ad æquationem 16 membrorum (*); ad quam reducendam notanda sunt sequentia: Differentiale arcus ad differentiale tangentis & secantis rationem habet

(*) $(4rsy^4 - 8rrsy^3 + 4r^3syy + 6rltsyy - 8rrltsy + 2r^3lts)dy + (4ry^5 - 12rry^4 + 12r^3y^3 + 2rlty^3 - 4r^4y^4 - 4rrltyy + 2r^3ltyy)ds - (2rlsy^3 = 4rrlsyy + 2r^3lsy)dt = 0.$

habet cognitam; puta ad differentiale tangentis, quam quadratum radii ad quadratum secantis; & ad differentiale secantis, quam quadratum radii ad rectangulum sub tangente & secante. Nam in quadrante ABD, $dx : dt = DC : EF = DC : GE + GE : EF = AD [AB] : AG + AB : AF = ABq [rr] : AFq [ss]$; quare $dt = ssdx : rr =$ [in præsente curva] $zssydy : lrr$. [No. XLI.] [Fig. 2.]

Iterum $dx : ds = DC : GF = DC : GE + GE : GF = AD [AB] : AG + AB : BF = ABq [rr] : AFB [st]$ quare $ds = stdx : rr = 2stydy : lrr$; quibus valoribus pro ds & dt in æquatione substitutis, ut & $ss - rr$ loco tt, prodibit alia (f) quæ dividi poterit per $stdy$, sic ut literæ s, t, & dy prorsus evanescant, remanente sola incognita y, fiatque æquatio talis, $y^6 - 3ry^5 + 3rry^4 - r^3y^3 + \frac{3}{4}rrllyy - r^3lly + \frac{1}{4}r^4ll = 0$, quæ facta alterius divisione per $y - r$, reducitur ad hanc, $y^5 - 2ry^4 + rry^3 * + \frac{3}{4}rrlly - \frac{1}{4}r^3ll = 0$, cujus æquationis radix punctum flexus contrarii prodit; quod quidem, in casu $l = rr : c$, quam proxime habetur, ducendo radium AC, sic ut applicata CF sit $\frac{1}{6}r$, vel arcus $BC = \frac{1}{36}c = 10$ gr. (g)

Hæc Methodus, pro curvarum flexuris inveniendis, cum admodum prolixa & minus naturalis mihi videretur, ex eo quod litteras superfluas & in æquatione evanescentes adhibet; ansam nobis præbuit easdem, alia breviore & faciliore via, investigandi; hoc modo: Flexum contrarium in eo curvæ loco concipio, ubi duæ particulæ contiguæ infinite parvæ in directum jacere intelliguntur, ut sunt FG, FI; reliquis ad unam partem sursum, ad alteram deorsum flexis. Sequitur hinc 1°, quod in curvis, quarum axis rectus est & applicatæ parallelæ, anguli acuti EGF, MFI, seu DGL, CFL inter se æquales sunt, & eorum, quos applicatæ cum curva hinc inde constituunt, maximi vel minimi, [Fig. 3.]

Kkk 2 prout

(f) $(8rsty^6 - 24rrsty^5 + 24r^3sty^4 - 8r^4sty^3 + 6r^3llsty^2 - 8r^4llsty + 2r^5llst)\, dy = 0$.

(g) Nam, si, in æquatione, pro y scribas $\frac{1}{6}r$, & $rr : c = \frac{7}{44}r$ pro l, æquationis membrum prius efficit tantum $\frac{1}{400}r$.

No. XLI. prout curvæ portio, quæ ad partes horum angulorum est, intra, vel extra eosdem cadit; unde & ratio DG : DL [$y : t$] minima vel maxima; adeoque per supra ostensa $ydt = tdy$; sed cum etiam sit ubique $tdy = ydx$ ut constat ([h]), erit $dt = dx$, differentiale scilicet portionis axis inter applicatam & tangentem æquale differentiali abscissæ: quod & sic liquet: Quia GF, FI, jacent in directum, tangentes GL, FL secabunt axem in eodem puncto L, & proinde differentiale abscissæ DC ipsarum quoque DL, CL, differentia est. Aliud Theorema in *Actis* dedit Celeb. calculi Auctor: nempe cum Triangula EGF, MFI, ob angulos EGF, MFI æquales, sint similia; sequitur, si EF, MI, hoc est, ipsa dx sint æqualia, futura quoque æqualia EG, MF, seu dy; adeoque $ddy = 0$.

Fig. 4. 2°. In curvis, quarum applicatæ tendunt in commune punctum A, angulus EGF = GAF + GFA = DAC + CFL: unde cum CL sit Tangens anguli CFL ad radium CF, & DH Tangens anguli EGF, vel DGH ad radium DG; erit differentia rectarum CL, DH, æqualis differentiæ Tangentium duorum angulorum, qui differunt angulo DAC, & quarum una est ad radium CF, altera ad radium DG: Nam quamquam differentia radiorum EG, ratione totius radii vel tangentis, evanescat; non tamen negligenda est, si cum ipsorum differentiis comparetur. Esto AC $= r$, DC $= dx$, CF $= y$, CL $= t$: adeoque FL $= \surd(yy + tt)$; fiatque AC [r] : DC [dx] = CF [y] : $\frac{ydx}{r}$ = arcui, qui est mensura anguli DAC in radio CF: hic per §. 4, ad differentiam Tangentium est in ratione duplicata radii ad secantem: quare FCq [yy] : FLq [$yy + tt$] = Arcus inventus $\frac{ydx}{r}$: $\frac{yydx + ttdx}{ry}$ = differentiæ duarum Tangentium, quarum utraque est ad radium CF, cui si addatur EF $= (r - y)\,dx : r$ (utpote

(h) Ex Triangulorem GEF, GDL similitudine, est GE [dy] : EF [dx] = GD [y] : DL [t].

(utpote, quæ est ad EG, sicut DH ad DG, seu CL ad CF, N.XLI. tangens ad radium) erit aggregatum $(rydx + ttdx) : ry$, seu $dx + ttdx : ry$ differentia duarum Tangentium, quarum altera convenit radio CF, altera radio DG, hoc est, differentiæ rectarum CL, DH [t]; ac idcirco $dt = dx + ttdx : ry$.

Idem clarius ostenditur, descripto super C, radio CL, arcu LK: Nam angul. ACL + LCK = AMH = ADM + DAC = ACL + DAC, & propterea angul. LCK = DAC: (Nota, CM. hic negligi, punctaque C & M pro coincidentibus haberi: eo quod ipsa CM differentialibus DC, LK, EG, ut ut infinite exiguis, infinities minor existit,) unde AC [r]: CD [dx] = CL [t]: LK = $tdx : r$; iterumque GD [y]: DH [t] = LK [$tdx : r$]: KH = $ttdx : ry$; quocirca dt = [DH — CL = DH — CK = DC + KH =] $dx + ttdx : ry$.

COROLL. Si sit r = infinito, hoc est, CA, DA, parallelæ, evanescet $ttdx : ry$, eritque $dt = dx$, ut supra.

Frater meus, loco rationis GD: DH, vel GA : AP, assumit GE : EF, vocando AF = y, AP = t, & EF = dz, & sic invenit $dt = dz^3 : dy^2$, ([1]) quæ Theoremata, ob universalitatem suam, merentur observari.

Applicatio specialis ad Parabolam helicoiden.

Quoniam CL [t] supra reperta fuit $(2ryy - 2y^3) : lr$, erit Fig. 4. $dt = (4rydy - 6yydy) : lr$; cumque sit $dx = 2ydy : l$, erit, substitutis valoribus tt, dt, & dx, factaque divisione per dy, & reducta æquatione, $y^5 - 2ry^4 + rry^3$ &c. = o, ut prius.

V. *Summum curvæ punctum*

supra radium BA, invenitur faciendo nuper inventam AO = ($2rrsy$

([1]) Scil. GE [dy]: EF [dz] = EF [dz]: QN [$\frac{dz^2}{dy}$] = QN = AG [y]: AP [t] = $\frac{ydz}{dy}$ [$\frac{dz^2}{dy}$]: QP [dt] = $\frac{dz^3}{dy^2}$.

N.XLI. $2rrsy - 4rsyy + 2sy^3$) : ($2rry - 2ryy - rlt$) infinitam, hoc est ponendo $2rry - 2ryy - rlt = 0$. seu [loco y substituendo $\sqrt{lx}$] $2r\sqrt{lx} - 2lx - lt = 0$, aut [in casu $l = rr : c$] $2\sqrt{cx} - 2x = t$; quæ æquatio geometrice resolvi nequit, ob ignoratam rationem x ad t, arcus ad tangentem. Mechanice prope verum invenitur, numerando a B versus M, 72°. 12. Obiter noto, hinc etiam ostendi posse, quadraturam circuli indefinitam, & in genere rectificationem ullius curvæ geometricæ in se redeuntis impossibilem esse. Hæc enim si possibilis esset, dari posset relatio inter curvam & applicatam, vel abscissam; cumque & harum relatio, tum inter se, tum ad tangentem data ponatur, data quoque foret ipsius curvæ ad tangentem ratio; quare si æquatio quæ relationem hanc exprimit, cum ista $2\sqrt{cx} - 2x = t$, juxta notas Analyseos leges debite conferretur ad eliminandam alterutram indeterminatarum x vel t; prodiret alia æquatio certi & definiti gradus; cujus radices, quarum nunquam plures esse possunt quam æquatio dimensiones habet, determinarent omnia curvæ nostræ suprema puncta: sed hoc fieri nequit, quoniam spiralis ista, si continuetur, infinitis gyris circa radium AB circumvolvitur, in quibus singulis aliquod punctum supremum existit, quorumque adeo punctorum numerus infinitus est.

De Curvarum evolutionibus.

Fig. 5. Si DC curva sit peripheria circuli, coibunt quæ ipsi normaliter applicantur DA, CA, KA &c. in communi puncto A; eruntque singulæ æquales eidem constanti rectæ: at si DC sit quæcunque alia curva, erunt dictæ perpendiculares indeterminatæ, & intersecabunt sese in totidem diversis punctis AVXI, quæ juncta novam curvam efficiunt, cujus natura nunc indaganda est. Invenienda vero primo longitudo indeterminatæ CA, ita: Esto curva proposita RCD, cujus axis RB; abscissæ RN, RM; applicatæ NC, MD; tangens DCT; sitque RN $= m$, CN $= p$, NT $= q$, unde porro TN [q] : NC [p] = NC [p] : NP

au

aut MO [$pp : q$] = SD [dp] : SQ [$pdp : q$]. Ergo QS [$pdp : q$] N. XLI.
+ SC [dm] = QC [$(pdp + qdm) : q$] & OP = MN + OM
— PN = dm + diff. $(pp : q) = dm + (\pm 2pqdp \mp ppdq) : qq$
$= (qqdm \pm 2pqdp \mp ppdq) : qq$. Est denique QC — OP
[$(ppdq - pqdp) : qq$] : QC [$(pdp + qdm) : q$] = CA — PA
aut CP aut $\surd(CNq + PNq)$ [$\surd(ppqq + p^4) : q$] : CA
[$(pdp + qdm)\surd(qq + pp) : (pdq - qdp)$].

Applicatio ad Parabolam.

Sit RCD Parabola, cujus latus rectum l, adeo ut sit $lm = pp$, erit $ldm = 2pdp$, & $dm = 2pdp : l$, & $q = 2m$: quibus substitutis, invenitur CA $= (ll + 4pp)\surd(ll + 4pp) : 2ll$, hoc est, quia PN $= \frac{1}{2}l$ & PC $= \surd(\frac{1}{4}ll + pp)$, erit CA = PCc : NPq, sive quarta proportionalis ad PN & PC.

Ad inveniendam naturam curvæ AVX, quam formant intersectiones perpendicularium DA, CA, ratione axis RB, abscindatur RH $= \frac{1}{2}l$ = PN, & dicatur HB, y, & BA, z; eritque AB + NC [$z + p$] : AC [$(ll + 4pp)\surd(ll + 4pp) : 2ll$] = NC [$p$] : CP [$\surd(\frac{1}{4}ll + pp)$] & invenitur $llz : 2 = 2p^3$. Iterum NC [p] : AB [z] = PN [$\frac{1}{2}l$] : PP [$lz : 2p$]; Sed y = HB = PB + PH = PB + NR = $lz : 2p + pp : l$ seu $2p^3$ [$= llz : 2$] $= 2ply - llz$; hoc est, $3lz : 4y = p$ & $4p^3 = [llz =]$ $27 l^3z^3 : 16y^3$, hoc est $16y^3 = 27 lzz$.

Præterea quia AD, AC sunt perpendiculares curvæ DC, & particula DC infinite parva, erit AD = AC = AV + VC; sed propter eandem rationem VC = VX + XK, & XK = XI + &c: quare AD = AV + VX + XI, &c: = curvæ AIH + HR: cumque curva AIH nascatur ex intersectionibus minimæ distantium DA, CV, KX; sequitur illam ibidem ab iisdem tangi, & propterea curvam RKD esse eam ipsam, quæ describitur ex evolutione ipsius HIA. Unde, uno quasi oculi ictu, manifesta sunt ea omnia, quæ de Evolutis publicarunt HUGENIUS, aliique: Aditus etiam patet ad præclara εὑρήματα Celeberri-

N. XLI. berrimorum Virorum TSCHIRNHAUSII & LEIBNITII, quæ circa curvas per intersectiones radiorum reflexorum formatas in *Actis* ediderunt.

N°. XLII.

SPECIMEN ALTERUM CALCULI DIFFERENTIALIS

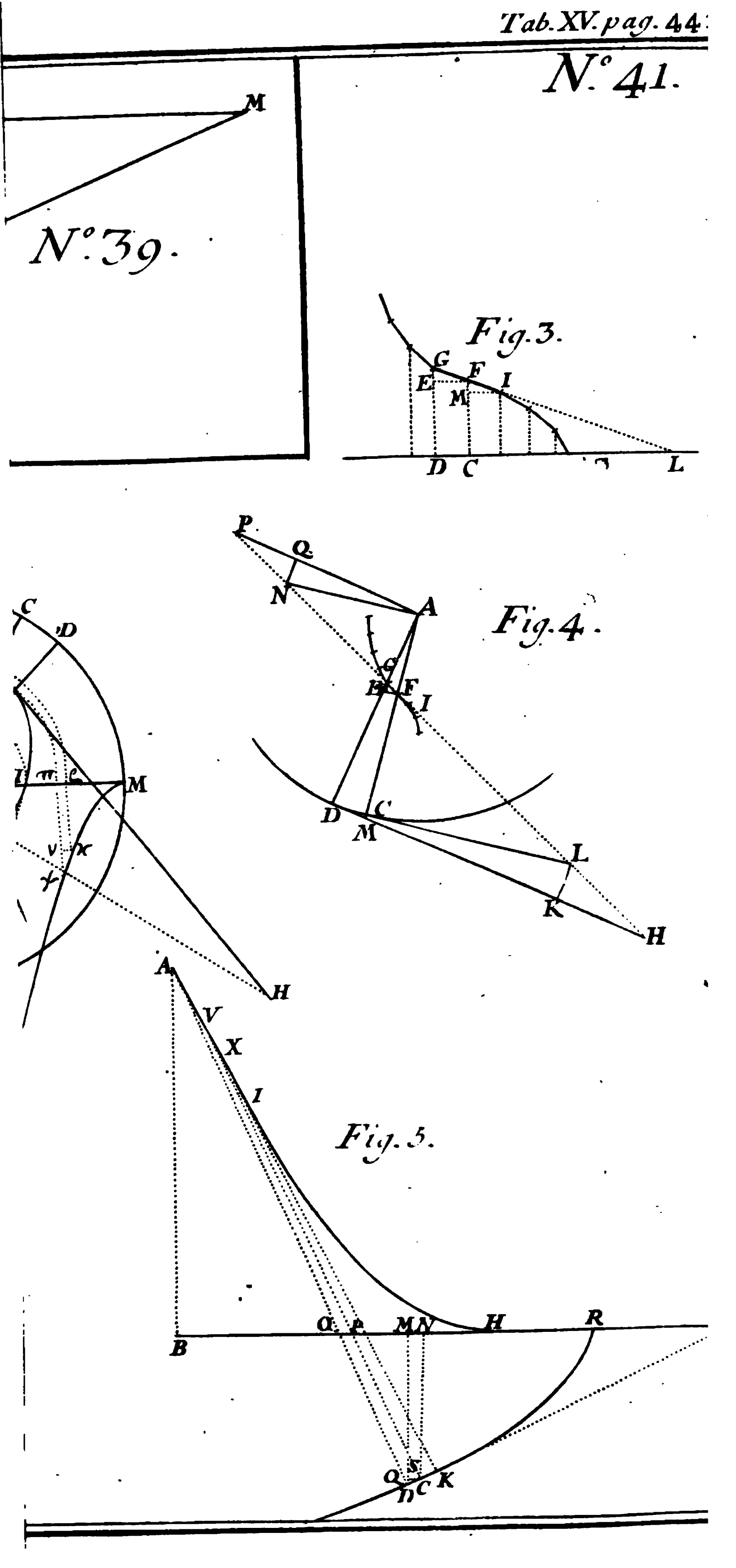
In dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Areis Triangulorum Sphæricorum; una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque.

Per JAC. BERNOULLI.

I. DE SPIRALI LOGARITHMICA.

Acta Erud. Lips. 1691. Jun. p. 282. Fig. 1.

SI in plano circuli BCH jaceat curva BDEIPC, quam secent, eodem angulo obliquo, radii CB, CL &c. ex centro circuli C educti, dicetur Curva hæc *Spiralis Logarithmica*; quoniam sumptis arcubus LM, MN &c. infinite parvis & æqualibus, hoc est, ipsis BL, BM, BN, arithmetice proportionalibus, radii DC, EC, IC, sunt geometrice proportionales, ob triangula similia DCE, ECI, &c. Spiralis isthæc jam WALLISIO, & BARROWIO considerari cœpta est; nec actum agerem,


N°. 41.
M
N°. 39.
Fig. 3.
G
F
E
I
M
D
C
L
P
Q
N
A
Fig. 4.
B
F
I
D
C
M
L
K
H
C
D
M
H
A
V
X
I
Fig. 5.
B
M
N
H
R
S
K

erent; nisi affinitas illi intercederet cum Loxodromiis; seu ambis Nautarum, quibus dimetiendis nunc occupabimur: Ipnet enim esset vera Loxodromica, si Terra plana foret. No.XLII.

1°. *Longitudo Curvæ.*

Centro C describantur arcus EF, IG, PQ, & ducantur ree CH, CS, & QR perpendiculares ipsis CB, CD, quæ sent tangentes curvæ BH, DS, in H, S, R. Sic erunt trianula DFE, EGI, similia, ob angulos FDE, GEI, ex hypoesi, æquales, & DFE, EGI rectos; quare CD : DS = FD : DE = GE : EI = FD + GE : DE + EI, &c; hoc est, = DC : IPC. Quare DS = DIPC. Eadem opera ostenditur DR = DIP, adeoque & RS = PC.

Corollarium. Quia Spiralis hæc infinitis gyris circa cenum C convolvitur; patet, curvæ alicui interminatæ posse rectam nitam æqualem dari.

2°. *Spatium.*

Positis CB = r, CH = t, BM = x, CE = y, erit CM [r]: M [dx] = CE [y] : EF [$ydx:r$]. Hinc triang. ECF = EF n $\frac{1}{2}$ EC = $ydx:r$ in $\frac{1}{2}y$ = $yydx:2r$. Sed DF [dy] : FE $ydx:r$] = BC [r] : CH [t]. Unde $ydx = tdy$, adeoque riang. ECF [$yydx:2r$] = $tydy:2r$, & hujus integrale $tyy:4r$ = omnibus triangulis FCE, GCI, &c. hoc est, spatio DIPCD. Si y ponitur = r, erit $tyy:4r = \frac{1}{4}tr = \frac{1}{2}$ triang. BCH = toti spatio Spirali BDPCB, repetitis, videlicet, toties portiunculis circa centrum C existentibus, quot gyris singulæ communes sunt.

N.XLII.

II. DE LOXODROMIIS NAUTARUM.

Esto jam, in eadem figura, BLDC superficies sphæræ, C polus, BL æquator, CB, CL &c. meridiani secantes curvam BIPC constanti angulo FDE, erit Curva hæc dicta *Loxodromica*.

1°. *Longitudo Loxodromiæ.*

Descriptis arcubus æquatori parallelis FE, GI, PQ, ut prius, erit haud absimiliter: Sinus totus ad secantem anguli FDE $=$ DF : DE $=$ EG : EI $=$ DF $+$ EG, &c. DE $+$ EI, &c. hoc est, $=$ arcus meridiani DQC (complementum elevationis poli loci D) ad longitudinem Loxodromiæ DIPC: Et ita quoque arcus DQ, seu differentia latitudinum locorum D & P, ad partem Loxodromiæ DIP his locis interjectam.

Corollarium. Hinc portiones Loxodromiæ, inter duo quæcunque loca latitudine æquidifferentia, sunt æquales; & generaliter, partes Loxodromiæ ejusdem proportionales sunt differentiis latitudinum inter partium terminos.

Fig. 2. Porro ad inveniendam locorum longitudinem, ex datis latitudinibus & angulo Rumbi, aut vice versa: Esto ABC, planum meridiani; A, centrum Sphæræ; C, polus: AB radius æquatoris, seu Sinus totus $=r$; BD, latitudo loci $=y$, DG, radius paralleli æquatoris $=z$; adeoque DE $=dy$, & DF $=dz$; tangens anguli Rumbi & meridiani $=t$; ipse vero arcus æquatoris BL (in *Fig.* 1.) $=x$; ejusque differentiale LM $=dx$. Quibus positis, erit primo $r:z=dx:\frac{zdx}{r}=$ different. paralleli (a) deinde $\frac{zdx}{r}:dy=t:r$; (b) adeoque $dy=zdx:t$; denique

(*fig.* 1.)

(a) Scilicet (Fig. 1.) CM [r] : CE [z] $=$ LM [dx] : EF [$zdx:r$].
(b) Nempe EF [$zdx:r$] : FD [dy] $=$ SC : CD $=$ HC [t] : CB [r] ob similia Triangula SCD, HCB.

(*fig.* 2.) DE [dy] : DF [dz] = AD [r] : AG [$\sqrt{(rr - zz)}$]; N.XLII.
unde dy [$zdx : t$] = $rdz : \sqrt{(rr - zz)}$; ac proinde $dx = trdz : z\sqrt{(rr - zz)}$, quod sic construitur.

Applicetur extremitati radii AC normalis CP = t, & per punctum P, asymptotis AC, AB, describatur Hyperbola PI: deinde, assumpto in peripheria quadrantis quovis puncto D, agantur DO, DI parallelæ radiis AC, AB, & abscindatur LM = GI; ductaque AMN, sumatur LO = BN; erit punctum O ad curvam optatam OQ.

Demonst. AG [$\sqrt{(rr - zz)}$]: AC [r] = CP [t]: GI vel LM [$tr : \sqrt{(rr - zz)}$] & AL [z] : LM [$tr : \sqrt{(rr - zz)}$] = AB [r] : BN seu LO [$trr : z\sqrt{(rr - zz)}$]. Quare spatium OLVX, latitudinis LV seu dz, æquale $trrdz : z\sqrt{(rr - zz)}$ = (ut modo ostensum) rdx, & propterea totum spatium TBVX = rx; ideoque spatium hoc applicatum ad radium, exhibet rectam æqualem arcui æquatoris, qui differentiam longitudinum exhibet puncti B, & ejus in quo linea Loxodromica parallelum per E transeuntem secat. Non secus, si latitudo loci, e quo proficisceris, sit BD, & ejus, in quem per Rumbum datum pervenisti, BR; erit spatium OLSQ ad radium applicatum æquale arcui æquatoris, qui differentiam longitudinum dictorum locorum metitur (*).

Præterea, datis longitudinibus & latitudinibus loci a quo, & ad quem; Quæritur t, hoc est, in quem Rumbum navis dirigi debeat? Respond. Differentia longitudinum duorum locorum est ad differentiam duorum aliorum latitudine cum prioribus convenientium, ut tangens anguli prioris Rumbi ad tangentem anguli postremi. Etenim descripta alia hyperbola YZ & alia curva WK, erit, CP : GI [LM] = AG : AC = CY : GZ [LH], & *permutando* CP : CY = LM : LH = LM : LA + LA : LH = BN [LO] : BA + BA : BT [LW] = LO : LW; quod cum ubique valeat, erunt omnes LO, LW; hoc est, spatia LOQS, LWKS, divisa per communem radium, hoc est, differentiæ

(*) Vide omnino Nos. XC. Art. 50. & XCI.

N. XLII. ferentiæ longitudinum, ut CP, CY, ſeu ut tangentes angulorum, quos Rumbi faciunt cum meridianis. Unde datis latitudinibus BD, BR, ſi fiat; ut ſpatium LOQS ad radium applicatum, ad datam longitudinum differentiam; ſic data CP ad aliam CY: erit hæc tangens anguli quæſiti.

Conſtructio Problematis ſuccinctior: Extenſo quadrante meridiani BC in rectam βx, & abſciſſa quavis $\beta\delta$ = BD, ſi applicetur $\delta\gamma$, quæ ſit ad $\beta\tau$ ſeu t, ut AB ad DG; erit curva $\tau\gamma$ ita comparata, ut ſpatium curvilineum $\delta\gamma\pi\rho$, ad radium AB applicatum ſit æquale arcui æquatoris, qui differentiam longitudinum exprimit locorum, quorum latitudines ſunt $\beta\delta$, $\beta\rho$, ſeu BD, BR. Cum enim ex conſtructione ſit, DG [z]: AB [r] = $\beta\tau$ [t] : $\delta\gamma$; erit $\delta\gamma = tr : z$, adeoque rectang. $\gamma\delta\epsilon = trdy : z = r\,dx$, per ſuperius oſtenſa.

Fig. 2. & 3.

Præterea, ſi ſpatium curvilineum $\beta\tau\pi\rho$ adeoque & ſingula rect. $\gamma\delta\epsilon$ [$trdy : z$] commutari intelligantur in alia parallelogramma, quorum communis altitudo ſit $\beta\tau$ [t], erit ſingulorum latitudo reſpectiva $rdy : z$, quæ eſt ad $\delta\epsilon$, ſeu dy, ut r ad z [radius ad ſinum complementi latitudinis $\beta\delta$, vel BD, ſive ut ſecans latitudinis ad radium.] Quare, ut r ad t, ſic unius parallelogrammuli latitudo $rdy : z$, ad $tdy : z$ [$= dx$], & ita ſumma omnium ad x, loci longitudinem. Hinc ratio perſpicitur conſtructionis *Tabulæ*, quam vocant *latitudinum creſcentium*; qua de videſis SNELLIUM, & P. DESCHALES.

2°. *Spatium Loxodromicum.*

Quod portionem ſuperficiei ſphæricæ curvæ loxodromicæ, & polo, vel æquatori, interjectum concernit, fiat $r : p$ [Radius ad Peripheriam] $= z : \frac{pz}{r}$ = circumferentiæ paralleli per D tranſeuntis, quæ ducta in latitudinem DE $= dy = rdz : \sqrt{(rr - zz)}$ exhibet $pzdz : \sqrt{(rr - zz)}$ aream annuli DE, ejuſque integrale $p\sqrt{(rr - zz)}$ dat ſuperficiem Zonæ ſphæricæ rotatione arcus BD ſuper axe AG genitæ. Quia $p\sqrt{(rr - zz)} = p$ in AG, obiter

obiter notamus insigne *Theorema Archimedaeum*, quod superficies frusti sphæræ cujuslibet æquetur producto altitudinis ejus in peripheriam circuli maximi; & proportionalis partis proportionaliter: ([a]) adeoque quod superficies portionum inter se sint ut altitudines. Hinc $p : dx = p\sqrt{(rr - zz)} : dx\sqrt{(rr - zz)}$, seu, per superius ostensa $trdz : z =$ areæ trapezii sphærici, cujus bases oppositæ sunt differentiolæ arcuum æquatoris & paralleli; ejus itaque integrale æquale areæ spatii curvæ Loxodromicæ & æquatori interjecti: est vero integrale ipsius $trdz : z =$ spatio hyperbolico; quare si asymptotis AB, AC, describatur hyperbola pqr, eadem cum altera PI, erit portio ejus quæcunque pBVr æqualis spatio comprehenso curva Loxodromica, æquatore, & meridiano dictam Loxodromicam ad latitudinem BD intersecante; cumque totum spatium TBVX sit æquale rx, hoc est, ipsi radio AC in arcum æquatoris x, hoc est per modo laudatum *Theorema Archimedaeum*, toti triangulo sphærico duobus meridianis & æquatori intercepto; sequitur reliquum TprX æquari ipsi spatio, utroque meridiano, Loxodromica & polo terminato. N.XLII.

Nota 1°. $Lq : LO = \frac{tr}{z} : \frac{ttr}{z\sqrt{(rr - zz)}} = \sqrt{(rr - zz)} : r =$ AG : AC. Unde alia habetur constructio curvæ OQ.
2°. Si duas Loxodromias idem æquatoris parallelus secet, & per puncta sectionum transeant meridiani; spatia Loxodromiis, meridianis, & æquatori utrinque interjecta, erunt ut tangentes angulorum, quos Rumbi constituunt cum meridianis. Patet, quia spatia plurium hyperbolarum, quale pBVr, abscissa ab eadem VX sunt ut ipsæ Bp.

([a]) Id est, trapezium in superficie Sphæræ descriptum, & comprehensum peripheriis duorum circulorum parallelorum, atque duabus aliis per istorum polos transeuntibus; æquale est producto ex ejus altitudine, sive distantia circulorum parallelorum, & arcu circuli maximi, qui metitur angulum a circulis perpendicularibus comprehensum.

N.XLII. III. DE AREIS TRIANGULORUM SPHÆRICORUM.

Esto ABC, Triangulum Sphæricum rectangulum ad C; D, *Fig.* 4. polus circuli AC; I, sphæræ centrum; IA, IC, IF, radii; AF, DF, DC, DO, quadrantes circulorum maximorum; CH, OG, sinus arcuum CA, OA; sitque OC pars infinite parva cruris AC; ac ponatur IA $= r$; tangens arcus FE, seu anguli BAC $= t$; IH $= z$; HC $= \sqrt{(rr - zz)}$: erit HC $[\sqrt{(rr - zz)}]$: IC $[r]$ $=$ HG vel O*o* $[dz]$: OC $[rdz : \sqrt{(rr - zz)}]$ (*) & (per Doctr. Trigonom. Sphær.) IF, sinus AF $[r]$: HC, sin. AC $[\sqrt{(rr - zz)}]$ $=$ Tang. FE $[t]$: Tangent. CB $[t\sqrt{(rr - zz)} : r]$, atque secans CB $[\sqrt{(rr + tt(rr - zz) : rr)}]$: Tang. CB $[t\sqrt{(rr - zz)} : r]$ $=$ Rad. $[r]$: sin. CB. $[tr\sqrt{(rr - zz)} : \sqrt{(ttrr - ttzz + r^4)}]$ Sed sin. CB in CO $[rrtdz : \sqrt{(ttrr - ttzz + r^4)}]$ $=$ BCOL, per superius citatum *Theorema Archimedeum*, cujus integrale æquale areæ Trianguli ABC.

CONSTRUCTIO. Describatur semicirculus, centro I, radio IM $= r\sqrt{(tt + rr)} : t$ seu quarta proportionali ad tangentem & secantem anguli BAC, ac radium IA, tum fiat alia curva PQR, ejus naturæ, ut HQ sit tertia proportionalis ad HN & radium sphæræ IA, eritque planum AHQR æquale superficiei Trianguli sphærici ABC.

DEMONST. IMq $[(ttrr + r^4) : tt]$ $-$ IHq $[zz]$ $=$ HNq $[(ttrr + r^4 - ttzz) : tt]$ sed, ex constr. HN $[\sqrt{(ttrr + r^4 - ttzz)} : t]$: IA $[r]$ $=$ IA $[r]$: HQ $[trr : \sqrt{(ttrr + r^4 - ttzz)}]$ adeoque QHG $= trrdz : \sqrt{(ttrr + r^4 - ttzz)}$ $=$ BCOL, &c.

COROLLARIUM I. Planum AIPR [$=$ Triang. Sphær. AEF]

(*) Ob similia Triangula HIC, O*o*C.

AEF] = applicatum ad radium IA = arcui EF, per *Theorema Archimedæum*. N. XLII.

Coroll. 2. Si t = infin. hoc est, si ang. BAC rectus; erit IM = IA, & planum AHRQ ad radium applicatum = arcui AC. (f)

ADDITAMENTUM AD PROBLEMA FUNICULARIUM.

Postquam *Problematis* de *Curva funicularia* solutionem nuperrime exhibuisset *Frater*; speculationem istam continuo promovi ulterius, & ad alios quoque casus applicui; quo pacto, præter ea quorum tum mentio facta est, nonnulla sese obtulerunt, quæ recensere operæ pretium existimo.

1. Si crassities, vel gravamina funis, aut catenæ, inæqualia sint; & sic attemperata ut, dum est in statu quietis, gravamen portionis HI sit in ratione portionis rectæ utcunque ductæ LM, iisdem perpendiculis HL, IM interceptæ; curva AIHB, quam funis, vel catena, sic suspensa proprio pondere format, erit Parabolica. Sin gravamen portionis HI sit in ratione spatii LOPM iisdem perpendiculis HL, IM, intercepti; erit funicularia AB, curva Parabolæ vel cubicalis, vel biquadraticæ, vel surdesolidalis &c. prout Figura CLO est vel triangulum, vel complementum semiparabolæ communis, aut semiparabolæ cubicalis &c. *Fig.* 5.

Quod si vero gravamen portionis HI sit in ratione spatii QRST rectis horizontalibus HQ, IR abscissi; erit Funicularia IB curva aliqua ex genere Hyperbolicarum (recta AG existente una ex asymptotis) puta vel Apolloniana, vel cubicalis, vel biquadrata &c. prout videlicet Figura AQT est vel triangulum, vel

(f) Huc referri possunt quæ dedit Auctor in N°. LII. de Testudine quadrabili.

N.XLII. vel complementum semiparabolæ communis; aut cubicalis; &c. ([e])

2. Si funis sit uniformis crassitiei, at a pondere suo extensibilis, peculiari opus est artificio. Vocetur portio funis non extensi, cujus ponderi æquipollet vis tendens imum funis punctum, a; & excessus longitudinis, quo portio hæc a dicta vi extensa non extensam superat, b; sumaturque in perpendiculo FA $= a$, & indefinita FC $= x$: tum fiat curva DE ejus naturæ, ut sit applicata CD $= ab : \sqrt{(2aa + 2bx - 2a\sqrt{(aa + bb + 2bx)})}$ vel $a\sqrt{(aa + bx + a\sqrt{(aa + bb + 2bx)})} : \sqrt{(2xx - 2aa)}$, perinde enim est; ac spatio curvilineo ACDE constituatur æquale Rectang.

([e]) Resumatur æquatio generalis ad Funicularias, (quæ in Nota ad N^{um}. XXXIX. demonstrata est) $adx = Pdy$, aut $ax = \int Pdy$ & manifestum est, si P data sit functio ipsius y, dari æquationem, quæ naturam curvæ exhibet; algebraicam, si sit Pdy, quantitas integrabilis; transcendentem, si secus. Specialiter; si gravamen funis AB ponatur æquale areæ CBN curvæ CPN, quæ sit ex Parabolarum genere, hoc est, si ponatur BN $= y^n$, & $P = \int y^n dy = y^{n+1} : (n+1)$, erit $ax = [\int Pdy =] \int y^{n+1} dy : (n+1) = y^{n+2} : (\overline{n+1}.\overline{n+2}.)$ Ergo funicularia AB erit ex Parabolarum genere, & quidem duobus gradibus altior Parabola CPN. Si sit hæc recta parallela ipsi CB, hoc est, si gravamen portionis HI sit ut LM, ponatur $n = 0$, & $y^n = 1$, & invenietur AB Parabola vulgaris, cujus æquatio $2ax = y^2$. Si CBN sit Triangulum, ponatur $n = 1$, & AB erit Parabola cubicalis, cujus æq; $6ax = y^3$, &c.

Quod si vero P data sit functio ipsius x, hoc est, si gravamen funis AB æquale sit areæ ACV, curvæ AV; æquatio $adx = Pdy$ vel $\frac{adx}{P} = dy$, integrata dabit naturam curvæ AB, algebraicæ, si $dx : P$ sit quantitas integrabilis; transcendentis, si secus. Si ponatur, ut posuit Auctor noster, curvam AV ex Parabolarum genere, hoc est, si sit CV $= x^n$ erit $P = \int x^n dx = x^{n+1} : (n+1)$. Ergo $dy = adx : P = (n+1)\, adx : x^{n+1}$; Unde $y = -a : x^n$, adeoque AB est ex Hyperbolarum genere, convexitatem obvertens axi AC.

tang. FG, producanturque rectæ KG, DC ad mutuum occursum in B: Sic erit punctum B ad requisitam funiculariam AB. N.XLII.
Suppono autem, extensiones viribus tendentibus proportionales esse; tametsi dubium mihi sit, an cum ratione & experientia hypothesis illa satis congruat. Retinere autem istam nobis liceat, dum veriorem ignoramus. (h)

3. Occasione *Problematis funicularii* mox in aliud non minus illustre delapsi sumus, concernens flexiones, seu curvaturas trabium, arcuum tensorum, aut elaterum quorumvis, a propria gravitate, vel appenso pondere, aut alia quacunque vi comprimente factas; quorsum etiam Celeberrimum LEIBNITIUM in priva-

(h) Tensio fili B*b* ostensa est, in Nota ad N^{um}. XXXIX, esse $adz:dy$. Ergo, cum extensiones ponantur tensionibus proportionales; si tensio a efficit extensionem b; tensio $adz:dy$ efficiet extensionem $bdz:dy$; & funis longitudo quæ erat a, evaderet $a+bdz:dy=(ady+bdz):dy$. Ideo, si sumatur ejus particula, longitudinem habens dz, invenietur ejus pondusculum, vel gravamen [pdz] $=adydz:(ady+bdz.)$ Nam, ut longitudo tota $(ady+bdz):dy$ ad pondus totum a, ita longitudinis particula dz, ad ejus pondusculum $adydz:(ady+bdz)=ady:(ady:dz+b)$, quod dictum est pdz. Sed æquatio generalis $adx=dy\int pdz$, dat $addx:dy=pdz$ (posita nempe dy constante). Igitur $addx:dy=ady:(ady:dz+b)$, vel multiplicando in crucem $a^2dyddx:dz+abddx=ady^2$. Mutiplicentur singuli termini per $dx:a$ & pro dz scribatur $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, eritque $adydxddx:\sqrt{(dx^2+dy^2)}+bdxddx=dy^2dx$, at integrando ac transponendo, $ady\sqrt{(dx^2+dy^2)}=xdy^2-\frac{1}{2}bdx^2$, duplicando & quadrando, $4aady^2dx^2+4aady^4=4xxdy^4-4bxdx^2dy^2+bbdx^4$, vel $dx^4-(4aady^2-4bxdy^2)dx^2:bb=(4aa-4xx)dy^4$, hæc æquatio quadratica, si resolvatur, dabit $dx^2=(2aa+2bx-2a\sqrt{(aa+bb+2bx)})dy^2:bb$, vel $dy^2=bbdx^2:(2aa+2bx-2a\sqrt{(aa+bb+2bx)})$ aut $dy=bdx:\sqrt{(2aa+2bx-2a\sqrt{(aa+bb+2bx)})}$. Quod, si æquatio quadratica ordinata fuisset, secundum dimensiones non ipsius dx, sed ipsius dy, habuissemus $dy=dx\sqrt{(aa+bx+a\sqrt{(aa+bb+2bx)})}:\sqrt{(2xx-2aa)}$. Ergo, si sit CD $=ab:\sqrt{(2aa+2bx-2a\sqrt{(aa+bb+2bx)})}$, aut $=a\sqrt{(aa+bx+a\sqrt{(aa+bb+2bx)})}:\sqrt{(2xx-2aa)}$ perinde enim est, cum sint hæ quantitates æquales, habebimus $dy=\mathrm{CD}\times dx:a$. Ergo $ay=\int \mathrm{CD}\times dx=\mathrm{ACDE}=\mathrm{AGKF}=\mathrm{AG}\times a$. Igitur AG $=y$.

N.XLII. privatis, quibus sub idem me tempus honoravit, litteris digitum opportune intendere video. Videtur autem hoc Problema, cum ob hypotheseos incertitudinem, tum casuum mutiplicem varietatem, plus aliquanto difficultatis involvere priori; quanquam hic non prolixo calculo, sed industria tantum opus est. Ego per solutionem casus simplicissimi (saltem in præmemorata hypothesi extensionis) adyta Problematis feliciter reseravi. Verum ut, ad imitationem Viri Excellentissimi, & aliis spatium concedam suam tentandi Analysin; premam pro nunc solutionem, eamque tantisper Logogripho occultabo, clavem cum demonstratione, in Nundinis autumnalibus communicaturus. Si lamina elastica gravitatis expers AB, uniformis ubique crassitiei & latitudinis, inferiori extremitate A alicubi firmetur, & superiori B pondus appendatur, quantum sufficit ad laminam eousque incurvandam, ut linea directionis ponderis BC curvatæ laminæ in B sit perpendicularis; erit curvatura laminæ sequentis naturæ: *Fig. 6.*

Qrzumu bapt dxqopddbbp poylu fy bbqnfqbfp lty ge muids udthhtuhs tmixy yxdksdbxp gqsrkfgudl bg ipqandtt tcpzkbp aqdbkzs. ([i])

4. Istis vero omnibus multo sublimior est speculatio de *Figura veli vento inflati* quanquam cum *Problemate Funiculario* catenus affinitatem habet, quatenus venti continuo ad velum allabentis impulsus ceu funis gravamina spectari possunt. Qui naturam pressionis fluidorum intellexerit, haud difficulter quidem capiet, quod portio veli BC, quæ subtensam habet directioni venti DE perpendicularem, curvari debeat in arcum circuli. At qualem curvaturam induat reliqua portio AB, ut difficilis est perquisitio, sic in re nautica eximii prorsus usus futura est, ut præstantissimorum Geometrarum occupationem juxta cum subtilissimis mereri videatur ([k]). Cæterum, in his Problematibus omnibus, *Fig. 7.*

([i]) Id est, *Portio axis applicatam inter & tangentem est ad ipsam tangentem sicut quadratum applicatæ ad constans quoddam spatium.* Videatur Nus. LVIII. Art. III. §. 2.

([k]) Videatur Nus. XLVIII.

Fig. 2.

N°. 42.

Fig. 3.

Fig. 6.

Fig. 7.

g. 5.

bus, quæ quis nequicquam alia tentet Methodo, calculi *Leibnitiani* N.XLII. eximium & singularem plane usum esse comperi, ut ipsum propterea inter primaria seculi nostri inventa censendum esse æstimem. Quanquam enim, ut nuper innui, ansam huic dedisse credam calculum BARROWII, qualem appello, qui, ab hujus Viri tempore, passim fere apud Geometras præstantiores invaluit, quemque etiamnum Nobil. TSCHIRNHAUSIO solemnem esse video: hoc tamen non eo intelligendum est, quasi utilissimi inventi dignitatem ullatenus elevare, aut Celeberrimi Viri laudi meritæ quicquam detrahere & aliis ascribere cupiam: & si quæ conferenti mihi utrinque intercedere inter illos visa est affinitas, ea major non est, quam quæ faciat, ut, uno intellecto, ratio alterius facilius comprehendatur; dum unus superfluas & mox delendas quantitates adhibet, quas alter compendio omittit. De cætero namque, compendium isthoc tale est, quod naturam rei prorsus mutat, facitque ut infinita per hunc præstari possint, quæ per alterum nequeunt: præterquam enim quod ipsum hoc compendium reperisse utique non erat cujusvis, sed sublimis ingenii & quod Autorem quam maxime commendat.



N°. XLIII.

LETTRE DE Mr. LE MARQUIS DE L'HOPITAL, à *Mr.* HUYGENS,

Dans laquelle il prétend démontrer la régle de cet Auteur touchant le Centre de l'Oscillation du pendule composé, par sa cause physique, & répondre en même tems à Mr. BERNOULLI.

Histoire des Ouvrages des Sçavans. 1690. Juin. pag. 440.

IL y a quelques années, Monsieur, que j'ai lû avec admiration vôtre savant Traité des Centres d'Oscillation, & que j'ai été pleinement convaincu de la vérité de vos démonstrations. Cependant les *Journaux de Leipsic* m'étant tombés depuis peu entre les mains, j'ai trouvé dans celui du mois de *Juillet* de l'année 1686. le récit du différent que vous avez eu sur ce sujet avec Mr. l'*Abbé* CATELAN, rapporté par Mr. BERNOULLI *, qui décide en vôtre faveur, comme doivent faire assurément tous ceux qui prétendent tenir quelque rang parmi les Géométres. Mais j'ai été fort surpris de voir que la fin de son raisonnement se trouve contraire à vos démonstrations : ce qui m'a donné lieu de l'examiner avec soin ; & j'ai reconnu qu'il se sert d'un principe très véritable, quoiqu'il se trompe dans l'application qu'il en fait.

* Ci-dessus, No. XXIII.

fait. Car ce principe conduit, comme je vais montrer, à la même vérité que vous avez prouvée dans vôtre Propoſition V. N.XLIII.

Soit la verge DAB [*Fig.* 1.] inflexible, & ſans peſanteur, mobile autour du point fixe D, dans laquelle ſoient enfilés les deux poids égaux A & B, & ſoit la diſtance B D au point fixe, quadruple de A D; l'on demande la longueur D G du pendule ſimple iſochrone, c'eſt-à-dire, qui ſe meuve avec la même viteſſe que le pendule composé.

Pour réſoudre ce probléme, je conſidére les viteſſes avec leſquelles les corps A & B commencent à deſcendre dans le premier inſtant de leur chute, ou, ſi l'on aime mieux, les eſpàces qu'ils parcourent dans un même tems, quelque petit qu'on le prenne: & c'eſt dans ce ſens que je mets 1 pour la viteſſe, avec laquelle tout corps peſant, grand ou petit, commence à deſcendre ſur des plans également inclinés: car, comme l'on ſait aſſez, cette viteſſe eſt égale dans tous les corps. Je conçois auſſi, que la quantité de mouvement d'un corps au commencement de ſa deſcente, naît de ſa maſſe multipliée par cette premiére viteſſe. Ceci ſuppoſé, il eſt conſtant que le corps A tend à deſcendre avec la même viteſſe que le corps B, & que ne le pouvant, parce qu'il eſt attaché en A, dont la viteſſe n'eſt que la quatriéme partie de celle de B, il doit hâter le mouvement du corps B dans le pendule composé; & toute la difficulté conſiſte à déterminer au juſte de combien ce mouvement doit être augmenté: & c'eſt ce que je fais en cette ſorte.

Soit x la quantité de mouvement du Corps A dans le pendule composé; L'excès reſtant de ſa quantité de mouvement ſera donc $A - x$, qui étant appliqué en A, fait effort ſur le point fixe D, & ſur le Corps B, que l'on doit envisager comme étant immobile à ſon égard [puiſqu'il eſt évident que le corps B doit être cenſé ſans mouvement par rapport à cet excès] & par conſéquent la verge B D doit être regardée comme un levier appuïé par les deux bouts en B & D. L'on aura donc B D [4] eſt à A D [1] comme $A - x$ eſt à $\frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$, portion de l'excès de la quantité de mouvement du corps A, qui ſe diſtribuë en B: de ſorte que la quantité de mouvement du corps B dans le pendule composé, ſera $B + \frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$, c'eſt à dire, $\frac{5}{4} A - \frac{1}{4} x$. Or à cauſe de la verge inflexible D B, la viteſſe du corps B, dans le pendule composé, doit néceſſairement être quadruple de celle du corps A, & par conſéquent auſſi ſa quantité de mouvement, puiſque ces corps ſont égaux: d'où il ſuit qu'il y aura égalité entre $4x$, & $\frac{5}{4} A - \frac{1}{4} x$; d'où l'on tire une valeur $x = \frac{5}{17} A$, qui exprime la quantité de mouvement du corps A dans le pendule composé. Maintenant ſi l'on fait comme $\frac{5}{17}$ viteſſe du corps A dans le pendule composé, eſt à 1 viteſſe de tous les corps peſans au bout des pendules ſimples: de même D A [1], eſt à D G, [$\frac{17}{5}$]; ce ſera la longueur du pendule ſimple

 iſochrone,

N. XLIII. isochrone; car les espaces étant entre eux comme ses vitesses, le tems doit être égal.

Si l'on ajoûte au pendule composé D A B [*Fig.* 2] le nouveau poids C égal à chacun des poids A & B, ensorte que DC soit double de DA, l'on doit considérer les poids A & B, comme étant attachés en G, leur centre d'oscillation, au bout du pendule simple D G : & alors mettant x pour la quantité de mouvement du corps C, dans le pendule composé D C G, l'on aura $C - x$ pour l'excès restant de la quantité de mouvement du corps C, qui étant appliqué en C, fait effort sur le point fixe D, & sur le point G, que je regarde comme étant fixe à son égard. L'on aura donc DG [$\frac{17}{5}$] est à DC [2], comme $C - x$ est à $(10C - 10x) : 17$, portion de cet excès qui se distribue en G : d'où il suit que la quantité de mouvement des corps A & B dans le pendule composé D A C B sera $\frac{5}{17} A + \frac{20}{17} B + \frac{10C - 10x}{17}$, c'est à dire, $\frac{35C - 10x}{17}$. Or à cause de la verge inflexible DB, la vitesse du corps A dans le pendule composé sera nécessairement la moitié de celle du corps C, & celle du corps B sera double de celle du corps C; & de même aussi leurs quantités de mouvement, ces trois corps étant égaux. Il y aura donc égalité entre $2x + \frac{1}{2}x$ & $(35C - 10x) : 17$, d'où l'on tire une valeur $x = \frac{2}{3} C$, qui exprime la quantité de mouvement du corps C dans le pendule composé DACB. Maintenant si l'on fait comme $\frac{2}{3}$ vitesse du corps C dans le pendule composé, à 1 vitesse de tout corps pesant au bout d'un pendule simple : de même DC [2] est à DE [3]; ce sera la longueur du pendule simple isochrone. Si les poids A, B, C, étoient inégaux, l'on trouveroit toûjours, en suivant ce raisonnement, le centre d'Oscillation : de sorte que cette méthode est générale, quel que soit le nombre des poids, & quelque inégalité qu'ils aïent entre eux. Il faut maintenant faire voir qu'elle sert aussi, lorsque les poids se trouvent de part & d'autre du point fixe.

Soit le pendule composé ADB [*Fig.* 3] mobile autour du point fixe D, & chargé de deux poids égaux A & B, & soit DB quadruple de D A; il est visible que le corps A doit retarder le mouvement du corps B, dans le pendule composé; & pour trouver précisément de combien, je nomme x la quantité de mouvement du corps B, dans le pendule composé ADB : & par conséquent l'excès restant de sa quantité de mouvement sera $B - x$. Or à cause de la verge AB, la vitesse du corps A doit nécessairement être la quatriéme partie de celle du corps B. Donc sa quantité de mouvement dans le pendule composé sera $\frac{1}{4}x$ [car les corps A & B étant égaux, les quantités de mouvemens sont proportionnées aux vitesses.]

Or cette quantité de mouvement ne peut avoir été produite que par l'excès

l'excès restant de celle du corps B. Il est donc évident que cet excès $B-x$ doit vaincre la quantité de mouvement du corps A vers le bas, & lui en imprimer de plus $\frac{1}{4}x$ vers le haut, c'est-à-dire qu'il doit agir sur le corps A, comme si la force $A+\frac{1}{4}x$ étant appliquée immédiatement en A, le poussoit vers le haut. Mais la force $B-x$, à cause du point fixe D, agit sur le corps A, comme si la force $4B-4x$ étant appliquée immédiatement en A, poussoit ce corps vers le haut. Il y aura dont égalité entre $4B-4x$ & $A+\frac{1}{4}x$; d'où l'on tire une valeur $x=\frac{12}{17}B$, qui exprime au juste la quantité de mouvement du corps B, dans le pendule composé ADB. Maintenant si l'on fait comme $\frac{12}{17}$ vitesse du corps B, dans le pendule composé, est à 1 vitesse de tout corps pesant au bout d'un pendule simple : de même DB [4] est à DG, [$\frac{17}{3}$] ce sera la longueur du pendule simple isochrone. N.XLIII.

Il est aisé de conclure de tout ceci, que le principe de Mr. BERNOULLI est véritable, & qu'il se trompe dans la conclusion qu'il en tire : parce qu'il considére les vitesses acquises des corps A & B, au lieu de considérer, comme nous avons fait, leurs vitesses commençantes, & de plus leurs quantités de mouvement. Car sans cela, on ne pourroit point appliquer ce principe, qui n'est autre que celui du levier, lorsque les corps sont inégaux. De sorte que je crois avoir pleinemennt satisfait à sa demande, *Rogantur hac occasione Eruditi* &c. *

Vous voyez, Monsieur, comme différentes routes conduisent à la connoissance de la même vérité. Ce n'est pas que je veuille comparer celle-ci à la vôtre, qui est incomparablement plus savante & plus géométrique. Si vous jugez cependant qu'il ne soit pas inutile de faire voir, que les raisons phisiques que j'apporte ici s'accordent parfaitement avec vos démonstrations, & qu'elles soient propres à lever le doute de Mr. BERNOULLI, je consens que vous rendiez publique cette lettre, & je vous prie d'y ajoûter vos remarques, vous protestant que je n'appellerai point du jugement que vous en porterez, qui ne peut être que très éclairé & très équitable. Je suis très parfaitement &c.

* Ci-dessus, pag. 280.

No. XLIV.

N°. XLIV.

REMARQUES DE MR. HUYGENS

Sur la Lettre précédente & sur le récit de Mr. BERNOULLI, *dont on y fait mention.*

Histoire des Ouvr. des Sçavans 1690. Juin pag. 449.

J'AI toujours crû qu'il étoit difficile de trouver le Centre d'Oscillation, d'une autre maniére que celle dont je me suis servi. Aussi n'ai-je vû personne qui l'ait tenté heureusement, soit à l'égard de la solution générale, soit au cas des pendules composés, dont les poids sont en ligne droite avec le point de suspension. C'est ce cas que Mr. le *Marquis* de L'HÔPITAL, après plusieurs autres, s'est proposé, & où je puis dire qu'il est le premier qui ait réussi. Car Mrs. WALLIS & MARIOTE, & le Pére DESCHALES, n'ont cherché que le Centre de percussion, & n'ont pas pû démontrer légitimement que c'est le même que celui d'Oscillation; quoique cela soit vrai. Au reste, bien que la démonstration de Mr. le *Marquis* soit bonne & bien fondée, & qu'elle semble fort naturelle; elle ne laisse pas que de comprendre plusieurs choses, qui peuvent d'abord faire de la peine aux Lecteurs; comme lorsqu'il considére la quantité de mouvement d'un corps tout au commencement de sa chute; & lorsqu'il distingue & partage, comme il fait, le surplus du mouvement du corps A, savoir ce qu'il auroit davantage en tombant separément, qu'en descendant comme partie du pendule composé; & enfin quand il dit qu'au pendule de trois poids, il faut considérer les deux A & B comme attachés en G, leur Centre d'Oscillation. Ces choses n'étant pas tout-à-fait évidentes, font voir que le chemin que Mr. le *Marquis* a pris est bien difficile, & qu'il a fallu beaucoup de justesse d'esprit pour ne pas s'y égarer. Mr. BERNOULLI, dans son récit de la dispute entre Mr. l'*Abbé* CATELAN & moi, sur lequel je ferai ensuite quelques remarques, avoit suivi ce même chemin: mais n'ayant pû aller jusqu'à la fin, c'est une autre preuve de la difficulté qui s'y rencontre.

Je suis obligé à Mr. BERNOULLI, d'avoir toujours pris mon parti dans cette dispute avec Mr. l'*Abbé* CATELAN. Cependant je n'ai pû comprendre

dre, comment après avoir dit que ma proposition fondamentale du centre d'Oscillation, dépend de ce grand principe des Méchaniques, savoir, *que le centre commun de gravité de plusieurs poids ne sauroit monter plus haut par l'effet de leur pesanteur, que d'où il est descendu*; il tourne ensuite contre moi certain raisonnement qui est douteux, de son propre aveu, comme s'il étoit capable de mettre en doute la vérité de cette même proposition; au lieu qu'il devoit plûtôt conclure qu'il y avoit de la faute dans son raisonnement. N. XLIV.

Touchant ce qu'il m'impute, de n'avoir pas refuté dans ma première réponse le faux principe de Mr. l'*Abbé*, & que dans la dernière je ne l'ai pas refuté par sa cause physique: je dirai, que dans ma première réponse, je croyois que c'étoit assez de montrer un défaut manifeste dans le raisonnement qu'on m'opposoit, sans entrer plus avant en matière; & que dans ma replique du 8 *Juin* 1684. je pourrois prétendre, aussi-bien que Mr. BERNOULLI, d'avoir refuté ce principe par sa cause physique; puisque je fais voir qu'il répugne au grand principe naturel, *Que les corps pesans ne peuvent monter d'eux-mêmes*. Car, je crois, que c'est autant en cela que consiste la cause physique, de ce que dans le pendule composé, les poids A & B, étant descendus conjointement au bas de leur vibration, n'acquièrent pas ensemble autant de vitesse, que s'ils étoient tombés séparément des mêmes hauteurs; qu'en ce que le poids A consume une partie de son mouvement en agissant sur le point fixe F, suivant la démonstration de Mr. BERNOULLI & de Mr. le *Marquis* de L'HÔPITAL. Et ma raison est, qu'il se perd souvent du mouvement, sans qu'on puisse dire qu'il s'est consumé à rien, comme dans plusieurs cas du choc de deux corps durs, suivant ce que j'ai remarqué en publiant les Loix de ces sortes de mouvemens dans le *Journal des Savans* en 1669. au Mois de *Février*: de sorte que ce n'est pas une nécessité que la quantité de mouvement se conserve toûjours, si elle ne se consume à quelque chose; mais c'est une Loi constante, que les corps doivent garder leur *force ascensionelle*, & que pour cela la somme des quarrés de leur vitesse doit demeurer la même. Ce qui n'a pas seulement lieu dans les poids des pendules, & dans le choc des corps durs, mais aussi en beaucoup d'autres recherches de Méchanique.

J'avois montré, qu'en admettant le principe de Mr. l'*Abbé* CATELAN, la *force ascensionelle* des poids d'un pendule s'augmentoit, & par là leur commun centre de gravité pourroit monter plus haut que d'où il étoit descendu: d'où j'inferois que cela étant, on auroit trouvé le Mouvement perpétuel.

Mr. BERNOULLI ne demeure pas d'accord de cette conséquence, à cause de l'obstacle de l'air, & de quelques autres, qui en empêcheroient l'effet. Mais il devroit avoir considéré, que la hauteur qu'acquiert le centre de gravi-

N. XLIV. gravité par dessus celle qu'il avoit, étant toujours d'une quantité déterminée, & l'effet des obstacles n'étant pas déterminé, & se pouvant diminuer de plus en plus; on pourroit facilement faire une machine, où l'avantage du réhaussement du centre de gravité surpasseroit l'empéchement des obstacles. Mais c'est dequoi assurément l'on ne sera jamais obligé de venir à l'épreuve.

No. XLV.

JACOBI BERNOULLI DEMONSTRATIO CENTRI OSCILLATIONIS EX NATURA VECTIS,

Reperta occasione eorum, quæ super hac materia, in Historia litteraria Rotterodamensi *recensentur.*

Act. Erud. Lips. 1691. Jul. p. 317.

ANTE decennium eruditus quidam Gallus Illustris HUGENII doctrinam de centro Oscillationis labefacturus supposuit, *Celeritatem totalem penduli compositi æquari summæ celeritatum partium ejus separatarum.* Ego HUGENII aliquanto post suscepta causa, principii hujus falsitatem ex natura vectis demonstravi, juxta quam perpetuo partem celeritatis penduli in ipso axe consumi & deperdi necessum sit; quod sufficere poterat ad paralogismum Adversario ostendendum. Ideoque cum eadem opera determinare volebam, quanta præcise celeritatis pars in axe absumeretur; accidit mihi, ut rem, quam præter institutum esse

esse judicabam, paulo negligentius curarem, indeque in calculum N. X LV.
inciderem ab *Hugeniana* propositione abludentem; quod suspicari me fecit, diversam esse rationem vectis cujus alterum fulcrum it in motu, quam quæ est vectis ordinarii: id quod tunc quidem aliis discutiendum reliqui, ipsemet vero materiam hanc ab eo tempore prorsus seposui.

Interea præluftris & generosus quidam Vir, qui avitæ HOSPITALIORUM gloriæ nunc insuper scientiarum litterarumque decus eximium addit, re maturius perpensa, observavit huic meo principio e vulgari vectis natura desumpto apprime cum *Hugeniano* calculo convenire; inque eo duntaxat peccatum a me esse, quod celeritatem penduli acquisitam considerarim, cum nascentis tantum ratio habenda fuisset. Cujus correctionis certior per litteras factus HUGENIUS approbavit methodum, sed difficilem eandem pronunciat, & quædam haud satis evidentia continere asserit: veluti, quod celeritas vel quantitas motus penduli initialis, non acquisita, spectanda sit; quod distribuendus ejus excessus eo modo, quo fecimus, & quod in pendulo trium pluriumve ponderum, fulcrum vectis, respectu unius ponderis, concipiendum sit in centro oscillationis reliquorum: miratur denique cum illustri HOSPITALIO, quod Propositionis suæ veritatem, quam modo agnoscere videbar, calculo meo dubiam reddere coner.

Ad quæ sequentia notanda habeo: *Primò*, miror mirari Viros acutissimos, cum verba mea satis clare innuant, ex calculi istius ab *Hugeniana* hypothesi dissensu me inferre voluisse potius, peculiarem, ut jam dixi, in oscillatorio vecte obtinere communicationis motus legem, quam dictam hypothesin ullatenus suspectam reddere; quanquam, si verum fateri licet, nondum a me obtinere possum, ut hujus veritatem, vel in Axiomatum numero habeam, vel ab HUGENIO satis in propatulo constitutam arbitrer, eo præsertim casu, quo pondera, durante motu suo mox inter se connexa, mox soluta supponuntur. *Secundo*, Ratio cur celeritas penduli initialis, non acquisita, spectanda sit, attendenti obscura esse nequit; nec mihi fuisset olim, si vel per momentum speculationi inhæsissem diutius. Intelligantur pondera quotvis B,

 C,

No. XLV. C, D, E, virga inflexili AB connexa, junctim descendere in perpendicularibus, ut ante hac supposui: celeritates quas acquirunt eo momento quo perveniunt in H, I, K, L, sunto HM, IN, KO, LP, quæ cum proportionales esse debeant, ob commune vinculum, ipsis ponderum distantiis ab axe AB, AC, AD, AE; sequitur virgam, cui implicata sunt, ipsorum descensui cum his celeritatibus continuando nihil afferre alterationis, & propterea nullum pondus hactenus in alterum quicquam de motu suo transferre. Superest ergo solus gravitatis impulsus, qui quolibet temporis instanti acquisitis celeritatibus de novo superadditur, qui alterationem patiatur. Repræsentetur hic, (cum omnibus corporibus æqualis imprimatur) per æquales lineolas MQ, NR, OS, PT, quæ quidem, respectu celeritatum acquisitarum HM, IN, KO, LP, uti hæ ipsæ, respectu spatiorum percursorum BH, CI, DK, EL, habendæ pro incomparabiliter parvis, sic ut hæc tria QM, MH, HB, habeant se quodammodo, ut linea, superficies & corpus. At vero, ob interpositam virgam, fieri nequit ut pondera simul sint in punctis Q, R, S & T, hoc est, in recta QT parallela ipsi MA; quin potius in directum jacere debent cum axe A, secundum rectam VWXY; adeo ut, cum pondera axi propiora terminos suos S & T nondum attigerunt, remotiora suos Q & R jam præterierint, parte residua virium gravitatis ab illis in hæc translata, parte in axe absumpta. *Tertio*, in pendulo trium pluriumve ponderum, centrum oscillationis omnium, excepto uno, considerat HOSPITALIUS ceu fulcrum respectu reliqui. Hoc quia inevidens judicat HUGENIUS (quanquam verum deprehendam) & præterea quia ad demonstrationem aliter quam per inductionem instituendam parum aptum, malo rem invertere, & pondus duntaxat extimum habere loco fulcri, quod ferat reliqua pondera omnia, suis quæque locis, vectem urgentia. *Quarto*, distributio, seu translatio quantitatis motus (olim solas celeritates consideravi, quia pondera supposui æqualia) nihil obscuritatis habere tandem potest, fluitque ex natura vectis ordinarii: nimirum ponderis D incrementum celeritatis extra virgam est OS, in virga tantum

OX,

OX, residuum XS; quantitas ergo motus transferenda, tum in axem, tum in pondus extimum D×XS; unde AB est ad AD, sicut D×XS ad D×AD×XS: AB, portionem quantitatis motus transferendam in solum pondus B. No. XLV.

Similiter portio, quam de motu suo pondus E in pondus B transmittit est E×AE×YT: AB. At pondus C, quod majus celeritatis incrementum in virga quam extra virgam accipit, motui ponderis B contraria ratione adimere censendum est portionem C×AC×WR: AB. Est vero totum incrementum quantitatis motus, quod ponderi extimi B a reliquis ponderibus accedit, præter id quod a propria gravitate nanciscitur, B×VQ. Tandem sit Z intersectio rectarum QT, VY, & ducatur GZ parallela rectis BV, CW, &c.

Quibus positis, centrum oscillationis sic invenitur. Per hypothesin, & ex natura vectis, est (E×AE×YT+D×AD×XS —C×AC×WR): AB=B×VQ, quare, æque-multiplicando & addendo, erit E×AE×YT+D×AD×XS=C×AC×WR +B×AB×VQ, seu [quia YT, XS, WR, VQ ipsis ZY, ZX, ZW, ZV, vel ipsis GE, GD, GC, GB proportionalia] E×AEG+D×ADG=C×ACG+B×ABG; additis utrique parti, tum E×AEq+DE×ADq, tum C×CAG+B×BAG, fiet E×EAG+D×DAG+C×CAG+B×BAG=E×AEq +D×ADq+C×ACq+B×ABq; unde tandem AG= (B×ABq+C×ACq+D×ADq+E×AEq): (B×AB+C×AC +D×AD+E×AE). Si quædam pondera ultra axem, ex adversa parte, constituta sint; eadem pro AG invenitur quantitas; nisi quod membra denominatoris ponderibus istis respondentia fiant negativa.

Jam vero puncti G a virga ponderibus B, C, D, & E gravata abrepti & per rectam GZ descendentis, incrementum celeritatis, cum pervenit ad F, necessario est FZ, quæ est æqualis, ob Parallelogrammum FQ, ipsi MQ vel NR &c. incremento scilicet velocitatis, quod pondus quodlibet descendens a propria gravitate acquirit; quod cum similiter valeat in omnibus spatii GZ partibus, sequitur, spatium istud, hoc est, angulum GAZ, eo-

 dem

N. XLV. dem tempore pertransiri a virga, sive omnibus ponderibus B, C, D, & E, sive tantum unico pondere in G gravata; & proin G fore centrum oscillationis; quod itaque repertum est. Neque variat demonstratio pro pendulo ordinario, cui pondera ita inhærent, ut per arcus circulorum descendere cogantur, cumque reperta quantitas AG eadem sit cum illa, quæ alias pro centro percussionis invenitur, sequitur *centrum oscillationis* & *percussionis* corporum, ut recte notavit Hugenius, unum idemque esse; quanquam Wallisius in Cono, exempli gratia, aliud percussionis, Hugenius aliud oscillationis centrum assignat: fallitur enim Wallisius, in eo quod integræ basi coni circulisque basi parallelis, non majorem distantiam ab axe rotationis celeritatemque tribuit ea, quam ipsa horum circulorum centra obtinent.

Hæc vero centri oscillationis demonstratio sic reformata, uti generalis est & facilis, inque geometrica exactitudine *Hugenianæ* neutiquam cedit; sic eidem in eo præferenda videtur, quod principium vectis, quo nititur, indubitatum est ac evidens, cum *Hugeniana* hypothesis obscura fere sit, nec aliam ob causam pro vera habeatur, quam quod nihil in contrarium afferri possit; intellige in solidis corporibus: in liquidis enim res magis dubia videtur; cum vix appareat, quomodo cum ista hypothesi conciliari possit spontaneus communis centri gravitatis ascensus, qui accidit, cum metallum in imo liquoris acidi positum ac dissolutum, aut liquor graviori leniter superinfusus eidem sensim permiscetur; id quod ansa & fundamentum extitit Perpetui Mobilis nuper a *Fratre* inventi ac in *Actis* publicati, cui proin ibidem subjunctam stricturam neutiquam officere existimamus. Cæterum collegeram, quod si celeritas totalis penduli compositi minor esse debeat summa celeritatum partium ejus separatarum, reliquum in axe premendo consumi necessum sit. Negat Hugenius hanc consequentiam, dicendo, sæpe numero deperdi aliquid de motu, quod nullibi insumatur. At ego contra sentio, si quid amittatur, illud perpetuo alicubi impendi, sed quandoque in premendo firmo obice, quandoque in tollendo motu contrario;

adeo

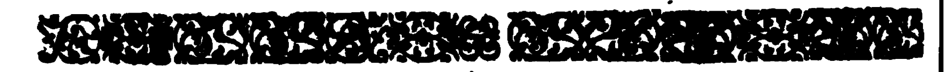
deo ut, eum penduli nostri pondera moveantur in eandem par- No. XLV.
:m, jure inferre potuerim, motum deperditum necessario in axe remendo consumptum esse.

Denique & illud dubium est, quod mihi objicit Vir acutissimus, effectum videlicet resistentiæ aeris, disruptionis vinculi, uod partes penduli connectit, aliorumque obstaculorum indeterminatæ quantitatis esse, minuique in infinitum posse, sic ut non ollat (ut existimaram) possibilitatem motus perpetui, qui alias btineret, si sine his impedimentis centrum gravitatis penduli altius ascendere quam descendere supponeretur. Constat enim, id uod de motu communicatur aut absumitur occursu obstaculorum, ad celeritatem mobilis, & hanc ad motus altitudinem determinatam semper relationem obtinere.

Tantum de his. Notum occasione præsentis materiæ Eruditis acio, *Fratrem* meum observasse, quod præter HUGENII Cycloidem infinitæ dentur curvæ, per quas descendens grave oscillationes peragat isochronas: item non solum cum NEWTONO & TSCHIRNHAUSIO infinitas Cycloides animadvertisse, quæ ui evolutione seipsas describant; sed & detexisse quampiam ex lio quam Cycloidalium genere, quæ eadem proprietate gaudeat.

Videatur Nus. XCVIII.

N°. XLVI.



N°. XLVI.

SOLUTIO

CURVÆ CAUSTICÆ

Per vulgarem Geometriam Cartesianam; aliaque.
Autore Joh. BERNOULLI *Med. Cand.*

Act. Erud. Lips. 1692. Janu. p. 30.

QUIA modus, quo naturam Curvæ causticæ, Nob. D. T. (a) primum consideratæ, per vulgarem Geometriam inquisivi, diversamque deprehendi ab ea, quam applicatæ semicirculi in punctis bisectionum formant, non cuivis obvius est, placet hic eum, in gratiam amatorum hujus Geometriæ plenius exponere: ubi primò notare convenit, quod [fig. 1.] CB radius reflexus paralleli DC, sit æqualis ipsi AB, interceptæ inter centrum A & punctum intersectionis B. Nam ob angulum ACF = ACE, & DCF = BCE, erit angulus ACB = ACD = CAB: Ergo BC = AB. *Q.E.D.*

Hoc præliminato, hujus curvæ generationem sic concipio: Sint [Figura

(a) Nob. DE TSCHIRNHAUSEN in *Actis Erud.* 1682. Octob. p. 364. dixerat curvam quam perpetuo tangunt radii a semi-circulo reflexi, positis incidentibus parallelis, ita describi posse. Sit E C e (fig. 6.) semicirculus reflectens; AC semidiameter radiis incidentibus FD, f d parallela; E e diameter ad eos perpendicularis; describantur semicirculi EGA, A g e; & pars radii incidentis GD, intercepta inter semicirculos ECe, EGA, bisecetur in H: erit punctum H unum eorum, quæ constituunt causticam EHBhe. Hunc errorem hic refutat Noster, & eum ipse DE TSCHIRNHAUSEN in *Actis Erud.* 1690. Febr. pag. 71. candide agnovit. „ Quod ad circulum attinet, „ inquit, nuper Dn. BERNOULLI, „ hic in hisce studiis eximie versatus „ & egregiis speciminibus clarus, ob„ servavit curvam, quæ hic per re„ flexos radios formatur, ad sex as„ cendere dimensiones: ego vero ex „ calculo olim collegeram illam qua„ tuor tantum esse dimensionum. Qua„ propter rationes denuo subducens, „ quæ satis olim prolixæ erant, cum „ nondum instructus essem necessariis „ compendiis, illico deprehendi er„ rorem qui irrepserat.

gura II.] tres radii prædicto modo reflexi AF, BE, CD, se mutuo secantes in punctis G, H, I, quorum quilibet, ex hypothesi, curvam quæsitam tangit; ideoque punctum contactus radii BE non poterit esse in HB; secus AF curvam secaret; nec etiam erit in GE, alias DC secaret; utrumque contra hypothesin: erit ergo in GH. Intelligantur nunc puncta A & C nagis appropinquari ad B; magis itaque accedent etiam ad se invicem puncta H & G, ut ita arctius limitetur punctum contactus; si ergo A & C coincidant in B, concurrent quoque G & H, adeo ut contactus plane determinatus sit, nimirum in concursu punctorum G & H. Liceat concursum hunc appellare *punctum concurrentiæ*, quod in hoc speciali exemplo ita comparatum est, ut unica linea EB per illud duci possit, quæ sit æqualis ipsi conterminæ KB; cum per quodlibet aliud punctum G, vel H, cis vel ultra punctum concurrentiæ, semper duæ lineæ EB & DC, vel EB & AF duci possint, ita ut tam KC = KB, quam KB = BE, vel tam KA = AF, quam KB = BE. Num. XLVI.

Quod hactenus dictum est de puncto concurrentiæ in radio reflexo EB, pariter etiam intelligendum erit de omnibus aliis, in radiis reflexis, FA, DC &c. Ideoque problema propositum huc recidit: *Invenire naturam Curvæ, quam formant puncta concurrentiæ radiorum reflexorum.*

Ad hoc investigandum, ponatur more *Cartesiano* [Figura 3.] AB $= x$, perpendicularis BC $= y$, AK $= a$: invenienda itaque est CD, quæ si producatur ad E, DE sit = AE; & resultans æquatio habebit duas radices æquales, quia supponitur C esse punctum concurrentiæ, per quod, scil. unica linea DE ducitur, ita ut sit = AE: ponatur ergo CD $= z$, & AE [ED] $= m$; erit CE $= m - z$, BE $= \sqrt{(mm - 2mz + zz - yy)}$ & AE = AB − BE $= x - \sqrt{(mm - 2mz + zz - yy)} = m$; reducta æquatione invenitur $m = (xx - zz + yy) : (2x - 2z)$; porro quia $\sqrt{(aa - xx)} =$ GB, erit GC × CH [DC × CF] $= aa - xx - yy$; proinde CF $= (aa - xx - yy) : z$, & DF $= (aa - xx - yy + zz) : z$, & EF $= (aa - xx - yy + zz) : z - m$, ideoque DE × EF = [KE × KI] $= aa - mm = (aa - xx - yy + zz)\, m : z - mm$; invenietur ergo $m = aaz : (aa - xx - yy + zz) = (xx - zz + yy) : (2x - 2z)$; reducta æquatione habetur $z^4 - 2xxzz - 2yyzz - aazz + 2aaxz + x^4 + 2xxyy + y^4 - aaxx - aayy = 0$

Hæc æquatio duas radices æquales habens multiplicetur per duas progressiones arithmeticas.

$$\begin{array}{lllll|lllll}
-0, & -1, & -2, & -3, & -4 & +4, & +3, & +2, & +1, & +0, \\
z^4 & * & -2xxzz & +2aaxz & +x^4 = 0 = z^4 & * & -2xxzz & +2aaxz & +x^4 & \\
 & & -2yyzz & & +2xxyy & & -2yyzz & & +2xxyy & \\
 & & -aazz & & +y^4 & & -aazz & & +y^4 & \\
 & & & & -aaxx & & & & -aaxx & \\
 & & & & -aayy & & & & -aayy &
\end{array}$$

Num. XLVI.

provenient duæ æquationes ⊙ & ☿

$$\odot\quad \begin{array}{lll} 4xxzz & -\,6aaxz & -\,4x^4 \\ +\,4yyzz & & -\,8xxyy \\ +\,2aazz & & -\,4y^4 \\ & & +\,4aaxx \\ & & +\,4aayy \end{array} = 0 = \begin{array}{lll} 4z^4 & * & -\,4xxzz \quad +\,2aaxz \\ & & -\,4yyzz \\ & & -\,2aazz \end{array}\ ☿$$

multiplicetur ⊙ per z, & ☿ per $(xx+yy+\frac{1}{2}aa):z$, provenit

$$\begin{array}{lll} 4xxz^3 & -\,6aaxzz & -\,4x^4z \\ +\,4yyz^3 & & -\,8xxyyz \\ +\,2aaz^3 & & -\,4y^4z \\ & & +\,4aaxxz \\ & & +\,4aayyz \end{array} = 0 = \begin{array}{llll} 4xxz^3 & * & -\,4x^4z & +\,2aax^3 \\ +\,4yyz^3 & & -\,8xxyyz & +\,2aaxyy \\ +\,2aaz^3 & & -\,4aaxxz & +\,a^4x \\ & & -\,4y^4z & \\ & & -\,4aayyz & \\ & & -\,a^4z & \end{array}$$

quarum hanc ab illa si subtrahas, residuum per aa divisum, erit

$$♃\quad \begin{array}{lll} 6xxz & -\,8xxz & +\,2x^3 \\ & -\,8yyz & +\,2xyy \\ & -\,aaz & +\,aax \end{array} = 0$$

multiplicetur ⊙ per $3x$, & ♃ per $2xx+2yy+aa$, habebitur

$$\begin{array}{lll} 12x^3zz & -\,18aaxxz & -\,12x^5 \\ +\,12xyyzz & & -\,24x^3yy \\ +\,6aaxzz & & -\,12xy^4 \\ & & +\,12aax^3 \\ & & +\,12aaxyy \end{array} = 0 = \begin{array}{lll} 12x^3zz & -\,16x^4z & +\,4x^5 \\ +\,12xyyzz & -\,32xxyyz & +\,8x^3yy \\ +\,6aaxzz & -\,16y^4z & +\,4aax^3 \\ & -\,10aaxxz & +\,4xy^4 \\ & -\,10aayyz & +\,4aaxyy \\ & -\,a^4z & +\,a^4x \end{array}$$

subtractione peracta, residuum est

$$☾\quad \begin{array}{ll} 16x^4z & -\,16x^5 \\ +\,32xxyyz & -\,32x^3yy \\ +\,16y^4z & -\,16xy^4 \\ -\,8aaxxz & +\,8aax^3 \\ +\,10aayyz & +\,8aaxyy \\ +\,a^4z & -\,a^4x \end{array} = 0$$

multiplicetur ♃ per z, & ☿ per $\frac{3}{2}x$, habebitur

$$\begin{array}{lll} 6xz^3 & -\,8xxzz & +\,2x^3z \\ & -\,8yyzz & +\,2xyyz \\ & -\,aazz & +\,aaxz \end{array} = 0 = \begin{array}{llll} 6xz^3 & * & -\,6x^3z & +\,3aaxx \\ & & -\,6xyyz & \\ & & -\,3aaxz & \end{array}$$

& sub-

& subtractionis residuum erit

$$\begin{array}{l} 8xxzz - 8x^3z + 3aaxx = 0 \\ + 8yyzz - 8xyyz \\ + aazz - 4aaxz \end{array}$$

quod si subtrahatur ex duplo $\odot$, residuum erit

$$\begin{array}{l} 3aazz - 8aaxz - 8x^4 = 0 \\ \quad + 8x^3z - 16xxyy \\ \quad + 8xyyz - 8y^4 \\ \quad\quad + 5aaxx \\ \quad\quad + 8aayy \end{array}$$

hoc multiplicetur per $2x$ & ♃ per aa, erit

$$\begin{array}{lcl} 6aaxzz - 16aaxxz - 16x^5 = 0 & = & 6aaxzz - 8aaxxz + 2aax^3 \\ + 16x^4z - 32x^3yy & & - 8aayyz + 2aaxyy \\ + 16xxyyz - 16xy^4 & & - a^4z + a^4x \\ + 10aax^3 & & \\ + 16aaxyy & & \end{array}$$

residuum

$$\text{♀} \quad \begin{array}{l} 8aaxxz + 16x^5 = 0 \\ - 16x^4z + 32x^3yy \\ - 16xxyyz + 16xy^4 \\ - 8aayyz - 8aax^3 \\ - a^4z - 14aaxyy \\ + a^4x \end{array}$$

addantur nunc ♀ & ☾, & dividendo per $2yy$, habebitur $8xxz + 8yyz + aaz - 3aax = 0$, ideoque erit $z = 3aax : (8xx + 8yy + aa)$, & per æquationem ♀ est $z = (16x^5 + 32x^3yy + 16xy^4 - 8aax^3 - 14aaxyy + a^4x) : (8aaxx - 16x^4 - 16xxyy - 8aayy - a^4)$. Multiplicando per crucem, & reducta æquatione ad cyphram orietur tandem

$$\begin{array}{l} 64x^6 - 48aax^4 + 12a^4xx - a^6 = 0 \\ + 192yyx^4 - 96aayyxx - 15a^4yy \\ \quad + 192y^4xx - 48aay^4 \\ \quad\quad + 64y^6 \end{array}$$

Hæc, quæ vera est æquatio naturam curvæ determinans, ad pauciores dimensiones reduci nequit, cum per positionem $y = \frac{1}{2}a$, æquatio $256x^6 - 27a^6 = 0$, irreducibilis oriatur; unde consequitur, diversam esse ab

 ea,

Num. XLVI. ea, quam applicatæ semicirculi in punctis bisectionum formant, ut pote cujus natura per æquationem biquadraticam exprimitur (b)

$$\begin{array}{l} 16x^4 - 8aaxx + a^4 = 0 \\ \quad - 8ayxx - 2a^3y \\ \quad + 16yyxx + aayy \end{array}$$

Haud absimili modo invenitur natura curvæ ABC, (*Fig.* 4) quæ talis est, ut a quocunque curvæ puncto B tangens utrinque protensa, & a cruribus anguli recti FA, FC intercepta, ED, sit æqualis constanti datæ. Invenio namque pro æquatione naturam curvæ exprimente [posito FG $= x$, GB $= y$, ED $= a$] (c)

$$\begin{array}{l} x^6 - 3aax^4 + 3a^4xx - a^6 = 0 \\ \quad + 3yyx^4 + 21aayyxx + 3a^4yy \\ \quad\quad + 3y^4x^2 - 3aay^4 \\ \quad\quad\quad + y^6 \end{array}$$

Curvæ autem portio BC [ut & hoc moneam] æqualis est $\frac{3}{2}$ BD, proinde longitudo totius curvæ ABC æquatur $\frac{3}{2}$ AF vel $\frac{3}{2}$ ED.

Insuper natura curvæ CKIH, quæ ex evolutione curvæ ABC describitur

(b) Est enim FH $=$ FG $+ \frac{1}{2}$GD $=$ FG $+ \frac{1}{2}$ FD $- \frac{1}{2}$FG $= \frac{1}{2}$ FD $+ \frac{1}{2}$FG vel 2FH $=$ FD $+$ FG. Sed posita AE $= a$, FH $= x$, AF $= y$, est FD $= \sqrt{(aa - yy)}$ & FG $= \sqrt{(ay - yy)}$. Ergo $2x = \sqrt{(aa - yy)} + \sqrt{(ay - yy)}$, aut $4xx = aa - yy + ay - yy + 2\sqrt{(aa - yy)(ay - yy)}$, & $(4xx - aa - ay + 2yy)^2 = 16x^4 - 8aaxx + a^4 - 8ayxx + 2a^3y + aayy + 16xxyy - 4aayy - 4ay^3 + 4y^4 = 4a^3y - 4aayy - 4ay^3 + 4y^4$, quæ ad cyphram reducta ipsissima est Auctoris æquatio.

(c) Dicatur insuper FD $= z$, & erit GD $= z - x$, atque EF$^2 =$ ED$^2 -$ DF$^2 = aa - zz$. Igitur, propter BG parallelam FE, erit EF^2 $[aa - zz]$: FD^2 $[zz]$ $=$ BG^2 $[yy]$: GD^2 $[zz - 2zx + xx]$, ideoque $aazz - z^4 - 2aaxz + 2xz^3 + aaxx - xxzz = yyzz$, quæ ordinata, & per duplicem progressionem arithmeticam multiplicata, post varias reductiones, eliminata z, tandem dabit æquationem Auctoris nostri. Sed ea multo facilius, per Calculum infinitesimalem obtineatur: Videatur *Analysis infin. parvorum* March. HOSPITALII, §. 152. *sq.* ubi ostenditur FG $[x] = z^3 : aa$, ideoque GD $= z - z^3 : aa = (aa - zz)z : aa$, nec non GB $[y] = (aa - zz)\sqrt{(aa - zz)} : aa$, propter FD : GD $=$ EF : GB: unde eliminata z, habetur æquatio Auctoris nostri. Vide ibidem demonstratas plerasque hujus curvæ, & ejus evolutæ proprietates.

bitur, [posito $FG = x$, $GI = z$] exprimitur per hanc æquationem (a). Num. XLVI.

$$4x^6 - 12aax^4 + 12a^4xx - 4a^6 = 0$$
$$+ 12zzx^4 - 24aazzxx + 12a^4zz$$
$$+ 12z^4xx - 15aaz^4$$
$$+ 4z^6$$

Curvæ hæ habent hanc proprietatem insignem: Spatium curvilineum BDC est ad spatium curvilineum DKC ubique ut 4 ad 5.

Facta FL & FM $= \frac{2}{5}$ AF seu FC, ductisque MN & LN parallelis FC & AF: erit punctum concursus N centrum gravitatis curvæ ABC.

Facta vero FO $= \frac{2}{5}$ FG, erit centrum gravitatis portionis AB in linea parallela OP

Facta FQ $= \frac{2}{5}$ GB, erit centrum gravitatis portionis BC in linea parallela QR.

Cæterum animadvertit *Clarissimus Frater*, methodum hanc posse generalem effici, & adhiberi ad determinandas naturas omnium Evolutarum & Causticarum, hoc est curvarum, quæ per intersectiones perpendicularium aut radiorum reflexorum formantur: Etenim si duæ rectæ [*Figura* V] BD, CD, fingantur esse perpendiculares ad curvam ACB, vel radiorum incidentium LB, LC reflexi, intersecantes sese in communi puncto D; sequitur utique, quod vice versa ex dato puncto D duæ quoque hujusmodi lineæ inflecti possint, quæ sint vel perpendiculares curvæ AB, vel reflexi radiorum in punctum L vergentium. Quo circa, si rectæ AE, ED, utut indeterminatæ, considerentur tantisper ut cognitæ & determinatæ; hoc est, punctum D ut datum, & quæratur exinde longitudo z, puta ipsius DB vel BL, vel BG, vel AG [prout hoc illudve simplicius videbitur] habebit æquatio, longitudinem z exprimens, duas radices æquales quidem, sicubi puncta B & C indistantia, hoc est, punctum D in curva optata fuerit: quare, si porro dicta æquatio nota methodo tractetur, & eliminetur ex illa littera z, resultabit alia, quæ relationem indeterminatarum x & y, sive rectarum AE, DE, adeoque naturam curvæ quæsitæ exhibet. E quibus concludit, Geometriam vulgarem, si dextre adhibeatur, posse nonnunquam ad ea quoque problemata extendi, quæ absque reconditiore indivisibilium Geometria solvi non posse credebantur; quanquam cætera cum hac neutiquam comparari mereatur. Speciatim annotat, evolutam Parabolæ expeditiori calculo sic inveniri, quam nuper illam ope methodi infinite parvorum repererat. Positis enim

(a) Demissa ex K normali KS $= s$, & vocata FS $= x$, quoniam BK $=$ BC $= \frac{1}{2}$ BD, erit DK $= \frac{1}{2}$ BD, & DS $= \frac{1}{2}$ GD $= [aa - zz] z : 2aa$ $= x - z$ atque KS $[s] = \frac{1}{2}$ BG $= (aa - zz) \sqrt{(aa - zz)} : 2aa$; unde, eliminata z, habetur æquatio.

Num. XLVI.

Latere recto Parab. $= a$		$AI + IE = AG + GF + FE$
	erit $AG = zz : a$	$\frac{1}{2}a + x = zz : a + \frac{1}{2}a + ay : 2z$
$AI = \frac{1}{2}a$	$GF = \frac{1}{2}a$	$x = zz : a + ay : 2z$
$IE = x$	$EF = ay : 2z$	
$ED = y$		
$BG = z$		

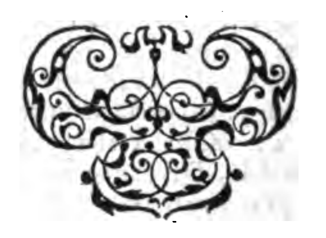
$$2z^3 * - 2axz + aay = 0 = 2z^3 * - 2axz + aay$$
$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & & 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$-4axz + 3aay = 0 = 6z^3 - 2axz$$

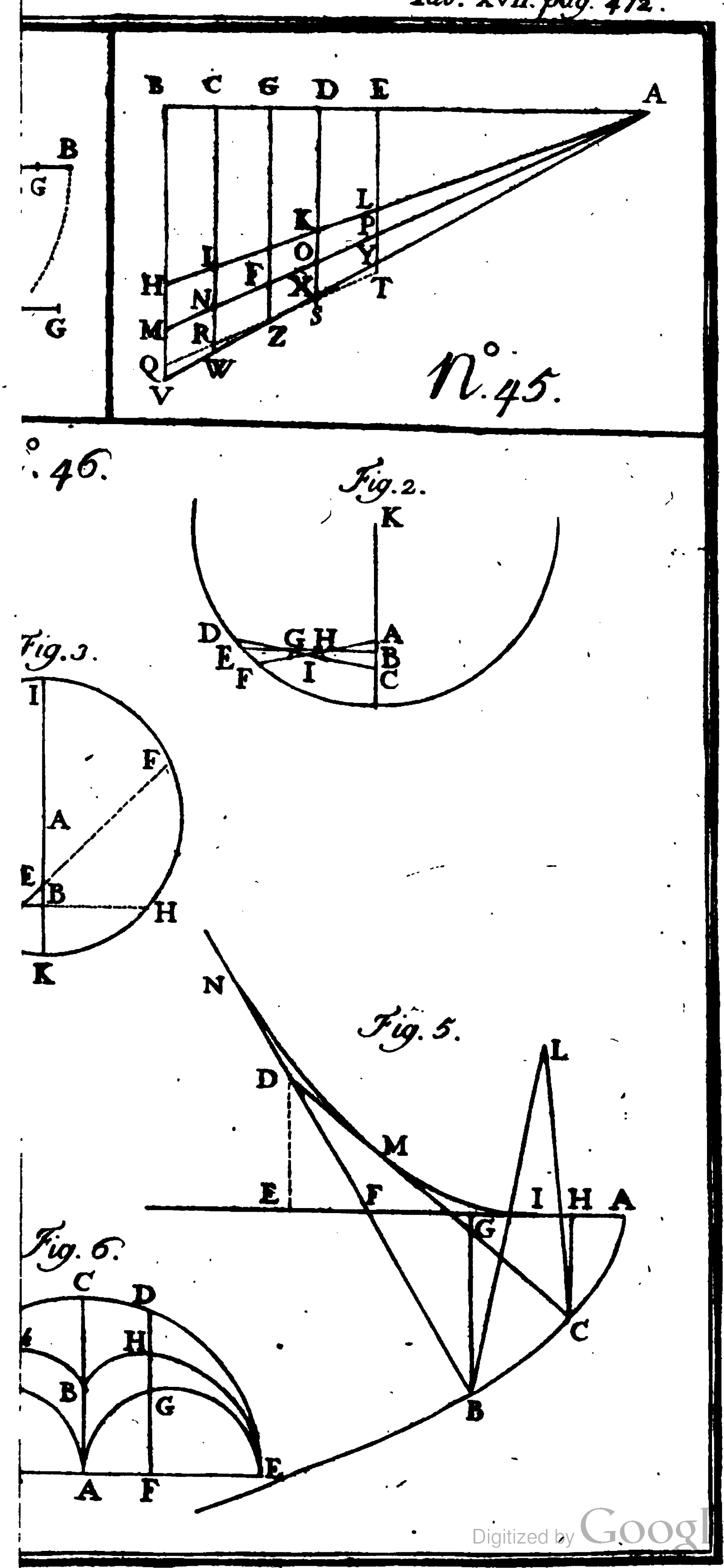
$$z = 3ay : 4x \qquad 3zz = ax$$

$$zz = 9aayy : 16xx \qquad zz = ax : 3$$

Unde $9aayy : 16xx = ax : 3$ & $27ayy = 16x^3$



N°. XLVII.


B C G D E A
L
K P
I O Y
H F X T
N S
M R Z
Q W
V
N°. 45.
G B
G
°. 46.
Fig. 2.
K
D G H A
E B
F I C
Fig. 3.
I
F
A
E B
H
K
N
Fig. 5.
L
D
M
E F I H A
G
C
B
Fig. 6.
C D
H
B
G
A F E

N°. XLVII.

ADDITAMENTUM
AD SOLUTIONEM
CURVÆ CAUSTICÆ
Fratris Joannis BERNOULLI,
Una cum Meditatione de Natura Evolutarum, & variis osculationum generibus.

ANtequam *Frater* hanc suam lucubratiunculam *Geneva* mihi transmisisset, pervenit ad Nos *September Actorum*, ubi Celeberrimus LEIBNITIUS in excussione *Solutionum Problematis Catenarii* [de quarum pulchro consensu nobis multum gratulamur] occasionem captat recordandi subtilissimæ suæ *Meditationis de Contactu* [quem significanter vocat] *osculi*, * memorando HUGENIUM primum animadvertisse, quod centra circulorum curvas osculantium perpetuo incidant in lineas istas, quas proxime contemplati sumus, eas scilicet, ex quarum evolutione illæ describuntur. Qua occasione Evolutas aliter reperire, insimulque osculorum naturam Geometris paucis hactenus satis perspectam, plenius cognoscere didici; quod jam ostendo. Pono iterum [Tab. XVII. N°. 46. *Fig.* 5.] AE $= x$, ED $= y$, DB $= z$, & BG, vel AG $= u$: consideroque tres priores

Act. Erud. Lips. 1692. Mart. pag. 110.

* G. G. L. *Meditatio nova de Natura anguli contactus & osculi, horumque usu in practica Mathesi, ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas.* Acta Erud. Lips. 1686. Jun. pag. 289.

Num. XLVII. priores ut datas, hoc est, super puncto dato D concipio descriptum esse circulum radio DB, & quæro exinde per naturam curvæ ACB quartam *u*, cujus valor exprimetur per æquationem tot dimensionum, in quot diversis punctis circulus iste curvam secat, vel secare potest. Sint duæ intersectiones proximæ B & C, ac intelligatur super D novus describi circulus, radio continuo majori vel minori, quousque puncta B & C propius subinde coeuntia tandem in unum coalescant, quod fit B; quo facto & ipsæ CH & BG uniuntur, radixque æquationis *u* duos æquales valores acquirit, radius vero DB fit curvæ perpendicularis, ipsamque cum secasset antea, nunc tangit circulus: ad quem proin contactum inveniendum multiplico repertam æquationem per progressionem arithmeticam, & quod provenit cum dicta æquatione [aliave per aliam progressionem arithmeticam similiter quæsita] methodo, qua supra usus est *Frater*, confero, ut eliminata littera *u* habeam æquationem inter *x* & *y* [quam tamen necessario etiam ingredietur *z*]. Quare si hac data manente, cæteræ *x* & *y* spectentur ut indeterminatæ, denotabit æquatio ultima lineam, in qua sumpto ubivis puncto D, circulus super illo descriptus radio constanti DB curvam AB tangit. Quod si nunc radius DB, sive *z*, continuo major minorve assumatur, nascentur subinde aliæ curvæ infinitæ, quæ omnes inter se & principali AB erunt parallelæ, ceu eodem constanti intervallo perpendiculari DB ab illa distantes, hacque inter se affinitate gaudent, quod ab evolutione ejusdem curvæ ID per filum DB [in infinitum, si vis, ex parte B productum] facta simul omnes describantur; unde principali AB *condescriptæ* dici possunt.

Porro si circulus OCBPQS [ut in ea quam hic sistimus figura 1 Tab. XVIII. N°. 47.] præter contactum curvæ TCBPRS in puncto B, eandem insuper secat alibi in punctis C, P, S, ab alterutra vel utraque parte: tum fluere intelligatur centrum D in recta indefinita DB, & novi subinde concipiantur circuli per B transeuntes; sic manebit quidem contactus singulorum cum curva fixus in B, at intersectiones reliquæ erunt ambulatoriæ, permeabuntque omnia curvæ puncta: nimirum si circulus curvam tanga:

gat exterius in B, & centrum D fluat versus idem punctum : aut N.XLVII
i tangat illam interius, & recedat centrum ab eodem, futurum utroque modo, ut intersectiones P, C, contactui B proximæ huic continuo appropinquent, quousque alterutra earum, puta C, in illum incidat, & sic duabus intersectionibus, quibus contactus B æquivalet, tertiam jungendo, osculum primi gradus efficiat: ubi hoc singulare evenit, quod postquam C cum B coaluit, [P nondum attingente ipsum B, vel etiam nulla existente intersectione P,] arcuum circuli C O [hoc est, B C O] & BP alter ab intra, alter ab extra curvam osculatur, eamque adeo revera secat, non tangit; ipso contactus genere perfectiori contactum quasi destruente, & in sectionem transformante. Quod si durante fluxu puncti D per rectam BD contingat, ut ambæ intersectiones C & P eodem momento ad punctum B appellant [quod accidit, cum portiones curvæ BC, BP, aut prorsus similares sunt, aut saltem in partibus suis minimis ipsi B proximis eandem flexionem, curvedinem, seu declivitatem habent,] tum circulus curvam in puncto B excipiet osculo secundi gradus; coincidentibus ibidem quatuor intersectionibus, sed sectione jam iterum in contactum abeunte; vel potius [quia ob simultaneum appulsum punctorum C & P nulla in B sectio præcessit] ipso contactu externo tantum in internum verso, aut vicissim; qui vero altera vice sectionis naturam indueret, si quinta intersectio accederet, & denuo rediret in contactum, ubi sexta. In genere osculationes graduum a numero impari denominatorum sunt sectiones, a pari contactus. Jam vero tametsi ulteriori fluxu puncti D per rectam BD, circuli, quorum centrum est, crescere vel decrescere pergant, nulla amplius reliquarum intersectionum osculo in B addi potest; præterquam enim quod intersectiones P & C in contactu B non stabiles manent, sed ex eodem subinde emergentes ad oppositas curvæ partes prorepunt, aut prorsus evanescunt; cæteræ [qualis S] a contactu B perpetuo longius recedere coguntur; tantum abest ut ei appropinquent : ad hoc enim efficiendum requireretur, ut novi isti circuli, imaginatione supplendi, curvam nostram & prius ipsum circulum hic expressum [quem in B tangere supponuntur] alicubi inter B & S sec-

Num. XLVII. ſecarent, quod abſurdum: unde diſcimus, quod ſi circulus quamcumque curvam primi vel ſecundi gradus oſculo amplectitur, nullus alius circulus inter ipſum curvamque duci poteſt. Secus ſentiendum de hyperbolis & ellipſibus: quia enim duæ hyperbolæ, vel ellipſes duorum laterum cum tranſverſi tum recti, in vertice ſe tangentes, in duobus quoque aliis punctis ſe ſecare queunt, fieri poteſt, ut dum una earum, fluxu lateris ſui, ampliatur, vel contrahitur; alteram tandem oſculo ſecundi gradus ſalutare incipiat, collectis in ipſo vertice duabus illis interſectionibus; quod contingit, ubi ambo recta latera æquata fuerint: quo circa ſubſtituta, in ſchemate noſtro, loco circuli hyperbola, quæ propoſitam curvam TCBPR itidem ſecundi gradus oſculo amplectatur, & eandem præterea ſecet alibi, poterunt utique duæ interſectiones proximæ, hinc inde exiſtentes, fluxu tranſverſi lateris ad punctum B adduci, oſculumque ſic duobus gradibus perfici; quippe quod, manente latere recto, interea non turbari potuit: atque tum inter hyperbolam & curvam alteram nulla amplius hyperbola interjici poterit. At hoc non impedit, quominus altera curvarum [quam magis compoſitam ſupponimus] ampliatione vel contractione ſui inter angulum oſculi RPQ ſe inſinuare, & ſectionem S ad punctum P vel B adducendo perfectiorem congreſſum efficere valeat. Oſculum duarum curvarum, quod fluxu ſolius ſimplicioris curvæ dividi amplius nequit, dicetur oſculum *completum*; quod fluxu neutrius ita dividi valet, ut alibi nova curvarum ſectio oriatur, *coitus* appellabitur. Curva curvam *complete* tum oſculatur, cum illam tanti gradus oſculo complectitur, quot ordinarie punctis *aliam ſui nominis* ſecare poteſt, quanquam inferior gradus ſufficere poſſit. Ita parabola aliam parabolam quatuor quidem punctis ſecare poteſt; at quia nunquam omnes hæ quatuor interſectiones coaleſcere poſſunt, fit ut ſi quam curvam ſecundo, nonnunquam etiam primo tantum gradu oſculatur, jam complete oſculetur: uti circulus quamcunque curvam oſculatur, complete oſculatur; uti recta quamcumque tangit, complete tangit; hyperbolæ vero vel ellipſis oſculum, niſi tertiæ, vel quartæ ſit perfectionis, completum non eſt. Quod ſi omnes interſectiones,

nes, quibus alias datæ curvæ se mutuo secare possunt, in unum punctum confluant, oritur *coitus*, qui est consummatissimus eaum congressus, quo quam maxime fieri potest, sibi assimilantur rel uniuntur; quanquam in diversis curvarum generibus unus alio perfectior esse possit; nec datur perfectissimus, nisi fortasse curvarum congruentiam perfectissimum coitum appellare velis.

Jam vero, relictis superiorum graduum osculis, ad considerationem Evolutarum descendamus, reassumpto, in eumdem finem, primi gradus osculo. Hoc quia consistit in concursu trium intersectionum, pono nuperam æquationem pro his intersectionibus nventam habere tres radices æquales, eamque bis multiplico per progressionem arithmeticam, aut brevius semel per productum duaum, & quod resultat, cum alia, aliisve, per productum duarum progressionum similiter quæsitis æquationibus varie confero, donec elisa, non tantum littera u, sed & ipsa z, æquationem inveniam, quam solæ x & y [sed tamen ambæ necessario] ingrediantur. Ea enim suppeditabit lineam, in qua sumptum quodvis punctum centrum esse potest circuli alicujus curvam propositam primo gradu osculantis, cujusque cum evoluta identitatem HUGENIUM notasse ex relatione Celeberrimi LEIBNITII constare supra diximus. Ipsa vero z, hoc est, radius circuli osculatoris, seu longitudo fili evolventis, ex se indeterminata, per ipsam x vel y determinationem accipit. Exemplum Parabolæ reassumo; Tab. XVII. N°. 46. *Fig.* 5.

Lat. rect. Parab. $= a$ DB $= z$ erit AG $= uu : a$

AE $= x$ BG $= u$ EG $= [\text{AE} - \text{AG}] = x - uu : a$

ED $= y$ BG $+$ DE $= u + y$

$$EGq + (BG + DE)\,q = DBq$$

$$u^4 : aa - 2xu^2 : a + xx + uu + 2yu + yy = zz,$$

Num. XLVII.

hinc

$$\begin{array}{ccccc|ccccc} u^4 * & -2axu^2 & +2aayu & +aaxx & =0 & u^4 * & -2axu^2 & +2aayu & +aaxx & =0 \\ & +aau^2 & & +aayy & & & +aau^2 & & +aayy & \\ & & & -aazz & & & & & -aazz & \\ \hline 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & 4. & 3. & 2. & 1 & 0 \\ 4. & 3. & 2. & 1. & 0 & 3. & 2. & 1. & 0 & -1 \\ \hline 0. & -3. & -4. & -3. & 0 & 12. & 6. & 2. & 0 & 0 \end{array}$$

$$+8axu - 6aay = 0 \quad\Big|\quad 12uu * -4ax$$
$$-4aau \qquad\qquad\quad +2aa$$

sive $u = 3ay : (4x - 2a)$ | $uu = (2ax - aa) : 6$

sive ponendo $t = x - \frac{1}{2}a$

$u = 3ay : 4t$, & $uu = 9aayy : 16tt = at : 3$

unde $27ayy = 16t^3$.

Ad inveniendum circulum, qui curvam propositam secundo gradu osculetur, coincidentibus in puncto osculi quatuor intersectionibus, pono æquationem habere quatuor radices æquales, eamque multiplico per productum trium progressionum arithmeticarum, quod aliquoties repeto; donec via constet, non tantum ipsas u & z, sed alterutram quoque ipsarum x vel y ex æquatione eliminandi: sic reliqua determinata erit, & per ipsam etiam cæteræ determinabuntur. Itaque non nisi definitus existit circulorum numerus, qui curvam quampiam secundi gradus osculo complecti possunt, secus ac illorum, qui eandem duntaxat primo gradu osculantur. Centra vero horum circulorum non possunt alibi quam in ipsis evolutis existere, quandoquidem quatuor radices æquales etiam tres, & osculatio perfectior imperfectiorem continet: non hærent autem in mediis evolutarum partibus, quia circulus osculator super quovis evolutæ puncto intermedio descriptus, curvam necessario secat contra naturam osculi secundi gradus. Sit N centrum, NB radius circuli osculatoris; erit NB [$=$ NM $+$ MC] $>$ recta NC; iterum sit M centrum & MC radius, erit MC [$=$ NB $-$ NM] $<$ recta MB; quare circulus osculator versus principium evolutionis jacet extra, versus finem intra curvam, ideoque secat. Hærent ergo centra illa in extremitatibus

mitatibus evolutarum, earumque mutuis contactibus: unde quot locis curva osculi secundæ perfectionis capax est [est vero, ubi curvedo ejus maxima est, vel minima] tot requiruntur ad illam evolutione describendam aliæ curvæ, & una præterea. Ita semiparabola cubica AEG, [Tab. XVIII. N°. 47. *Fig.* 2.] (in qua videlicet abscissæ AB sunt ut cubi ordinatarum BE) tametsi in eandem partem cava sit, nec pars ejus ulla similaris alteri, non potest unius solius curvæ evolutione tota describi, sed requiruntur duæ, quarum una DH, axi AC asymptotos, inservit describendæ portioni EA, altera DI portioni EG, quæque communi extremitate sua D centrum definiunt circuli, curvam in E secundo gradu osculantis. Reperitur autem circulus hic osculator (posito latere recto Parabolæ 1) faciendo $AC = \frac{2}{9}\sqrt{\sqrt{45}}$; $CD = 2 : 5\sqrt{\sqrt{45}}$; $DE = \frac{3}{5}\sqrt{\sqrt{\frac{4}{5}}}$, ut fiat $BE = 1 : \sqrt{\sqrt{45}}$. (*) Num. XLVII.

Summatim dicta recolligo: *Contactus* simplex circuli & curvæ cujusvis invenitur per *duas* radices æquales, & locus centri ejus

 est

(*) Si, juxta methodum Auctoris, dicatur AC, x; CD, y; ED, z; BE, u; & ideo AB, u^3; cum sit $BC^2 + (BE - CD)^2 = DE^2$, habebitur æquatio

$$u^6 - 2xu^3 + xx + uu - 2yu + yy = zz,$$

seu

$$u^6 \, {*}{*} - 2xu^3 + uu - 2yu + yy \begin{matrix} + xx \\ - zz \end{matrix} = 0$$

quam si multiplices 1°, per

90, 40, 12, 0, — 2, 0, 0

productum ex 3 progr. arith.

6. 5. 4. 3. 2. 1. 0
5. 4 3. 2. 1 0 — 1
3. 2. 1 0. — 1. — 2. — 3

habebis $90u^6 - 2uu = 0$, seu $u^4 = \frac{1}{45}$ aut $u = 1 : \sqrt{\sqrt{45}} = BE$

At si dictam æquat. multiplices 2°. per

120, 60, 24, 6, 0, 0, 0,

productum ex 3. progr. arithm.

6, 5, 4, 3, 2, 1, 0
5, 4, 3, 2, 1, 0, — 1
4, 3, 2, 1, 0, — 1, — 2

habebis $120u^6 - 12xu^3 = 0$, vel $x = 10u^3 = 10u^4 : u = \frac{10}{45}\sqrt{\sqrt{45}} = \frac{2}{9}\sqrt{\sqrt{45}} = AC$.

Denique, si hanc multiplices per

72, 30, 8, 0, 0, 2, 0

productum ex 3. progr. arithm.

6, 5, 4, 3, 2, 1, 0
4, 3, 2, 1, 0, — 1, — 2
3, 2, 1, 0, — 1, — 2, — 3

habebis $72u^6 - 4yu = 0$, vel $y = 18u^5 = 18u^4 . u = \frac{18}{45} : \sqrt{\sqrt{45}} = 2 : 5\sqrt{\sqrt{45}} = CD$.

ED vero, seu z; cum sit $zz = (x - u^3)^2 + (u - y)^2 = (\frac{1}{5}\sqrt{\sqrt{45}})^2 + (3 : 5\sqrt{\sqrt{45}})^2 = \frac{9}{25}\sqrt{\frac{4}{5}}$; erit $z = \frac{3}{5}\sqrt{\sqrt{\frac{4}{5}}}$.

Num. LXLVII. est ad infinitas lineas condescriptas, hoc est, *superficiem*: *Osculum primi gradus* reperitur per *tres* radices æquales, & locus centri osculantis circuli est ad *lineam* [scilicet *Evolutam*]. *Osculum secundi gradus* indagatur per *quatuor* radices æquales, & locus centri osculantis est ad *punctum*, vel *puncta* [Evolutarum scilicet extremitates].

Quæ cum ita se habeant, difficulter capio, quo sensu verum esse possit, quod dicitur, (b) *contactum inveniri per duas radices æquales, flexum contrarium per tres, & osculum primi gradus per quatuor, seu duos contactus coincidentes*, &c. Vidimus enim, in osculo primi gradus tres tantum intersectiones coincidere, non duos contactus, qui quatuor intersectionibus æquivalent: Potest quidem centrum osculatoris circuli seu punctum Evolutæ D [Tab. XVII. N°. 46. *Fig*. 5.] considerari ut concursus duarum curvæ perpendicularium minime distantium BD, CD; at tum reperitur, nec per tres, nec per quatuor, sed per duas tantum radices æquales, ut supra ex *Fratris* schediasmate liquet. Et quanquam si perpendiculares istæ habentur pro radiis circulorum centro D descriptorum, & per B & C transeuntium, eatenus concursus harum perpendicularium spectari potest ut concursus duorum contactuum, nullo modo tamen per quatuor radices æquales, ex nostra æquatione dicietur; quoniam eo sensu quantitas z fit indeterminata, hoc est, ipsæ DB, DC, quæ deberent poni radii ejusdem circuli, inæquales redduntur, illa hac perpetuo minore existente, siquidem $BD + DN = BN = NM + MC < ND + DC$; adeoque $DB < DC$.

Quod flexum contrarium spectat, is revera per tres æquales radices invenitur, at non aliam ob causam, quam quod ejus inventio casus tantum specialis est generalis inventionis osculationum primi gradus: in omni enim flexu contrario circulus osculator

(b) A LEIBNITIO in *Meditatione* superius laudata. Videatur Nus. LV.

ator abit in lineam rectam, & fit radii infinite magni; (c) quan- Num. XLVII.
quam non vicissim, ubicunque circulus osculator infinite magnus est, ibi requiritur flexus in contrarium. In Paraboloidibus omnibus [excepta Parabola communi] circulus osculator verticis infinite magnus, veruntamen nonnisi in illis, quorum potestates a numero impari denominantur, flexus contrarius supervenit, cæteræ ubique versus easdem partes curvæ manent.

(c) Exceptiones patitur hæc Propositio; de quibus videatur Num. LXXVI.

N°. XLVIII.

JACOBI BERNOULLI

Mathematum Professoris Basileensis

CURVATURA VELI.

In literis ejus d. 9. Martii hujus Anni, Lipsiam perscriptis communicata.

EX iis, quæ celeb. Dn. LEIBNITIUS * & ego †, superiori anno, de Loxodromiis Nauticis in lucem emisimus, colligi potest, quod si verus Navis cursus, ejusque velocitas semper cognita essent, omnia data haberentur, supputarique ad quodvis momentum posset, ubi terrarum Navis versetur; in quo consis- *Act. Erud. Lips. 1692. Mai. p. 202*

tit

* *Acta Erud. Lips.* 1691. April. pag. 181.
† Supra, N°. XLII.

tit ultima Histiodromices perfectio, & desideratissimum Longitudinum Problema. At illa duo cognosci nequeunt, nisi prius cognoscatur quantitas deviationis a plaga, in quam Navis dirigitur [Gallis, *la dérive du Vaisseau*] quæ vero nec ipsa haberi potest, nisi prius sciatur, juxta quam directionem Velum a vento impellatur; sed nec hæc determinari potest, nisi ipsa Veli Curvatura comperta habeatur, † adeo ut totius negotii certitudo tandem in cognitione *Figuræ Veli* terminetur; quæ quia huc usque latuit, efficit, ut Nautæ nondum optatum in his finem assequi potuerint, & fallacibus plerumque conjecturis deludantur.

Huic investigandæ cum me nuper applicuissem pertinacius, tandem, post aliquot conamina, voti compos factus fui, comperique [ne curiosum Lectorem diu morer,] Problema subtilissimum in ipsam *Funiculariam* desinere; adeo fuit in fatis, ut quæ figura conveniunt, in diversis linguæ nostræ Dialectis nomine quoque convenirent, idemque vocabulum *Seyl* & Germanis *Funem*. & Belgis *Velum* significare debuerit. Præstitit hic etiam *Frater* aliquid, postquam ejus Methodum (significarat enim per litteras se calculum *Leibnitianum* plurimum perfecisse,) Problemate ad puram Geometriam reducto, velut specimine tentaturus, curvaturam Veli sub ista proprietate delitescentem ei communicassem [*Sumptis æqualibus Curvæ portiunculis, Cubi ex primis differentiis ordinatarum sunt proportionales secundis differentiis abscissarum*] suppresso quo huc perveneram artificio; namque & ipse ex proprietate hac Funiculariam feliciter elicuit.

Veruntamen etiamsi constet, Velum vento inflatum funis curvedinem inducere, hoc nondum sufficit, ad determinandum [quod palmarium est] juxta quam directionem, quaque vi a vento impellatur, nisi quoque constet, quibus suppositionibus usus fuerim, ut Problema a concreta Geometria ad puram reducerem, curvamque sub caracteristica hac proprietate exhiberem. Notum est, quod in theoria Artis Nauticæ, Velum considerari vulgo soleat instar Figuræ planæ, quæ a vento juxta directionem sibi perpendicularem impellatur: unde cum talis non sit, quæ mirum

† Imo, Vide Notam (*p*.)]

nirum, si ex ficta hypothesi plerumque erroneæ, quandoque etiam um inæstimabili hominum merciumque damno conjunctæ, conlusiones deducantur? Agnoscit hac in parte imperfectionem Aris Anonymus Gallus * sub finem libelli egregii, quem *de la Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux* inscriptum, ante paucos anos, jussu Regio edidit, monetque Velum in suis partibus, ob urvaturam suam, secundum varias directiones impelli, adeoque ater omnes directiones mediam quandam assumendam esse; at uænam illa sit, uti determinare non audet, sic per meras conjecturas æstimat, quod ego scientifice & accurate consequi doceo, & quidem ita, ut vel stupidissimus Nauta meas regulas deinceps in usum transferre possit, quas sequentibus Positionibus comrehendam. (•) Num. XLVIII.

1. Si

* Dnus *Bern.* RENAUD, cujus Vitam ide in *Hist. Acad. Reg. Scient. Parif.* d *Annum* 1719. Excusus est liber *Parif.* An. 1689. *in* 8. *cum fig.* Vid. *Acta Erud.* Lipf. 1690. p. 388.

[•] Data est N°. XXXIX, æquaio generalis exprimens naturam Curarum in quas flectitur filum ab innumeris potentiis singula ejus puncta urgentibus incurvatum. Quæ, ut ad filum ab incumbente fluido, vel adlabente inflexum applicetur, statuenda est, in eadem Fig. N. XXXIX. potentia BK perpendicularis ad Bb, quia pressiones fluidorum exeruntur per lineas ad superficiem pressam perpendiculares. Ideoque Triangula KBL & KBM erunt similia Tr. BbE, & sinus s anguli KBM $=$ sinui $dy:dz$ anguli bBE, atque sinus $\surd(1-ss)$ anguli KBL $=$ sinui $dx:dz$ anguli BbE. Quibus in æquatione generali $adx = dy\int psdz + dx\int pdz\surd(1-ss)$ substitutis, ea reducitur ad $adx - dx\int pdx = dy\int pdy$. Hæc simplicior evadit, dividendo per dx, $a - \int pdx = \frac{dy}{dx}\int pdy$; differentiando, $-pdx = \frac{pdy^2}{dx} + \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}\int pdy$; scribendo $-dxddx:dy$ pro ddy [quia posita dz constante, diff. æquationis $dz^2 = dx^2 + dy^2$ est $o = dxddx + dyddy$] $(pdx^2 + pdy^2):dx = [dx^2ddx + dy^2ddx]\int pdy:dx^2dy$; dividendo per $[dx^2 + dy^2]:dx^2$, $pdx = \frac{ddx}{dy}\int pdy$, vel $pdy:\int pdy = ddx:dx$. Igitur $pdy = ddx$, aut, [multiplicando homogeneitatis gratia, per $b:dz$] $pdy = bddx:dz$, vel $pdydz = bddx$.

Jam, tensio fili in B, quæ N°. XXXIX generaliter inventa est $\frac{dz}{dx}$

Num. XLVIII.

1. Si ſubtenſa veli EBF, [*Fig.* 1.] hoc eſt, per extremitates veli ducta recta E F lineæ directionis venti AB perpendicularis eſt, arcuatur velum in *Circuli ſegmentum*, cujus baſis EF, axis AB directioni venti parallelus. (b)

2. Vis qua velum juxta axem AB impellitur, componitur ex celeritate venti, & ſubtenſa veli. (c)

3. Hinc, ab eodem vento, eadem vi impelluntur vela EBF, ELF, quorum ſubtenſa eadem.

4 Et idem velum EBF majore vi impellitur, ubi diductis extremitatibus E & F in arcum majoris circuli tranſierit.

5. Celeritas navium eodem ſecundo vento velitantium, cæteris paribus, ſunt ut velorum ſubtenſæ.

6. Potentia ſuſtinens venti impetum, ſeu firmitas veli requiſita, ne rumpatur, in omnibus ejus punctis eadem eſt, & componitur ex celeritate venti & radio circuli. (d)

7. Hinc potentia impellens ad potentiam ſuſtinentem, ſeu agens ad patientem eſt, ut ſubtenſa veli ad radium.

8. Ve-

$\frac{dz}{dx}\int psdz$, hic erit [propter $s = dy : dz$] $\frac{dz}{dx}\int pdy = \frac{dz}{dx} \times \frac{bdx}{dz} = b$. Eſt igitur ubique conſtans & uniformis. Sed in A ponebatur $= a$. Ergo $b = a$, & æquatio $pdydz = bddx$ evadit $pdydz = addx$.

Directio autem media biſecat angulum ATB, quia potentiæ per TA, TB trahentes, quæ ſunt tenſiones fili in A & B, ſunt æquales.

[b] In 9 prioribus §§. Auctor aſſumit hypotheſin, quam tamen ipſe poſtea [N°. LXVI.] repudiavit, ſcil. preſſionem aeris, qui poſt appulſum ad velum effluere nequit, undique æqualem eſſe: hoc eſt, aſſumit p, quæ celeritatem venti hic denotare poteſt, eſſe quantitatem conſtantem. Ergo $pdydz = addx$, integrando fiet $pydz = adx$ vel $ydz = adx : p$ & [quadrando, & pro dz^2 ſcribendo $dx^2 + dy^2$] $yydx^2 + yydy^2 = aadx^2 : p^2$, unde eſt $dx = ydy : \surd(aa : pp - yy)$, quæ integrata dat $a : p - x = \surd(aa : pp - yy)$; æquatio ad circulum cujus radius eſt $a : p$.

[c] Vis, qua velum juxta axem impellitur, æqualis eſt ſummæ preſſionum verticalium $= \int pdy = py$. Componitur itaque ex [p] celeritate venti, & [y] ſubtenſa (dimidia) veli. Hinc fluunt art. 3. 4. & 5.

[d] Firmitas, aut tenſio, fili inventa eſt $= a = p \times a : p$. Componitur itaque ex [p] celeritate venti, & [$a : p$] radio circuli. Hinc art. 7. 8. & 9.

8. Velum EBF minorem requirit firmitatem velo ELF, cu-
us major radius. Num. XLVIII.

9. Idemque velum EBF minus ſubit rupturæ periculum, ſi ddućtis ſuis extremitatibus curvetur in arcum minoris circuli.

10. Porro ſi velum EGB [*Fig. 2.*] ſuper extremitatibus ſuis E & B ita ſit expanſum, ut per extremitatem B directioni venti AB ducta perpendicularis recta BD tangat velum in B; curvatur velum in *Funiculariam*, cujus vertex B, axis AB (e)

11. Ut longitudo veli EGB ad axem BA; ita ſinus totus BC, ad rectam CH tangentem anguli CBH, quem faciunt duæ incæ directionis, una venti, altera ſecundum quam a vento velum mpellitur. (f)

(e) Nunc aſſumit Auctor aliam hypothesin, ſingulas nempe fili particulas Bb impelli venula, ſeu rivulo, ut ita dicam, aereo, cujus celeritas v, latitudo bE [dy]. Sumatur itaque Be $= vdy$, & ex preſſione obliqua derivetur perpendicularis BK $= vdy^2 : dz$ [Nam Bb [dz] : bE [dy] $=$ Be [vdy] : BK]. Sed BK, in æquatione generali, vocabatur pdz, hic igitur $p = vdy^2 : dz^2$. Unde æqu. $pdydz = addx$, reducitur ad $dy^3 : dz = addx : v$; Quæ, multiplicata per $dx : dy^3$ poterit integrari. Evadit enim $dx : dz = adxddx : vdy^3 = adxddx : v\sqrt{(dz^2 - dx^2)^3}$, cujus integralis eſt $x : dz + a : vdz$ [conſtans addita, ut x & z ſimul evaneſcant] $= a : v\sqrt{(dz^2 - dx^2)} = a : vdy$. Ergo $(x + a : v)\, dy = (a : v)\, dz$, aut [quadrando, & pro dz^2 ſcribendo $dy^2 + dx^2$] $(xx + 2ax : v + aa : vv)\, dy^2 = (aa : vv)\, dy^2 + (aa : vv)\, dx^2$; unde $dy = adx : v\sqrt{(2ax : v + xx)}$ quæ eſt æquatio ad Funiculariam vulgarem, cujus Parameter $= a : v$. Vid. Not. ad N. XXXIX.

Quoniam autem $dz = (x + a : v)\, dy : (a : v) = (x + a : v)\, dx : \sqrt{(2ax : v + xx)}$, erit, integrando, $z = \sqrt{(2ax : v + xx)}$ & $2ax : v = zz - xx$; atque $dz : dy : dx = (x + a : v) : (a : v) : z$; id quod annotaſſe, utile erit in ſequentibus.

(f) Media directio TZ biſecat angulum ATB. Huic ſi parallela ducatur BN, erit Iſoſceles Triangulum BbN. Nam ang. bBN $=$ BTz $=$ ATz $=$ FBN $=$ bNB. Igitur bN $=$ bB $= dz$, & EN $=$ bN $-$ bE $= dz - dy$. Ergo BE [dx] : EN [$dz - dy$] $= z : x + \frac{a}{v} - \frac{a}{v} = z$ [AB] : x [AF] hoc eſt, longitudo veli AB, ad axem AF, ut BE ad EN, vel, ut ſinus totus ad tangentem anguli EBN quem faciunt directiones EB venti, & NB veli; hoc eſt, in fig. Auctoris, ut BC ad CH.

Num. XLVIII. 12. Hinc angulus directionis venti & impulſionis veli perpetuo ſemirecto minor.

13. Si recta BC ſit Parameter & punctum C centrum funiculariæ, ſumaturque portio veli BG = CH & per G ducatur recta FG parallela ipſi BH, erit hæc & curvæ perpendicularis, & ſimul linea directionis veli, & axis æquilibri impulſionum. (g)

14. Eadem reperitur aliter, ſi velum ita ſecetur in G, ut ſegmentum EG ſe habeat ad ſegmentum BG, ſicut aggregatum quadratorum EGB & AB ad differentiam eorundem. (h)

15. Producta recta FG tranſit per mutuum occurſum rectarum BD, ED, extremitates veli B & E tangentium: hinc conſtat, quomodo ex concurſu rectarum tangentium ED, BD ducenda ſit perpendicularis ad funiculariam DF, quæ alias ſine reſpectu ad velum habito difficulter inveniretur. (i)

16. Vis, qua velum ſecundum directionem ſuam FG, impellitur, componitur ex celeritate venti & differentia quadratorum EGB & AB applicata ad radicem aggregati eorundem. (k)

17. Hinc

(g) Hactenus recte. Sed cum arbitraretur Auctor mediam directionem eſſe perpendicularem ad Curvam, quæſivit punctum G in quo normalis ad curvam eſſet ipſi BH parallela, ſeu, in quo dy eſſet ad dx ut BC ad CH. Sed eſt ubique dy ad dx ut [$a : v$] Parameter BC ad arcum [z] BG. Ergo BC : CH = BC : BG. Igitur CH = BG. Unde quidem ſequitur GF eſſe perpendicularem ad Curvam, & mediæ directioni parallelam. Sed non eſt ipſa media directio, quæ ad curvam obliqua N°. LXVI oſtendetur. Errorem ſuum Auctor agnovit, & correxit, N. LVIII & LXVI; quos vide.

(h) Quoniam BE [z] : BA [x] = BC [$a:v$] : BG = $ax : vz$, erit EG [$z - ax : vz = (zz - ax : v) : z$] : BG [$(ax : v) : z$] = $zz - \frac{ax}{v} : \frac{ax}{v} = 2zz - \frac{2ax}{v} : \frac{2ax}{v}$ [ſcribendo $zz - xx$ pro $2ax : v$] = $zz + xx : zz - xx$.

(i) Hic error ab Auctore agnitus & correctus N°. LXVI.

(k) Potentia TZ, ſeu vis, qua velum impellitur ſecundum directionem mediam, & tenſio veli in B ſunt inter ſe, ut latera parallela BN, Bb, Trianguli BbN. Sed BN = [13. II. Elem.] = $\sqrt{(Bb^2 + bN^2 - 2bN \times bE)} = \sqrt{(2dz^2 - 2dzdy)} = \sqrt{(2dz(dz - dy))}$. Ergo Potentia TZ ad Tenſionem [a] in B = $\sqrt{(2dz(dz - dy))} : dz = \sqrt{2(dz - dy)} : \sqrt{dz} = \sqrt{2x} : \sqrt{(x + a : v)} = \sqrt{4xx} : \sqrt{(2xx + 2ax : v)} = 2x : \sqrt{(xx +}$

17. Hinc idem velum fortius impellitur, quo magis diminuitur ejus axis, quod obtinetur adducendo propius extremitatem veli E ad tangentem BD. Num. XLVIII.

18. Robur veli, seu firmitas requisita, ne dilaceretur, ubique eadem & componitur ex celeritate venti & parametro BC [sive differentia quadratorum EGB & AB applicata ad duplum axis BA.] Nota hic discrimen inter velum funemque, qui in summis quam imis partibus majore firmitate opus habet. (l)

19. Hinc vis impellens ad vim sustinentem, ut duplum axis BA ad radicem aggregati quadratorum EGB & AB. (m)

20. Constat etiam ex secunda & decima sexta inter se collatis, quod si semel de velocitate navis, quæ velum juxta hypothesin primæ expansum habet, experientia constiterit, eadem quoque in hypothesi decimæ cæteris paribus supputari possit.

21. Quod si Veli extremitates sint in punctis E & G, & per G ducta recta GI directioni venti GL perpendicularis, cum velo expanso angulum faciat, nec illud secet, curvatur velum in *portionem Funicularia.* (n)

22. Si portio hæc continuetur ad verticem usque B, ponanturque axes æquilibrii impulsionum totius curvæ EB & portionis GB per 13, 14, iique proportionentur respectivis viribus impulsionum, erit prior axis diagonalis, alter latus alicujus parallelogrammi, cujus latus alterum est axis æquilibrii portionis EG, & simul virium quibus impellitur proportionem exhibet. (o)

23. Ad æstimandam ergo directionem veli & impulsus vim; postu-

$\surd(xx+zz)$ [scribendo nempe $zz-xx$ pro $2ax:v$]. Ergo Potentia TZ $= 2ax:\surd(xx+zz) =$ [quia $2ax = v(zz-xx)$] $= v(zz-xx):\surd(xx+zz)$; composita ex celeritate venti, & differentia quadratorum veli & axis, applicata ad radicem aggregati eorundem.

(l) Firmitas vel Tensio veli, ubique eadem [$a = v \times a:v$] componitur ex celeritate v, & parametro $a:v = (zz-xx):2x$.

(m) Vis impellens [$v(zz-xx):\surd(zz+xx)$] est ad vim sustinentem [$a = v(zz-xx):2x$] ut $2x$ ad $\surd(zz+xx)$.

(n) Sequitur ex Art. 10.

(o) Ex notissimo Theoremate; de compositione virium sequitur ultro.

Num. XLVIII. postulatur, ut datis punctis E, G, longitudine portionis EG, & positione rectæ GL axi parallelæ, duci possit funicularia ejusque vertex assignari; quod Nauclerus hac praxi mechanica consequetur facile; Punctis E, G, & recta GL in plano similiter positis, ductaque EM, ad G, L, perpendiculari, erigatur planum, & in illo recta GL ad perpendiculum, firmataque catenulæ extremitate in puncto E, ejus annulo inseratur stylus & promoveatur super recta EM, quo usque catena transeat per punctum G, & simul intercepta ejus pars portioni datæ EG adæquetur; nam si secus eveniat, alii annulo inserendus stylus, donec æqualis fiat; tum notetur styli locus M, & bisecta recta EM, dimittatur perpendiculum AB secans catenulam, quæ positionem veli referet, in optato vertice B. (r)

24. Si veli denique extremitates sint E, B, [*figura* 3.] & ex B ducta recta BG, directioni venti perpendicularis, secet velum in G, curvatur ejus portio GB in *circulum*, altera EG in *funiculariam* quæ continuata per GC habeat parametrum CD æqualem circuli radio GA. Intelligitur curva tota uno motu continuo describi, si concipiatur evolutæ funicularia IFH filum circumplicari GFH ope plumbi filo annexi, & ex E demissi, illudque postquam convolutum fuerit circa partem curvæ HF, offendere in descensu suo clavum A, positum in centro futuri circuli. Requiritur autem ad constructionem curvæ, ut datis punctis E, B, longitudine ejus EGB, & positione recta BG, dari possint segmenta curvæ. Mechanice Nauclerus, postquam velum vento inflatum fuerit, rem facile expediet: ducta enim positione data BG, dantur arcus & subtensa GB, & hinc radius circuli AG, ipsumque punctum G; & quia datum quoque punctum E, & curva EG longitudine, dabitur eadem etiam positione, per præcedentem. Unde & dabuntur axes æquilibrii, viresque impulsio-

(r) Facilius multo; Ducantur veli tangentes in E & G, quod mechanice efficere, ope funiculorum tensorum, nihil habet difficultatis; & angulus, quem comprehendunt tangentes, bisecetur. Linea bisecans mediam directionem exhibet.

pulsionum tum funiculariæ EG, tum circuli GB, ac proinde æquilibrii veli totius EGB, seu parallelogrammi diagonius, viresque quibus juxta hunc impellitur, per 2. & 22. (q) Num. XLVIII.

25. Nota, supponi, quod fluidum, post adlapsum ad portionem veli EG, libere possit motum suum prosequi: At hypothesis hæc in rigore sumpta, ut opinor, vera non est. Videtur enim torrens fluidi a stagnante ejus portione in segmento GB ita sufflaminari debere, ut supra chordam GB ad partes G exundet, ibique certum formet spatium BGL, intra quod omnis aer vel stagnare prorsus vel labi saltem segnius cogatur, & sic plus motus sui in veli portionem EG transferre necessum habeat, quam alias faceret, si non impedito cursu posset pergere: unde consequitur velum quidem in parte GB circuli, in parte LE funiculariæ curvaturam induere, at in parte GL mediæ inter utramque naturæ esse, & quæ ab exuberantis fluidi figura ejusque in velum agendi ratione dependeat. Hanc vero uti conjecturis, quæ in promptu mihi sunt, definire nolo, ita eorum sagacitati quorum pluris interest rem nauticam perficere, indagandam relinquo. Ego interea pro homine mediterraneo ad negotium maritimum, quo non est aliud e quo rebus humanis major accedit utilitas, plus satis contulisse mihi videor.

Quia in eo huc usque fui, in Funiculariæ usum in re nautica ostenderem, lubet hic quoque aliam ejus proprietatem non inelegantem, quæ in Staticis aliquando usui futura est, quamque *Fratris* industriæ debemus, aperire: Sit recta horizontalis AD [*Fig.* 4.] Vectis nullius gravitatis & simul axis funiculariæ CE, punctum B vectis hypomochlium & curvæ centrum, sitque AB = BC, & in A appensum pondus F, atque aliud huic æquale G ubivis in curva constitutum, cujusvis descensus impediatur per filum DHG, quod trochleam H complectens perpendiculariter

(q) Imo tota curva BGE funiculariæ portio est, agnoscente Auctore [N°. LXVI.] Media autem directio semper invenitur per bisectionem anguli, quem comprehendunt Tangentes extremæ.

Num. XLVIII. culariter ex vecte dependeat; erunt sic constituta pondera æqualia F & G in æquilibrio. (r)

Proxime *Elateris curvaturam* dabo. (s) Deprehendo hic vero [quod in antecessum monere lubet] rem satis memorabilem. Ut enim linteum vento tumidum *Funicularia*, sic idem ab incumbentis liquoris pondere expansum *flexi Elateris* curvaturam induit.

(r) Sit AB = BC = $a:v$, Funiculariæ parameter, pondus F, vel G = 1, eritque momentum ponderis F = $1 \times a:v = a:v$; momentum vero ponderis G = BD× tension. funis DH. Sed BD = $x + a:v$; Tensio vero funis DH ad pondus G, ut altitudo plani inclinati juxta quod G descendere nititur, ad ejus longitudinem, hoc est, ut dy ad dz, vel ut $a:v$ ad $x + a:v$. Igitur, cum pondus G sit = 1, erit funis DH tensio $= \frac{a:v}{x+a:v}$. Ergo BD× tens. funis DH, seu momentum ponderis G = $(x+a:v) \times \frac{a:v}{x+a:v} = a:v =$ momento ponderis F. Erunt igitur pondera F & G in æquilibrio.

(s) Vide Num. LVIII.



N°. 47.

Fig. 2.

A B E C D I H G

Fig. 2.

E L A M F I G D B H C

Fig. 4.

B C D H G E

No. XLIX.

LINEÆ CYCLOIDALES, EVOLUTÆ, ANT-EVOLUTÆ, CAUSTICÆ, ANTI-CAUSTICÆ, PERI-CAUSTICÆ.

Earum usus & simplex relatio ad se invicem. Spira mirabilis. Aliaque.

Per JAC. BERNOULLI.

CYcloïs *mechanica* [quæ ex revolutione circuli super linea recta oritur] jam toto hoc seculo pervulgata extitit. *Geometrica*, quæ ex circuli super circulo rotatione nascitur, Clarissimis Viris TSCHIRNHAUSIO †, & NEWTONO *, primum considerari cœpit. Evolutarum notitiam Illustri HUGENIO debemus. Causticæ præfatum itidem Nobiliss. TSCHIRNHAUSIUM ** Auctorem agnoscunt. Cycloidales in genere spectatæ, cæteræque initio memoratæ curvæ, neglectæ fere hactenus; sed nec extitit, qui Evolutarum & Causticarum cæterarumque ab his dependentium relationem mutuam exhiberet. Hanc ego paucis abhinc diebus, cum in contemplatione inventi *Tschirnhausiani* *Acta Erud. Lips. 1692. Mai. p. 207.*

† *Acta Erudit.* 1690. April. pag. 169.
* *Phil. Nat. Princ. Math.* Lib. I. Sect. X. Prop. 48. 49.
** *Acta Erudit.* 1682. Nov. pag. 364.

N. XLIX. *siani* paulo attentius versarer, reperi, ac ob rei præstantiam & utilitatem publico ocius impertiendam duxi, præmissis, quatenus necessariæ videbuntur, terminorum fere novorum definitionibus.

Si curva quævis super alia sibi æquali & simili, hoc est, eadem super se ipsa inverse posita, puta *d* H *m* super D H M [*Fig.* 1.] rotetur, ita ut perpetuo in punctis similiter positis sese contingant, describet punctum *a*, in plano genitricis curvæ *d* H *m* ubivis acceptum & ab illo una abreptum, curvam F *a*, quam ob affinitatem cum Cycloide *Cycloidalem* nuncupo. Ipsam D H M, super qua rotatio peragitur, voco *Expositam*. Curvam BL, ex cujus evolutione Exposita DHM ope fili LBH describitur, appello *Evolutam*, Rectam BH *Radium*, punctum B *Centrum circuli* expositam in H *osculantis*. Porro curvam CI, quam radiorum AH, ex puncto quovis A emanantium, reflexi HI suis intersectionibus formant, voco *Causticam ex puncto* A. Et si reflexus IH, producatur ultra expositam in *a*, ut sit H *a* æqualis HA, erit, quam punctum *a* formabit, curva F *a*, *Anti-Caustica*. Sin radius incidens AH producatur in *i* ut sit H *i* æqualis radio reflexo HI, erit punctum *i* ad Curvam E *i* dictam *Peri-Causticam*. Denique, si radius circuli osculatoris BH producatur in *b*, donec H *b* fiat æqualis ipsi HB, formabit punctum *b Ant-Evolutam* Curvam G *b*. Reperi autem, cum recordarer D. LEIBNITIUM affinia quædam antehac de *Lineis opticis* in *Actis* * publicasse, *Causticas* & *Anti-Causticas* nostras quodammodo easdem esse, quas Vir Celeberrimus ἀκάμπτους καὶ ἀνακλάστους nuncupat. Officium tribus lineis *Anti-Caustica*, *Peri-Caustica* & *Ant-Evoluta* [ne omni usu destitutæ videantur] hoc tribuo, ut prima determinet locum imaginis puncti radiantis A ex Caustica C I per reflexionem conspectæ; altera sit ipsa totius Causticæ in speculum DHM projectæ, & ab oculo in A exceptæ imago; tertia denique locum imaginis oculi semet ipsum ex Evoluta intuentis indicet. Præterea observatu dignum, *Anti-Causticam* ex evolutione Causticæ describi, & insuper eandem esse cum Cycloidali, quotiescunque punctum lineans *a* respectu genitricis curvæ *d* H *m* similiter positum est, ac punctum

* A°. 1689. Janv. pag. 36. *seq.*

punctum radians A respectu expositæ DHM (a): proinde Causticam ACI = aHI = aH + HI = AH + HI, hoc est, aggregato radii incidentis & reflexi, vel saltem eodem majorem minoremve constante longitudine. N. XLIX.

Palmarium autem, quod ostendere suscepi, relationem concernit, eamque longe simplicissimam, inter *Causticas* & *Evolutas*, quam sic determino: *Si in puncto radiante A, erigatur radio incidenti AH perpendicularis AN, secans radium circuli osculatoris HB [productum si opus sit] in N, fiatque ut 2 HN — HB ad HB, sic AH ad HI abscindendam ex radio reflexo HI, erit punctum I in Caustica ex A* (b); adeoque si 2 HN = HB, fiet

HI

(a) Sit Fa Cycloidalis genita ex rotatione curvæ dHm super DHM & Ha ducta ex puncto contactus H ad punctum lineans a erit ad descriptam Fa perpendicularis. Sed si sumatur punctum radians A, similiter positum respectu genitricis dHm ac punctum lineans a respectu expositæ DHM, non modo semper erit AH = aH, sed insuper aH producta designabit radium reflexum HI emanantis AH. Nam, propter similem situm rectarum HA, Ha, est ang. AHR = ang. aHR = ang. oppos. rHI. Ergo radii AH reflexus est HI. Igitur recta aHI, perpendicularis ad Cycloidalem, perpetuo tangit causticam CI. Cycloidalis igitur quæ [propter HA = Ha] eadem est cum Anti-Caustica, ex evolutione Causticæ describitur.

(b) Sint H, h [*Fig.* 3.] expositæ puncta vicinissima; HB, hB radii circuli osculatoris ad curvam Hh normales; AH, Ah radii incidentes; HI, hI reflexi. Summa angulor. AHB, & HAh æqualis est ang. ASB, qui pariter æqualis est summæ ang. AhB, hBH. Ergo summa ang. AHB, HAh æqualis summæ ang. AhB, hBH; atque ideo differentia angul. AHB, AhB, æqualis differentiæ ang. A & B. Pariter ang. BTI æqualis summæ tam angulor. BHI, HBh, quam angulor. BhI, HIh. Igitur hæ summæ sunt æquales, atque ideo differentiæ angul. BHI, BhI, æqualis differentiæ ang. B & I. Jam autem, ex lege reflexionis, æquales sunt ang. AHB, AhB, angulis BHI, BhI, & horum differentia æqualis illorum differentiæ. Quare etiam differentia ang. A & B æqualis est differentiæ angulorum B & I. Est igitur ang. B medius arithmeticus inter ang. A & I, & anguli B duplum æquale summæ angul. A & I. Angulor. autem A, I, B mensuræ; sunt arcus HQ, HO, Hh [centris A, I, B; per H descripti,] divisi per suos respective radios HA,

N.XLIX. HI infinita; hoc est radii reflexi contigui erunt paralleli: si $2HN < HB$, radii reflexi fient divergentes: si $2HN > HB$, fient convergentes: si $HN = HB$, [ut in præsenti schemate] erit $HI = AH$; denique si HN vel AH infinita, hoc est, si punctum A radiet ex infinita distantia, fiet congressus radiorum in puncto medio radii reflexi HI, abscissi a perpendiculari BI (c). Valet etiam regressus a data Caustica ad punctum radians, vel ab utroque dato ad Evolutæ puncta invenienda. At quanti usus sit hoc Theorema, præsertim in catoptricis, & quam foecundum in deducendis corollariis, quamque elegantes & expeditæ praxes inde fluant, periti harum rerum judicent. Ego unum tantum alterumve, in exemplum adducam.

1. Si punctum radians A reperiatur in peripheria circuli HcP, super semi-radio circuli osculatoris HP, ceu diametro descripti, radii reflexi contigui erunt paralleli; si illud extra peripheriam constitutum sit, erunt hi convergentes; si intra, divergentes. (d)

2. Si

HA, HI, HB. Sed [propter $HbO = IbV = HbQ$, angulos rectos O, Q, & communem hypothenusam Hb] æqualia sunt Triangula HOb, HQb, adeoque HO æquale HQ. Et Triangula bHQ, HAN, præter rectos Q, A, habentia angulos æquales bHQ, AHN [uterque enim cum ang. QHS rectum efficit] sunt similia, adeoque dant $HA : HN = HQ : Hb$, unde $Hb = \frac{HN}{HA} HQ$. Mensuræ igitur angulorum A, I, B, sunt HQ, HQ, $\frac{HN}{HA}$HQ vel HA, HA, HN, divisi per radios HA, HI, HB. Quamobrem cum sit $A + I = 2B$ vel $I = 2B - A$, erit $\frac{HA}{HI} = \frac{2HN}{HB} - \frac{HA}{HA}$, vel, [multiplicando per HB. HI] $HA.HB = 2HN.HI - HB.HI$, quæ æquatio in Analogiam resoluta dat, ut $2HN - HB$ ad HB, sic HA ad HI.

(c) Nam, ubi HN & AH sunt infinite majores quam HB, Analogia $2HN - HB : HB = AH : HI$, reducitur ad $2HN : HB = AH : HI$, vel $HN : AH = HB : 2HI$. Unde &c.

(d) Nam si A sit in peripheria circuli HcP, HN est $= HP$, & $2HN = 2HP = HB$. Si A sit extra peripheriam HcP, HN est $> HP$, & $2HN > HB$. Si A sit intra $HN < HP$, & $2HN < HB$.

2. Si radii reflexi contigui sunt paralleli, habebit Anti-Caustica in parte opposita flexum contrarium; si illi convergant, erit hæc concava; sin divergant, convexa versus partes expositæ DHM. N. XLIX.

3. Si exposita curva DHM est geometrica, ejus Evoluta, Caustica, Cycloidalis, cæteræque omnes tales erunt. De Evoluta constat ex demonstratione HUGENII in *Horologio oscillatorio*, & nupero meo schediasmate de angulo osculi. * De cæteris liquet ex relatione, quam tum inter se, tum ad Evolutam habent. Speciatim quod Cycloidalem ex circuli super circulo rotatione ortam attinet; ejus puncta geometrice inveniri possunt, non tantum cum ambo circuli æquales, sed & subinde cum inæquales fuerint [modo determinatam rationem habeant]; nonnunquam per geometriam communem [ut puncta Cycloidis *Tschirnhausianæ*] aliquando per conicas sectiones, aliquando per altioris generis curvam, &c. At indefinite conceptum Problema supponit sectionem anguli in data ratione. Nam posito, rotationem in D incepisse, si ducantur subtensa DH & communis circulorum tangens HR, fiatque angulus RHd, qui sit ad angulum RHD reciproce, ut radius expositi ad radium genitoris, secabit recta Hd genitorem circulum in d, quod vel ipsum erit punctum lineans, vel saltem ad punctum lineans a positionem datam habebit. (e)

4. Quia Evoluta tota Circuli in unum punctum abit, quod est ejus centrum, hinc Caustica *Tschirnhausiana* dicto citius determinatur (f): sed nec minus facile inveniuntur puncta alterius cujusvis Causticæ, ex puncto distantiæ finitæ.

 5. Ejus

* Supra N°. XLVII. p. 473.

(e) Ex genesi Cycloidalium circularium arcus DH arcui dH longitudine est æqualis. Ergo arcus DH mensura per angulos, ad similem mensuram arcus dH, reciproce, ut radius circuli expositi ad radium genitoris, & in eadem ratione est angulus DHR ad dHR angulum.

(f) Demissa scil. in radium reflexum perpendiculari, ex medio semidiametri ad punctum reflexionis ducti, per Not. (c). Est igitur radii reflexi pars inter circulum expositum & Causticam intercepta, dimidium partis radii incidentis, quæ inter expositam semipheriam, & diametrum ejus intercipitur. Vid. Num. *seq*.

N. XLIX. 5. Ejus Pericaustica est Ellipsis, cujus minima semidiameter radio circuli est æqualis, maxima ejusdem sesquialtera (g). Caustica ergo *Tschirnhausiana* per reflexionem oculo ex infinita distantia aspectanti apparet Ellipsis.

6. Quoniam e converso Parabolæ Caustica [*Fig.* 2.] ex radiis DB axi AN parallelis, tota concentratur in ejus umbilicum F, qui proin *Focus* appellatur; hinc, per Theorema nostrum, expedite construitur Paraboloides illa IH, ex cujus evolutione Parabola ABC describitur, hoc pacto: sumto in curva parabolica ubivis puncto B, & abscissa in axe FP = FB, ut sit ducta BP curvæ perpendicularis; fiat angulus rectus BFG, vel, si mavis, erigatur in umbilico normalis ad axem FT, & producatur BP usque in T; eritque dupla ipsius BG, vel PT, nempe BH, radius circuli Parabolam in B osculantis, hoc est, punctum H in optata Paraboloide. (h)

7. Hinc porro quædam elegantes Parabolæ proprietates demonstrantur: ut, quia dicta Caustica colligitur in punctum, & ex puncti evolutione circulus describitur, sequitur, Anti-Causticam Parabolæ esse peripheriam circuli CM super F descripti, vel ei verius concentricam aliam, adeoque FC = FB + BM = FB + BD. Quod si permutatis inter se puncto radiante & foco Parabolæ, illud in puncto F collocari, hic in puncto axis infinitæ distantiæ colligi intelligatur, erit ex foci evolutione descripta Anti-Caustica circulus infinite magnus, hoc est, recta axis perpendicularis EL, distans a vertice A quantum umbilicus; ac propterea BL = BF. Sequitur & in revolutione Parabolæ super se ipsa, focum, loco Cycloidalis, rectam EL describere.

8. Quin

(g) Ex Nota præced. Peri-caustica habet ordinatas ordinatarum semicirculi expositi sesquialteras. Hæc igitur ellipsis est.

(h) Nam, ex demonstr. Nota (c), congressus radiorum fit in medio radii reflexi abscissi a perpendiculari demissa ex centro circuli osculantis; vel, quod idem est, in extremitate radii reflexi abscissi a perpendiculari demissa ex medio radii osculatoris. Quia igitur is congressus fit in F, & est GF ad BF perpendicularis, BG est semissis radii osculatoris, & BH = 2BG = radio osculatori. Est autem Triang. FPT = FBG. Ergo PT = BG & 2PT = 2BG = radio osculi.

8. Quin & Caustica ex radiis RB axi perpendicularibus uno ductu calami sic determinatur: Ex radio reflexo abscinde BS = FT, vel si videatur elegantius, ipsi FG fac parallelam & æqualem BS, eritque S utroque modo punctum in optata Caustica (i). Quæ constructio conferri potest cum *Tschirnhausiana*, mensis Februarii 1690. N. XLIX.

9. Super omnia vero utilitatem novi Theorematis commendare potest, quod occasionem subministraverit detectioni *Curvæ mirabilis*. Sic voco *Loxodromicam* illam *planam*, seu *Spiralem Logarithmicam* (cujus dimensionem, speciminis loco, in superioris Anni *Actis* (k) exhibui], propterea quod non modo sui evolutione seipsam describere, [quod jam olim etiam *Fratri* meo observatum in *Actis* retuli], sed præterea sui ipsius *Ant-Evolutam*, *Cycloidalem*, *Causticam* ex umbilico, *Anti-Causticam*; *Peri-Causticam* esse, & infinitis aliis modis ex seipsa generari posse deprehendi, & quidem ita, ut perpetuo non tantum similes, vel ejusdem speciei curvæ prodeant [ut fieri solet in evolutione Cycloidis *Tschirnhausiana*] sed prorsus identicæ & positione tantum diversæ, talesque quæ sibi superimpositæ plane congruant. Quorum specialiter adaptavi schema primum, in quo ADHM est exposita Spiralis, hujus naturæ, ut ex umbilico A projecta recta quævis AH curvam secet constanti angulo AHR: BL ejus Evoluta: CI Caustica ex umbilico A: F*a* Cycloidalis Anti-Caustica: EI Peri-Caustica: G*b* Ant-Evoluta; ubi sequentia notare convenit, (l)

a. Omnes

(i) Cum sit ang. GBS = GBR & GBD = GBF, erit SBD = RBF; denque [addito communi RBS] FBS = RBD = recto. Ergo si BS = FG, erit BFGS parallelogr. rectangulum. Abscinditur ergo radius reflexus BS a perpendiculari GS demissa ex medio G radii osculatoris BH. Congressus radiorum fit igitur in S, hoc est, punctum S est in Caustica. Sed BS = FG = FT.

(k) Supra N°. XLII. pag. 442.

(l) Quæ de Spira mirabili Auctor habet noster, demonstrabimus, sed ordine nonnihil inverso.

I. Si a dato puncto A [*Fig.* 4.] ad expositam quamcunque Curvam H*hh* ducti radii AH, A*h*, ita producantur, ut producti AL, A*l* ad radios AH, A*h* datam rationem habuerint, tan-

N.XLIX. tangent productorum extremitates curvam Lll expositæ similem; id est, curva Lll per productorum extremitates designata expositæ est similis.

Propositio Axiomatis loco assumi potest. Manifestum enim est figuras AHh, ALl sola magnitudine differre.

II. Si ad extremitatem H radii cujusvis AH, ipsi adjungatur sub angulo dato AHK recta quæpiam HK ad AH datam rationem habens, tanget rectæ adjunctæ extremitas K curvam Kk expositæ similem.

Quia datus est ang. AHK & data laterum AH, HK ratio, datum est specie triangulum AHK, Datus ideo ang. HAK, & data ratio AH ad AK. Curva Hh quiescente, gyretur curva Kk circa punctum A, & gyrando describat angulum KAH, ut AK cadat super AH, & fit AL, curva Kk perveniente in Ll. Ergo radius AH ad productum AL, id est AK, datam rationem habet. Curva igitur Ll, id est Kk, expositæ Hh est similis, per præced.

Coroll. Si Triang. AHK latera AH, AK habuerit æqualia, curva Kk cum gyratione descripserit ang. KAH congruet cum exposita Hh. Eo igitur in casu, genita expositæ similis est & æqualis.

III. Spirales logarithmicæ similes sunt etiam æquales.

Sint Hh, Ll, Spirales logarithmicæ similes, eodem umbilico A descriptæ. Centro A, radiis AL, Al, describantur circuli LM, lm, Spirali Hh occurrentes in M, m. Quia latera AL, Al lateribus AH, Ah, circa eundem angulum A sunt proportionalia, similia sunt Tr. AHh ALl, atque ideo æquales sunt ang. AHh, ALl. Sed, ex natura Spiralis, æquales sunt ang. AHh, AMm. Igitur ang. ALl, AMm sunt æquales. Sunt etiam latera AL, Al, lateribus AM, Am æqualia. Ergo prorsus æqualia sunt Tr. ALl, AMm, & illud circa punctum A gyrando & angulum LAM describendo cum isto congruet. Pariter congruent All, Amm, & quotcunque volueris Triangula congruent. Congruere igitur possunt curvæ Lll, $HhMm$, quas ideo rite dixeris æquales vel easdem.

Coroll. I. Ergo, in hyp. Prop. II. Si exposita Hh fuerit Spiralis logarithmica, genita Kk est eadem Spiralis.

Coroll. II. Spirales Ll, & Mm inter se constituunt angulum LAM, quem metitur arcus LM centro A descriptus, & inter utramque interjectus. Nam, si Ll circum A gyrando describat angulum LAM, cum HM congruit.

Coroll. III. Is angulus LAM proportionalis est logarithmo rationis AL ad AH, radii ad radium productum. Etenim N°. XLII, Art. I. ostensum est, si sumantur in Spirali logarithmica radii in geometrica progressione, esse angulos quos comprehendunt in arithm. progr. Sunt igitur hi illorum logarithmi. Angulus verbi gr. MAH est logarithmus rationis AM [vel AL] ad AH.

Corroll. IV. Ductis, ut libet, radiis AL, Ah, angulus quem constituunt Spirales Hh, Ll, æqualis est angulo LAh radiorum una cum angulo

ɡulo qui logarithmus eſt rationis eo-um AL : A*b*. Nam ang. LAM, quem conſtituunt ſpirales, æqualis eſt ng. LA*b*, ſimul & ang. *b*AM, qui ogarithmus eſt rationis AM [vel AL] ad A*b*.

Ex his facillime ſequitur Auctois Prop. *α*; eaſdem ſcil. eſſe cum ſpiali expoſita DH, [*Fig.* 1]

1°. *Evolutam* ejus AB. Evolvatur nim Spiralis AB, ſitque BH radius volutæ, ipſi æqualis, ipſamque tanɡens in B, perpendicularis autem n H ad curvam evolutione deſcripam DH. Demonſtratum eſt N°. XLII. Art. I. AH normalem ad raium AB, ex tangente reſcindere artem BH curvæ AB æqualem. Erɡo punctum H reperitur in curva evolutione deſcripta. Quoniam igitur n rectangul. Tr. ABH, datus eſt ng. ABH (ex ſpiralis natura) daum eſt ſpecie Triangulum, & data atio radii AB ad adjunctam BH ſub lato angulo ABH. Ergo curva DH adem cum curva AB [*Cor.* 1. III].

2°. *Antevolutam* G*b*. Quia datum ſt ſpecie Tr. AHB, datus eſt ang. AHB. Datus ideo ang. deinceps AH*b*. Data quoque ratio AH ad HB, vel H*b*, radio AH adjunctam ſub ngulo dato. Ergo G*b* curva eadem um curva DH. [*Cor.* 1. III.]

3°. *Causticam* CI. Per Theor. cuus demonſtrationem vide Nota (*c*), ſt 2HN—HB:HB = HA:HI. Sed ic HN = HB, ideoque 2HN —HB = HB. Quare HA = HI. Præterea datus eſt ang. AHB. Daus igitur BHI, ipſi, ex lege reflecionis, æqualis. Data itaque AHI, umma eorum. Ergo radio AH adjungitur recta HI ipſi æqualis, ſub dato angulo AHI. Curva igitur CI eadem eſt cum curva DH.

4°. *Anticausticam* F*a*. Propter datum ang. AHI, datus eſt ang. deinceps AH*a*, ſub quo adjungitur radio AH recta H*a* ipſi æqualis. Ergo genita F*a* eadem cum expoſita DH.

5°. *Pericausticam* E*i*. Quoniam H*i* = HI = HA, productus A*i* eſt radii AH duplus. Ergo [Prop. I.] curva E*i* curvæ DH ſimilis, & [*Cor.* 1. III.] eadem.

Ex his tam aperte fluunt Prop. *β*. *γ*... *η*, ut iis demonſtrandis immorari neceſſe non ſit. Prop. *θ*. demonſtratio habetur ex Cor. 3. aut 4. III. Hinc enim ſequitur angulum expoſitæ cum . . . . . .

evoluta = ang HAB. rect. + Log. AH:AB
cauſtica - - HAI [AHR] + Log. AH:AI
anticauſtica - HA*a* [AHB] + Log. A*a*:AH
pericauſtica - - - - - - - Log. A*i* : AH
antevoluta - - HA*b* + Log. A*b*: AH.

Hi autem anguli, & hæ rationes, dato angulo quo ſpiralis a radiis ſuis ſecatur, datæ ſunt. Ergo & anguli quem ſpirales inter ſe conſtituunt dati ſunt, ſaltem tranſcendentaliter, hoc eſt, conceſſis logarithmis.

Eſt autem logarithmus rationis æqualitatis nullus. Quare, ubi quædam ex prædictis rationibus fit ratio æqualitatis, tunc, abſque logarithmis, datur angulus cujus menſuram ingreditur logarithmus illius rationis.

Sic, pone AH = AB, id quod fit ang. ABH exiſtente 45 gr. & ang.

N. XLIX. α. Omnes istæ sex Spirales sunt eadem Helix, hoc est, eodem angulo a suis radiis ex umbilico projectis secantur.

β. Omnes post infinitos anfractus in communi umbilico A coeunt.

γ. Nulla alteram alibi tangit secatve.

δ. Si radius incidens & reflexus, HA, HI, producantur ultra H ad usque occursum Peri-Causticæ & Anti-Causticæ in i & a, & jungantur puncta A, a, i & I, erit AaiI Parallelogrammum rectangulum, cujus diagonalis aI tangit Causticam & latus ai Peri-Causticam.

ε. Si per H ducantur HB, HR, parallelæ oppositis Parallelogrammi lateribus, tanget una expositam, evolutam altera.

ζ. Triangula AHa, ABI, sunt similia: AH = HI = Ha = Hi; Caustica ACI = 2 HI. Evoluta AB = HB.

η. Si communi umbilico recta projiciatur secans spirales, harum tangentes omnes per sectionum puncta ductæ erunt parallelæ, & portiones, umbilico ac sectionibus interjectæ, rectæ portionibus conterminis sunt proportionales.

θ. Si super communi umbilico, tanquam centro, describatur quocunque radio circulus secans spirales in punctis B, C, D, E, F, G; erunt spiralium omnium portiones centro & peripheria interjectæ æquales: radiorum vero ex centro ad intersectiones ductorum anguli sunt iidem cum angulis, quos ipsæ spiræ post infinitos circuitus in centro inter se constituunt. Speciatim, si angulus communis radiorum ex umbilico projectorum cum spiralibus

ang. expositæ cum evoluta est æqualis [HAB] recto.

Pone AH = AI; quo casu æquilaterum est Triang. AHI, & HAI seu AHR est 60 gr., & ang. expositæ cum caustica erit quoque 60 gr.

Pone Aa = AH, seu pone Tr. AHa esse æquilaterum, & AHR 30 gr. & erit ang. expositæ cum anticaustica 60 gr.

Nec minus liquet angulum causticæ cum anticaustica = aAI + Log. Aa: AI = recto + Log. AH: AB = angulo causticæ cum exposita.

Pariter ang. evolutæ cum caustica = BAI + Log. AI: AB = aAH + Log. Aa: AH [sunt enim similia Triangula AHa, ABI] = angulo expositæ cum anticaustica.

alibus sit semirectus, Helix Exposita & Evoluta faciunt rectam: N. XLIX
i ille 60 gr. Exposita & Caustica itidem faciunt angulum 60
r. Si ille 30 gr. Exposita & Anti-Caustica faciunt angulum
o gr. In genere vero spectata angulorum relatio est transcen-
entalis. Angulus Evolutæ cum Caustica perpetuo æquatur an-
ulo Expositæ cum Anti-Caustica, sicut & angulus Evolutæ cum
xposita angulo Causticæ cum Anti-Caustica.

i. Præter recensitas autem quinque Spiras infinitis insuper aliis
odis transformari potest exposita Helix, sic ut semper eadem
elix prodeat; ad id enim obtinendum non est necesse, ut HI,
u vel H*i* sint æquales HA, neque etiam ut H*b* æquetur ipsi
B; sed nec opus, ut angulus AHI per HB, aut AH*u* per HR
bisectus &c. Generaliter namque verum est, quod quotiescunque
inque recta ex umbilico in Expositam projectæ AH adjungitur
H alia ad quascunque partes, veluti H*d*, dummodo angulus
terceptus AH*d* semper constans sit, atque AH, H*d*
nstantem rationem servent, adjunctæ extremitas *d* eandem nu-
ero cum Exposita, & circa communem umbilicum constitutam
elicem describet.

Nescio vero, an hujus proprietatis meminisse tanti sit, cum om-
bus omnino curvis æque competere videam, quanquam igno-
m id a quoquam observatum esse. Nimirum si cuique ex-
ositæ curvæ DHM applicetur quodvis Triangulum AH*a*,
udque supra datum punctum A rotari, & simul fluere intelli-
tur ita, ut manente angulo H in peripheria expositæ, latera
nnia crescant decrescant-ve proportionaliter, ipsumque Trian-
lum sibi semper maneat simile, describet angulus *a* curvam
milem & eandem [*specie*] cum exposita, subinde & *numero*,
i AH, A*a* fuerint crura Trianguli Isoscelis. *Numero* easdem
rvas voco [forte rectius quam existimarent Logicorum filii]
æ sibi superimpositæ congruunt. At quod Evolutæ, Causti-
, Anti-Causticæ &c. non perinde quoque eædem specie nume-
ve sunt in quovis curvarum genere, in causa est sola anguli,
em recta AH ad expositam curvam ejusve tangentem facit,
æqualitas, quæ omnia turbat. Hic enim, cum in sola nostra

N. XLIX. Spira constans maneat, videtur quasi natura hoc essentiali caractere illi soli id privilegii vindicare voluisse.

Cum autem ob proprietatem tam singularem tamque admirabilem mire mihi placeat Spira hæc mirabilis, sic ut ejus contemplatione satiari vix queam; cogitavi, illam ad varias res symbolice repræsentandas non inconcinne adhiberi posse. Quoniam enim semper sibi similem & eandem Spiram gignit, utcunque volvatur, evolvatur, radiet; hinc poterit esse vel sobolis parentibus per omnia similis Emblema; *Simillima Filia Matri.* Vel, [si rem æternæ Veritatis Fidei mysteriis accommodare non est prohibitum] ipsius æternæ generationis Filii, qui Patris velut imago, & ab illo ut Lumen a Lumine emanans, eidem ὁμοούσιος existit, qualiscunque adumbratio. Aut, si mavis, quia curva nostra mirabilis in ipsa mutatione semper sibi constantissime manet similis & numero eadem, poterit esse, vel fortitudinis & constantiæ in adversitatibus; vel etiam carnis nostræ post varias alterationes, & tandem ipsam quoque mortem, ejusdem numero resurrecturæ symbolum; adeo quidem, ut si ARCHIMEDEM imitandi hodienum consuetudo obtineret, libenter Spiram hanc tumulo meo juberem incidi cum Epigraphe: *Eadem numero mutata resurget.*

N. L

N°. 49.

Fig. 2.

Fig. 4.

N°. L.

ADDITIO
AD SCHEDAM
DE
LINEIS CYCLOIDALIBUS &c.
Proximo Maii Actorum horum mense exhibitam.

Vixdum submiseram Editoribus *Actorum*, nuperam speculationem de Cycloidalibus cæterisque curvis, cum postridie a *Fratre* Parisiis litteras acciperem, in quibus nonnulla egregia huc spectantia communicavit; significans, quod præter causticam *Tschirnhausianam*, aliam repererit, quæ quoque sit Cyclois; quod deprehenderit Cycloidem vulgarem *Hugenianam* sui ipsius, ut Evolutam, sic Causticam existere; & quod observaverit eandem proprietatem Spirali logarithmicæ [quod partem constituit inventi Curvæ mirabilis] communem esse: quæ omnia non sine stupore perlegere potui; cum considerarem, neutri de alterius speculationibus has curvas concernentibus quicquam constitisse. Ansam vero dederunt ista materiam hanc jam sepositam denuo reassumendi, ac observandi sequentia: 1°. Quod omnes Cycloides ex circuli super circulo revolutione per punctum in ejus peripheria acceptum genitæ, evolutione sui similes, seu easdem specie, Cycloidas describunt. 2°. Quod Caustica vulgaris Cycloidis ex radiis axi parallelis est alia Cyclois vulgaris, cujus *Act. Erud. Lips. 1692. Jun. p. 291.*

No. L. basis prioris est dimidia. 3°. Quod Caustica circuli ex puncto in ejus peripheria sumpto, Cyclois est genita ex revolutione circuli super aequali circulo, & quod sui quoque evolutione seipsam describit. 4°. Quod Caustica hujus Causticae, sive Cycloidis, & ipsa Cyclois est, sed *Tschirnhausiana*, & cujus circulus genitor radii est subdupli ejus super quo revolvitur. Quae omnia, ut Lectoribus isthaec examinaturis laboris compendium faciam, breviter hic demonstrata sisto.

LEMMA.

Si circulus dcl [*Fig.* 1.] super convexa aut cava peripheria alterius cujusvis circuli bdg rotetur, & in prioris peripheria acceptum punctum c sit punctum lineans alicujus Cycloidis & m punctum respondens in evoluta ejus, adeoque recta ducta cm Cycloidi perpendicularis, & propterea transitura per contactum circulorum d. Dico, fore cd ad dm, ut al ad ad, aggregatum puta, vel differentia radii expositi & diametri genitoris circuli ad radium expositi.

DEMONSTR. (*) Sit df particula infinite parva peripheriae bdg,

(*) Demonstrationem, quae subobscura visa est, nonnihil immutatam exhibemus. Dum circulus genitor dcl [Tab. XVIII. b. Nr. L.] transit in feh, percurritque particulam df circuli expositi $bdfg$, describat punctum lineans c particulam ce Cycloidis bce. Et quia cd, ef ad curvam normales concurrunt in m, spectari potest ce, tanquam arcus circuli centro m descripti. Eodem centro, radio mf, describatur arcus fi; & centro f, radio $fn = de$ arcus no. Quoniam $me = mc$, & $mf = mi$, est $ef = ci$, & co [$= ef - fo = ef - fn = ef - dc = ct - do$] $= di$. Praeterea, ex natura & generatione Cycloidis, arc. bd = arc. fn, & arc. $bdf = fn$, ideoque $df = ne$. Igitur triangula rectangula dfi, ena, cum habeant aequalia latera df, ne, & di, eo, aequalia sunt, consequenter $fi = no$. Jam vero notum est angulos, quos arcus aequales metiuntur, esse in radiorum ratione reciproca. Ergo, cum aequales sint fi, no, erit ang. fmi : ang. $nfe = ef : fm$. Sed $nfe = \frac{1}{2} nke$, & fmi [in Cycl. exteriore] $= mia - mfa = daf + mda - mfa = daf + cdl$ [nfh] $- efh = daf + nfe =$ daf

dg, quam tangunt rectæ *do* in *d*, & *ft* in *f*, sumptæque intelligantur *ch*, *hi*, sigillatim æquales ipsi *df*, *ip* vero quarta proportionalis ad *ad*, *dl* & *df*; ducantur *hf*, *if*, *pf*, secantes rectam *cq* parallelam ipsi *ft* in *n*, *o*, *q*; ut & *ir*, *pr* diameter: quo facto angul. $pfs = hfs\ [cds] + ifh \pm pfi = cld + ifh \pm pfi = cld + dlf \pm pfi = clf \pm pfi = clf \pm pri =$ [ob *ad* : *dl* vel *pr* $= df : pi$] $clf \pm daf = clf \pm tfs$: hinc $pft = pfs \mp tfs = clf =$ [postquam continuata rotatione circulus circulum tetigerit in *f*] angulo tangentis *ft* & secantis *cf*: quare cum *cf* cadet super *pf*, eoque situ Cycloidi perpendicularis erit, ac productam alteram perpendicularem productam *ad* secabit in puncto evolutæ *m*: unde porro sic arguere licet, $ad : al\ [ad \pm dl] = ad \cdot df : ad \times df \pm dl \times df = df : df \pm (dl \times df : ad) = ch : hi \pm ip\ [hp] =$ [ob arcum *cp* habendum pro recta, & rectas *cn*, *pq*, pro parallelis] $cn : nq = df : nq =$ [ob similia Triangula *dmf*, *nfq*] $dm : nf\ [cd]$. Q. E. D. No. L.

COROLLARIA. I. Si *ad* sit radius infinite magni, hoc est, *dg* linea recta, erit $cd = dm$.

II. Si circulus genitor sit infinite magnus, hoc est, *cdr* linea recta, fiet $dm = 0$, ipsaque Cyclois coincidet cum illa quæ ex evolutione circuli expositi describitur.

III. Si circulus expositus sit infinite parvus, hoc est, punctum, degenerabit Cyclois in circulum.

IV. Si $ad = dl$, erit $cd = 2dm$.

V. Si $2ad = dl$, erit $cd = 3dm$.

VI. Si $ad = dl$, & circulus rotetur super peripheria concava,

$f + \frac{1}{2} nke$. At *fmi* [in Cycl. interiore] $= mfa - mua = mfa - la - daf = mfa - nfa - daf =$ ergo [*nfe*] $- daf = \frac{1}{2} nke - daf$. Ergo $ef : fm\ [= fmi : nfe] = \frac{1}{2} nke \cdot daf : \frac{1}{2} nke = nke \pm 2daf : nke$. Atqui propter æquales arcus *ne*, *df*, qui metiuntur angulos *nke*, *daf*, sunt hi anguli reciproce ut radii *nk*, *da*. Igitur $ef : fm\ [= nke \pm 2dfe : nke] = ad \pm 2nk\ [ab$ vel $al] : ad$. Q. E. D.

No. L. cava, erit *dm* infinite magna, adeoque punctum lineans *c* loco Cycloidis rectam, videlicet, diametrum circuli expositi describet.

Patet ergo, quo pacto linea recta & circulus pro speciebus quoque Cycloidum haberi possunt.

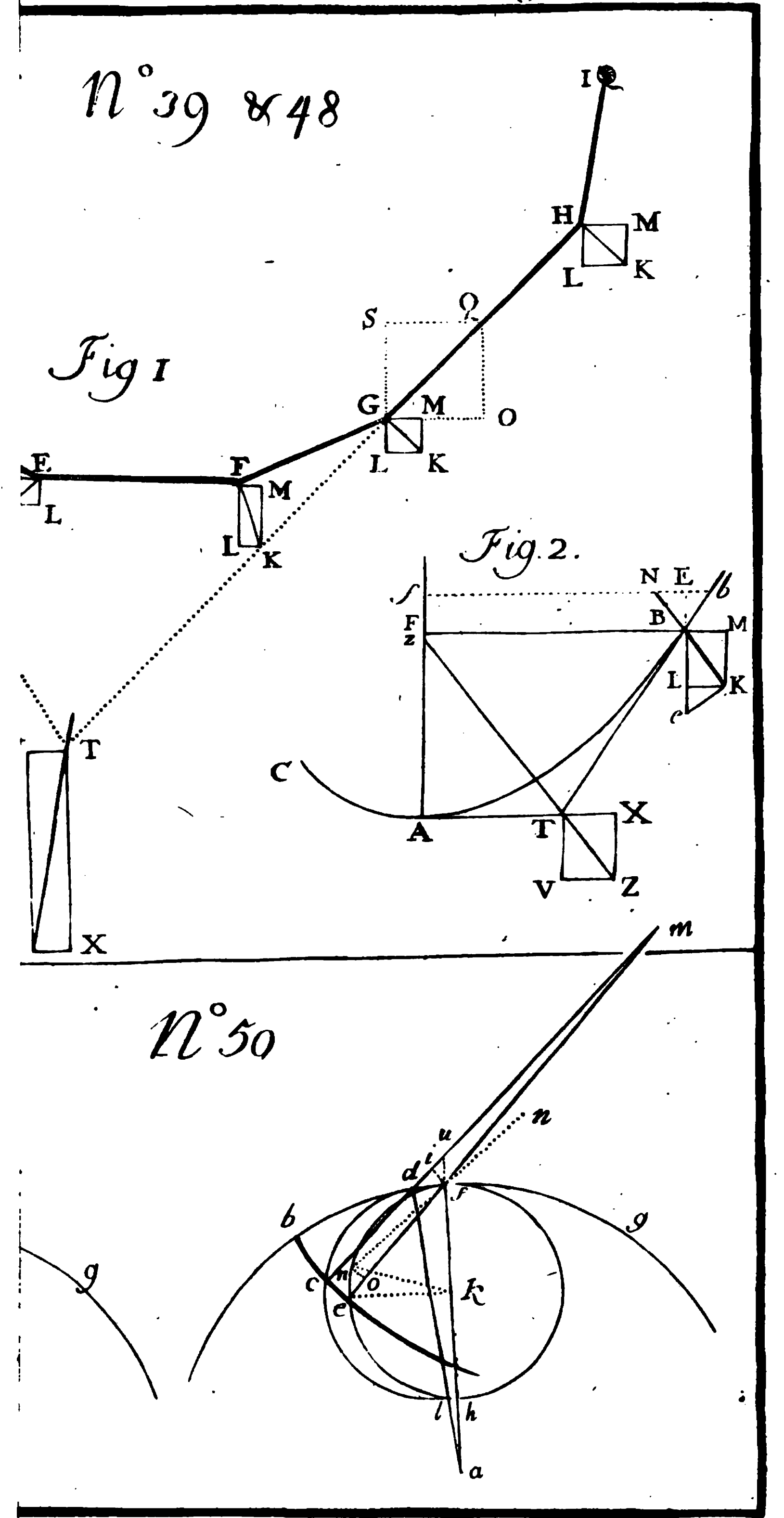
PROPOSITIO I.

Sit BEF [*Figura* 2.] Cyclois genita ex revolutione circuli CDL super convexa, ut in superiore, aut super concava peripheria circuli BKF, ut in inferiore figuræ parte: & sumantur AH tertia proportionalis ad AL & AD, cæteraque fiant, ut figura monstrat; quo pacto AL: AD = AD : AH = ± AL ∓ AD : ± AD ∓ AH = LD : DH = CD : DM: quare punctum M est in evoluta Cycloidis BEF per *Lemma* præcedens. Item, quia DK : HG = AD : AH = LD : DH = CL [DK] : HM, erit HG = HM; & propterea etiam punctum M in Cycloide a circulo MDH super GH revoluto descripta. Cyclois vero hæc *eadem specie* seu similis alteri BEF, quia diameter genitoris circuli ad radium expositi utrobique eandem habet rationem, ut ostensum. Ergo Cycloides omnes, evolutione sui, *easdem specie* Cycloidas describunt. Q. E. D.

COROLL. Si BKF sit circulus infinite magnus, sive linea recta, Evoluta Cycloidis erit *eadem numero* cyclois; ratione AL ad AD, seu LD ad DH, in rationem æqualis abeunte.

PROPOSITIO II.

Sit vulgaris Cyclois ACK [*Figura* 3.] & similis alia ALH, cujus basis AH prioris AK sit dimidia; estoque BF majori Cycloidi perpendicularis, BG radius illi incidens parallelus axi HC, BE radius reflexus, qui sumatur æquali incidenti BG, cæteraque fiant, ut figura docet: quo facto, ang. BFD = FBG = FBD, proinde BD = DF & D centrum genitoris circuli FBI: & quoniam Triang. BFG, BFE, per hypothesin & constructionem habe[...]



N° 39 & 48
Fig 1
I
H
M
L
K
S
Q
G
M
O
L
K
E
F
M
L
L
K
T
X
Fig. 2.
f
N E
b
F
z
B
M
L
K
e
C
A
T
X
V
Z
m
N° 50
u
n
d
i
f
b
g
g
c
n
o
k
e
l
h
a

abent juxta 4. I. EUCL. erit angulus BEF = BGF recto, & No. L.
onsequenter jacebit in peripheria circuli diametro DF descripti; umque angulus FDE = DBF + DFB = 2DFB, & contra dianeter DF diametri FI subdupla, erunt arcus subtensi angulis æquales, nempe arcus FE = arcui BI = rectæ FH: unde punctum E est in Cycloide descripta a genitore circulo FED, cujus liameter DF alterius FI est dimidia, hoc est, in Cycloide ALH. temque quia BF est semiradius circuli Cycloidem ACK in B osulantis, per *Corollarium* 1. *Lemmatis præcedentis*, atque recta FE adio reflexo perpendicularis; idem quoque punctum E est in Caustica Cycloidis ABC ex radiis axi HC parallelis, per nuperum neum *Theorema* (b), quod relationem inter Causticas & Evoluas exhibet. Caustica ergo Cycloidis hujus, similis & eadem pecie Cyclois est. Q. E. D.

PROPOSITIO III.

Anti-Caustica curvæ cujusvis eadem est cum ejus Cycloidali, quoties punctum radians respectu expositæ, & punctum lineans respectu genitricis curvæ similiter posita sunt, ut nuper innui (c). Ergo & Anti-Caustica circuli ex puncto in ejus peripheria sumpto coincidit cum Cycloide, quam describit punctum similiter umptum in peripheria circuli super eodem circulo rotantis. Sed jusmodi curva, qua est Cyclois, per *Prop.* 1. ex evolutione similis Cycloidis; & per ea quæ nuper, qua est Anti-Caustica, x Causticæ evolutione describitur. Quare & Caustica ex puncto n peripheria circuli accepto Cyclois est ex circuli super æquali irculo revolutione genita. Q. E. D.

Patet hinc, *Fraternum* hoc inventum Theorematum istorum generalium duntaxat consectarium esse. Constat etiam, quod *Frater* nobservatum præteriit, Causticam hanc non secus ac *Tschirnhausianam*, ex sui evolutione seipsam describere.

(b) N°. præced. pag. 493. sub inem. Vide etiam Notam (b).

(c) *Ibid.* pag. 492 sub finem & pag. 493. Vide Notam (a).

No. L.

PROPOSITIO IV.

Sit BGC [*Figura* 4.] Caustica semicirculi DEC ex puncto C, eademque Cyclois genita ex revolutione GEFH super æquali ipsique DEC concentrico circulo BHR. Esto autem H circulorum contactus, G punctum lineans Cycloidem, Q centrum generatoris, & ducantur rectæ AHQ, BG, QG, BH, GH, perpendicularis futura Cycloidi, quæ producatur in N, junctaque BN & demissa in BG perpendiculari HO, diametro HQ describatur circulus HPQ secans rectam QG in P, &c. Quo pacto QG = QH = AH = AB, ut & arcus & subtensa HG = arcui & subtensæ HB, per defin. Cycloidis; unde Triang. Isoscelia ABH, QGH, similia & æqualia, & tum anguli HGB = HBG, tum QHG = AHB; cumque ambo illi sint æquales his ambobus [quandoquidem additus utrisque communis BHG duos rectos complet] erit unus HGB = uni QHG = QGH; ideoque GQ reflexus radii incidentis BG. Deinde quoniam GPH = QPH = recto [utpote in semicirculo] = GOH, erunt quoque Triangula GPH & GOH similia & æqualia, & GP = GO = ½ GB: Præterea etiam HB = HG = [ob æqualitatem circulorum GHF, BHN] ipsi HN; quare circulus centro H radio HG descriptus, per B & N transibit, angulumque GBN rectum ostendet. Denique, si supponatur punctum I in evoluta Cycloidis BGC, erit HI tertia pars ipsius HG vel HN, per 5. *Coroll. Lemm.* Quibus præmissis, ex nupero Theoremate evincitur, punctum P in hujus Cycloidis Caustica ex puncto B versari: Nam juxta Theorema (*) debebit esse $GP = GB \times GI : (2GN - GI) = 4GB : (12 - 4) = \frac{4}{8} GB = \frac{1}{2} GB$; ut repertum est. At idem punctum P versatur quoque in Cycloide *Tschirnhausiana* BKR, ea scilicet quæ gignitur ex revolutione circuli radii subdupli HPQ super circulo dupli radii BHR. Cum enim idem angulus PQH, vel GQH, existat tum in peripheria circuli HPQ, tum in centro circuli duplæ diametri

(*) N°. præced. pag. 493.

N°. 50.

Fig. 1.

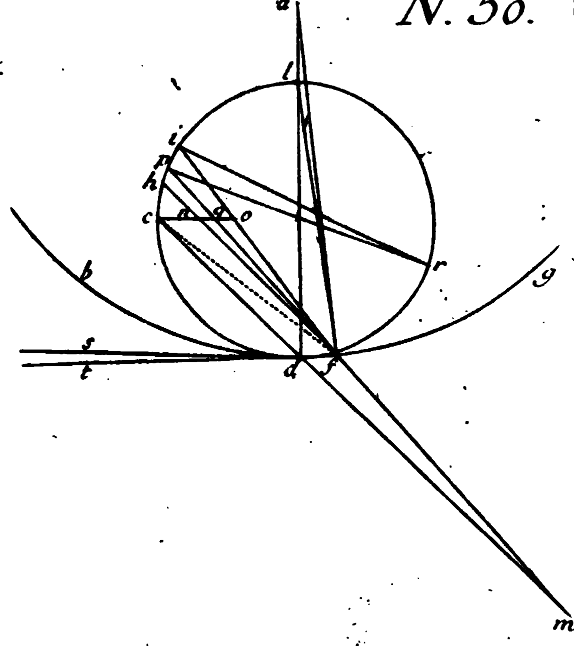


Fig. 4.

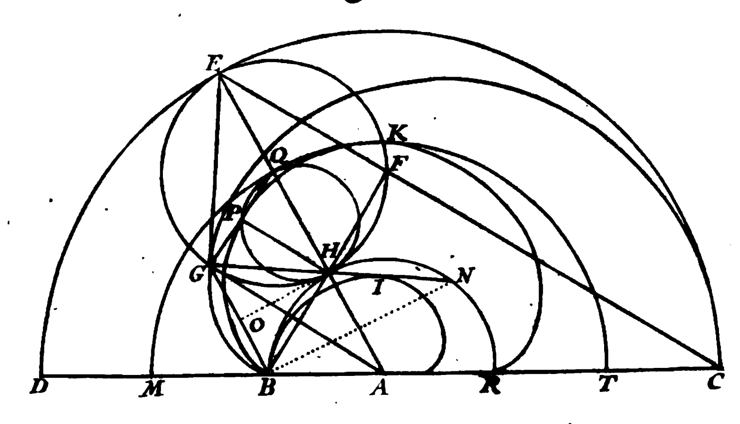
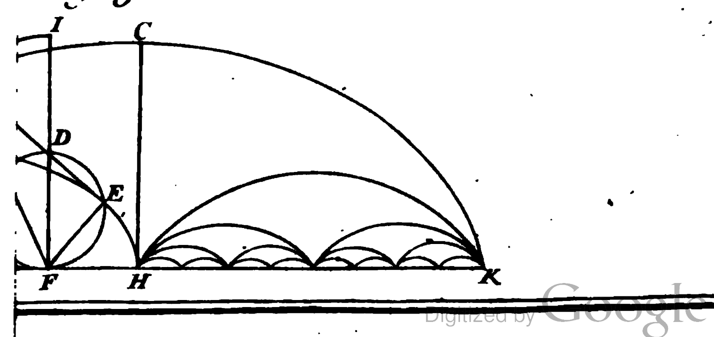


Fig. 3.



netri HGE, erit arcus subtensus HP = arcui HG = arcui HB; unde constat &c.

Nota, ABGQ est Trapezium regulare, in quo BG parallela AQ, AB = GQ, & ABG = BGQ.

Coroll. Hinc casu in solutionem incidimus Problematis, quod alias satis perplexum videri posset ei, qui illud de industria vellet aggredi: Nempe Punctum ex infinita & aliud ex finita distantia radiare debent in diversas curvas expositas, sic ut reflexi utrobique radii suis intersectionibus eandem numero & positione Causticam forment. Quæruntur Expositæ, cum communi Caustica? Resp. Quæsito satisfaciunt expositæ Cyclois BGC, & radio AQ descriptus MKT circulus; in illa enim si radiet punctum B, in hunc punctum infinite distans per radios rectæ BT parallelos, radii reflexi utrobique eandem causticam *Tschirnhausianam* BPKR formabunt. (*)

Tres ergo Curvas deteximus, *Spiralem Logarithmicam*, *Cycloidem vulgarem*, & *Cycloidem nostram* ex circuli super æquali circulo revolutione ortam, quæ eximia inter se affinitate gaudent, easque proprietates notabiles communes habent: una est quod singularum evolutione eædem curvæ describantur, [qua quidem etiam reliquæ Cycloides conspicuæ sunt;] altera, quod singularum Causticæ quoque eædem curvæ sint: quanquam & hic non leve discrimen animadvertimus, quod facit, ut ea, quæ communia habent, singularitati *Spiræ mirabilis* nihil derogent. Nam primo non tantum Evoluta & Caustica Spiræ mirabilis, sed & Ant-Evoluta, Anti-Caustica, Peri-Caustica, &c. eadem curva sunt, quæ in cæteris fere diversæ existunt. Deinde, in evolutione Spiræ mirabilis, partes curvæ eodem ordine describuntur, quo evolvuntur, in evolutione Cycloidum omnium inverso. Tertio, Spira mirabilis eandem *numero* & Evolutam habet & Causticam; Cyclois vulgaris eandem quidem *numero* Evolutam, sed Causticam similem tantum, seu *specie* eandem: nostra vero Cyclois similem,

(*) N°. præc. pag. 495. Art. 4. Vide etiam Notam (*f*)

No. L. milem, seu eandem *specie* Evolutam; at dissimilem ac *genere* duntaxat eandem Causticam. Colligitur hinc, si vulgaris Cycloidis Causticæ, simul ac nascuntur, speculi consistentiam acquirere possent, ad excipiendum ac reflectendum eos ipsos radios ex infinita distantia profectos, e quibus enatæ fuerant; fore ut aliæ novæ orirentur Cycloides prioribus continuo minores minoresque, eo modo quem *Figura* 3, parte dextra refert: cum contra Spiræ mirabilis Caustica, in speculum mutata, & radios ex communi umbilico emanantes repercutiens, aliam, non minorem, sed identicam prorsus Spiram producat. Quemadmodum itaque per productionem Spiræ mirabilis communicationem essentiæ divinæ *ad intra*, [ut in scholis loqui amant,] qua Deus Filius Patre non minor, sed æqualis, ex intima Patris essentia, & Deitatis quasi umbilico nascitur, & ab utroque exit Spiritus Sanctus utrique par, non inconcinne adumbrari nuper partim diximus: ita nunc continuata analogia communicationem imaginis divinæ *ad extra*, qua Creator ex infinito quasi intervallo, [quo a Creaturis suis distat] ipsis radios Divinitatis impertit; eo vero imperfectiores, minoresque, quo minus immediate ad nos emanarint, per Cycloidis productionem non minus apte repræsentari posse arbitramur.



N°. LI.

N°. LI.

ÆNIGMA GEOMETRICUM DE MIRO OPIFICIO TESTUDINIS QUADRABILIS HEMISPHÆRICÆ:

A D. PIO LISCI POSILLO Geometra

Propositum die 4. April. A. 1692.

Cujus divinatio a secretis artibus illustrium Analystarum vigentis ævi expectatur, quod in Geometriæ pura Historia tantummodo versatus ad tam recondita videatur invalidus.

INter venerabilia eruditæ olim Græciæ monumenta extat adhuc, perpetuo equidem duraturum, Templum augustissimum ichnographia circulari, ALMÆ GEOMETRIÆ dicatum; quod Testudine intus perfecte hemisphærica, operitur: Sed in hac fenestrarum quatuor æquales areæ [circum ac supra basim hemisphæræ ipsius dispositarum] tali configuratione, amplitudine, tantaque industria, ac ingenii acumine sunt extructæ, ut his detractis superstes curva Testudinis superficies, pretioso opere musivo ornata, tetragonismi vere geometrici sit capax. Quæritur modo, quæ sit; qua methodo, quave arte pars ista hemisphæricæ superficiei curvæ quadrabilis, tensæ ad instar carbasi, vel turgidi veli nautici, ab Architecto illo Geometra fuerit obtenta? & cuidemum plano geometrice quadrabili sit æqualis? Vid. *Acta Erud.* 1692. Jun. p. 274.



No. LI. Præsentis Ænigmatis enodatio [quod spectat ad hujus admirabilis Fornicis tum constructionem expeditissimam, tum quadraturam] *Serenissimo* FERDINANDO *Magno Principi Etruriæ* scientiarum & nobilium artium Cultori ac Patrono Generosissimo, ab eodem Ænigmatista oblata jam est; qui quidem simul non dubitat, quin hoc ipsum Ænigma a singulis litterario in Orbe degentibus hodie præclarissimis Analystis sit statim divinandum, proprias quadrationes impertiendo singularis Testudinis hujus tetragonismicæ ab hemisphæra dissectæ, & ipsorum peracutas indagines, multiplicesque industrias ad hoc unum idemque geometricum collimantes impatienter expectat, ut hinc, qui temere contumelias in Geometriam jacere audent, silere discant, vel potius maxima cum voce exclament, *Oh unica verorum scitabilium scientia a Divina in hominum mentes infusa*; ut hæc imperviis, mutabilibus, fallacibusque contemptis, æterna ista, quæ semper & unicuique sunt eadem, tantum appetat, nilque aliud unquam magis innocuum scire perquirat.



N°. LII.

ÆNIGMATIS FLORENTINI SOLUTIONES VARIE INFINITÆ.

Per JAC. BERNOULLI.

Act. Erud. Lips. 1692. Aug. p. 370.

ESto [*Figura* I.] ABC quarta pars superficiei hemisphæricæ, terminata quadrantibus verticalibus AB, AC, & horizontali BC; quo posito,

Primo, sumatur ubivis in quadrante punctum F, per quod transeat circulus major FC, e quo abscindatur arcus FE = arcui BF; eritque punctum E in quæsito margine fenestræ BEC: hoc est, si concipiatur Testudo ad instar superficiei Globi Terrestris,

:ftris, in qua C Polus, BA Æquator, BC primus Meridianus, No. LII.
: jungantur omnia loca, quorum eadem longitudo eſt & latitudo, ırva BEC; præſentabit hæc curva feneſtræ deſideratæ margi-:m: quippe Teſtudinis ſuperficies ABECA, quæ relinquitur de-acta feneſtræ area BECDB, æqualis quadrato radii, ac proin-: tota Teſtudo quadrato diametri ſphæræ. (a)

Secundo: Etiamſi arcus FH abſcindatur minor arcu BF, dum-ıodo ſinus horum arcuum proportionales ſint, naſcetur ſemper ıperficies ABHIA quadrabilis, ut pote eandem rationem obti-ens ad quadratum radii ſphæræ, quam ſinus arcus FH habet ad num BF (b).

Tertio: Quin etiam, ſi ipſi arcus FH, FB, proportionales fue-int, evadet ſuperficies ABHIA quadrabilis, quippe quæ ad rec-ıngulum ſub radio ſphæræ & ſinu verſo illius arcus, qui ad uadrantem eſt, ut arcus FH ad FB, viciſſim eam rationem ha-et, quam FB ad FH. (c)

Quarto:

(a) Sit K [*Fig.* 3] centrum ſphæ-æ, cujus ſuperficiei octavam partem xhibeat ABC, literis idem in Fig. . ac in 1a. denotantibus. Sitque ef circulus circulo CEF infinite vi-inus, & per hujuſmodi circulos divi-latur ſuperficies ABECA, in innume-as areolas quales FfeE. Hæc æqualis ſt [Vid. Not. (*d*) N°. XLII pag. 447] ectangulo ſub Ff, & ſub ſinu arcus E, vel arcus æqualis FB, qui ſinus ſt FG. Verum Triang. ſimilia GK, FfL, dant FK ad FG ut f ad fL aut Gg. Igitur rectang. ub Ff & FG, hoc eſt areola FfeE equatur rectang. ſub FK radio & ub Gg elemento ſinus verſi BG rcus BF. Eſt igitur Tr. BFE æ-uale rectang. ſub radio & ſub ſinu erſo arcus BF, atque ideo, cum ar-ius BF deſinit in quadrantem BA, eſt tota ſuperf. BFACEB æqualis rect. ſub utroque radio FK & BK, hoc eſt, quadrato radii.

(b) Si arcus FH ſinus ſit ſinui arcus BF proportionalis; quoniam eſt ſemper FfhH [elementum Tr. BFH] ad FfeE [elem. Tr. BFE] ut rect. ſub Ff & ſinu arcus FH ad rect. ſub Ff & ſinu arcus FE, vel ut ſinus arcus FH ad ſinum arcus FE, hoc eſt, in data ratione, erit quoque Tr. BFH ad Tr. BFE, & tota ſu-perf. BFAIHB ad totam ſuperf. BFACEB, in eadem data ratione ſinus FH ad ſinum FE vel BF.

(c) Quod ſi ratio arcus BF ad arcum FH data fuerit, & æqualis ra-tioni quadrantis BA ad arcum AI, in quem deſinit arcus FH, quando BF deſinit in quadrantem BA, ſu-mantur AM, Am, æquales ipſis FH, fh,

No. LII. *Quarto:* Sit punctum D, sumptum ubivis in quadrante horizontali BC, per quod transeat quadrans verticalis AD, ac intelligatur diametro basis hemisphærii BCM seorsim positæ [*Figura* 2.] insistere figura quævis rectilinea, aut curvilinea, quadrabilis BQM; tum sumatur arcus BP duplus arcus BD, inque centrum N agatur recta PN, secans perimetrum insistentis figuræ in Q. Dico, si facta CS tertia proportionali ad PN, & QN; ductaque SR parallela ipsi BM, abscindatur, [*Figura* 4.] arcus AL = arcui intercepto CR, fore punctum L in curva quadam BLC, quæ terminet superficiem ABLCA æqualem figuræ quadrabili BQM. (d)

Quinto:

fh, & quia est BA ad AI ut BF ad FH vel AM, & ut Bf ad fh vel Am, erit quoque BA ad AI ut Ff ad Mm, aut ut rect. sub Ff & MN, ad rect. sub Mm & MN, quod æquale est rect. sub AK radio & Nn. Nam, ob similia Triang. MKN & Mm O, est MK vel AK ad MN ut Mm ad mO vel Nn, & ideo rectang. sub extremis æquale rectangulo sub mediis. Igitur BA ad AI ut rect. sub Ff & MN, ad rect. sub radio & Nn. Sed rect. sub Ff & MN sinu arcus AM, æquale est rect. sub Ff & sinu arcus FH, cui æqualis AM, hoc est æquale areolæ FfhH, elemento Triang. BFH. Pariter rect. sub radio & Nn, est elementum rectang. sub radio & AN sinu verso arcus AM vel FH. Igitur BA ad AI, ut elem. Triang. BFH, ad elem. rectang. sub radio & sinu verso arcus FH; & ideo BA ad AI ut ipsum Tr. BFH ad rect. sub radio & sinu verso arcus FH; consequenter BA ad AI, vel BF ad FH, ut superf. BFAIHB ad rectang. sub radio & sinu verso arcus AI.

(d) Sit [*Fig.* 4] ABM sphæræ quadrans, cujus basis semicirculus BCM, centro N descriptus, & iis omnia juxta constr. Auctoris fiant, dico Triang. ABL æquale esse Tr. BNQ. Nam fit Ad quam proxime ipsi AD, & Bp duplus Bd, ut et BP duplus BD, ideoque Pp duplus ipsius Dd. Trianguli ABL elem. est ALl, cujus area [Not. (d) N. XLII.] æqualis est rect. sub Dd & AT, sinu verso arcus AL, vel rect. sub Dd & CS, sinu verso arcus CR [Sunt enim arcuum æqualium AL, CR, sinus versi AT, CS æquales.] Igitur, ob Pp duplum ipsius Dd, est ALl semissis rectang. sub Pp & CS. Centro N radio NQ describatur arcus Qt, & erit Pp ad Qt ut PN ad QN, id est per constr. ut QN ad CS. Ergo rect. sub Pp & CS, quod duplum est Tr. ALl, æquatur rect. sub Qt & QN, quod pariter duplum est Tr. QNq. Æquales sunt igitur Triang. ALl, & QNq, & conseq. Triang. ABL, NBQ, quo-

Quinto: Cæteris positis, ut prius; si BCMQB, fingatur lunula Hippocratis, non superficies quidem ABLCA, sed ipsa fenestræ area BLCDB tetragonismi capax erit, ut pote æqualis dictæ lunulæ. (e)

um illa sunt elementa, æqualia sunt, tque ubi BD in BC, & BQ in BQM desinit, æquales sunt superf. ABLCA, BQMB.

(e) Est enim, per Theor. Archimedeum, [No. XLII. pag. 447.] quadrans ABC hemisphærii æqualis semicirculo BCMB. Sed, per const. ABLC superf. æqualis est superf. BQM. Ergo fenestra BLC æqualis lunulæ BCMQB.

Videatur Num. LXXIII.

No. LIII.

SOLUTIO PROBLEMATIS DE MINIMO CREPUSCULO,

Per JAC. BERNOULLIUM.

Communicata in litteris, Basileæ, die 20. Julii, 1692, *datis.*

NOtum, Crepuscula maxime diuturna quidem in solstitio æstivo contingere; brevissima vero, non in hyberno, sed medio quodam inter hoc solstitium & æquinoctium tempore, de quo definiendo nunc agitur. Problema autem ex eorum numero

No. LIII. est, in quibus utilitas cum inveniendi difficultate conjungitur; unde multis magni nominis Geometris subinde quidem, at frustra, * tentatum fuit: nec mirum; obstat enim insuperabilis calculi molestia, devoranda iis qui illud communi more aggrediuntur: sed nec etiam per methodum indivisibilium, promiscue & sine delectu adhibitam, quæsitum facile quis consequetur: peculiaris via est, qua dextre & commode solvatur, quam si quis init, totam difficultatem in unica & simplici proportione trigonometrica terminari comperiet, quæ talis: *Ut Sinus totus ad Tangent. 9 grad. Sic Sinus Elevationis Poli ad Sinum quæsitæ Declinationis Australis, quam Sol tempore minimi Crepusculi obtinet.*

Eo itaque Problema impeditissimum redactum videmus, ut posthac in vulgaria systemata Astronomica referri, & simplicissimis quibusque Problematibus connumerari valeat. Vid. N. CII. 17.

* Imo, nisi fallor, jam anno 1542 id Problema fuit a P. NONNIO legitime solutum, in Tractatu de *Crepusculis*. Librum quidem reperire non potui; Sed exstat ad calcem *Commentarii in Sphæram J.* DE SACROBOSCO per *Chr.* CLAVIUM [utor Edit. Ai. 1608] Digressio de *Crepusculis*, cujus Auctor in Procemio profitetur, se NONNII librum in compendium duntaxat redegisse. Hujus autem Digressionis Prop. XXII. docet reperire Punctum Eclipticæ in quo Sol brevissimum efficit Crepusculum, ejusque Crepusculi magnitudinem definire. Etsi vero non incidit in Analogiam tam simplicem, quam ea est quæ hic proponitur, legitimam tamen solutionem esse negari nequit, quæque facile ad istam reducitur.

Nº. LIV.

POSITIONUM ARITHMETICARUM DE SERIEBUS INFINITIS, Earumque SUMMA FINITA:

Quas,

Præside

JACOBO BERNOULLI,

Math. P. P. & Facult. Art. p. t. Dec.

defendit

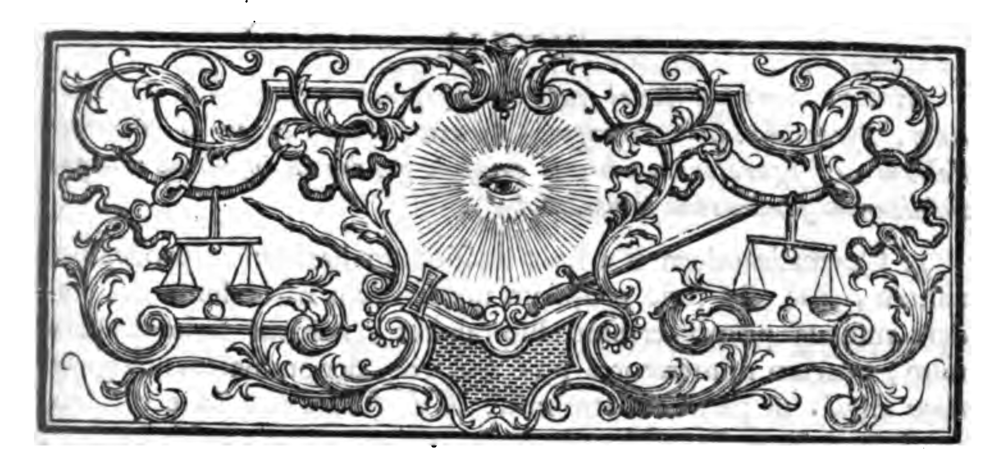
HIERONYMUS BECKIUS, Basil.

Ad diem 18. *Novemb. M. DC. XCII.*

Editæ primum

BASILEÆ,

1692.



POSITIONUM DE SERIEBUS INFINITIS Pars altera.



UM ea, quæ de Seriebus infinitis, *ante hoc triennium & quod excurrit, speculati fuimus, uni etiamnum alterive paginæ commaculandæ sufficerent; placuit* Primæ *de illis* Disputationi * Secundam *hanc attexere, quam ex abrupto ordior, continuatis Propositionum numeris, ut eo commodius earum citatio peragatur.* No. LIV.

* N°. XXXV.

No. LIV.

XVIII.

Invenire summam seriei infinitæ reciprocæ numerorum Trigonalium, Pyramidalium, Trianguli-Pyramidalium, Pyramidi-Pyramidalium, & figuratorum altioris cujusvis gradus in infinitum: atque infinitarum summarum summam (a).

1. Quemadmodum si a serie fractionum harmonice progressionalium, hoc est, serie reciproca numerorum naturalium A, eadem multata primo termino subtrahatur, nascitur series fractionum, quarum numeratores sunt *unitates*, denominatores *Trigonalium dupli*; ut patet ex demonstr. XV. * Ita si a serie reciproca Trigonalium B, eadem truncata primo termino subducatur, exoritur series fractionum, quarum numeratores progrediuntur juxta numeros naturales 2, 3, 4, 5, &c. sed quæ reducuntur ad fractiones, quarum omnium numeratores sunt *binarii*, denominatores vero *Pyramidalium tripli*; unde ipsa series ad seriem reciprocam Pyramidalium C, ut $\frac{2}{3}$ ad 1. Pariter si a serie hac reciproca Pyramidalium, ipsamet mutilata primo termino subducatur, relinquitur series fractionum, quarum numeratores progrediuntur juxta numeros Trigonales 3, 6, 10, 15, &c. sed quæ reduci possunt ad alias, quarum numeratores omnes sunt *ternarii*, denominatores vero *Trianguli-pyramidalium quadrupli*, unde ipsa series ad seriem reciprocam Trianguli-pyramidalium D, ut $\frac{3}{4}$ ad 1: Et sic deinceps in infinitum. Quocirca cum singulæ hæ per subductionem genitæ series, quarum numeratores sunt unitatum, denominatores figuratorum multipli, per Ax. 3. æquipolleant unitati, ipsæ figuratorum series reciprocæ ordine dabunt summas, ut sequitur:

A. Natur. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ &c. $=\frac{1}{0}=1\frac{1}{0}$, per XVI.

B, Tri-

(a) Vid. Not. (c) Prop. seq. * pag. 388.

No.LIV.

B. Trigon. $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}$ &c. $=\frac{2}{1}=1\frac{1}{1}$, per XV.

C. Pyramid. $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}$ &c. $=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

D. Triang.Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}$ &c. $=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$.

E. Pyr. Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}+\frac{1}{126}+\frac{1}{252}$ &c. $=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$.

2. Summæ hæ a secunda serie B ordine collectæ sunt $1\frac{1}{1}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, &c. unde summa summarum est $1\frac{1}{1}+1\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}+1\frac{1}{4}+$ &c. quæ infinita est: quin & demtis singularum serierum primis terminis seu unitatibus, summa fit $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ &c. quæ itidem infinita existit, per XVI: at demtis insuper secundis terminis $+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+$ &c. summa evadit finita & æqualis $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, per Axiom. 3.

XIX.

Invenire summam seriei finitæ reciprocæ Trigonalium, Pyramidalium, Trianguli-Pyramidalium, Pyram. Pyramidalium, & figuratorum altioris cujusvis gradus in infinitum.

Posito in qualibet serie numero terminorum x, postremi termini in seriebus directis numerorum Naturalium, Trigonalium, Pyramidalium, &c. per ea quæ demonstrabuntur alibi ([b]), sunt ordine

([b]) Seriei Naturalium differentia prima est 1, reliquæ evanescunt. Ergo, per ea quæ demonstrata sunt N°. XXXV. Not. (*b*). pag. 389. Terminus generalis Seriei Naturalium ab unitate incipientis est $1+(x-1).1 = x$.

Seriei Trigonalium terminus primus sit $=1$, prima different. primarum erit 2, prima tertiarum $=1$, reliquæ nullæ sunt. Ergo terminus generalis $1+(x-1).2+(x-1).(x-2):2=(xx+x):2=x.(x+1):2$

Seriei Pyramidalium terminus primus $=1$, prima dist. primarum $=3$, prima secundarum $=3$, prima tertiarum $=1$, ulteriores nullescunt. Ergo Terminus generalis est $1+(x-1).3+\frac{x-1.x-2}{1.\ 2}.3+\frac{x-1.x-2.x-3}{1.\ 2.\ 3}.1=\frac{x.x+1.x+2}{1.\ 2.\ 3}$.

Eodem modo Seriei Trigono-Pyrami-

No. LIV. ordine hi, qui sequuntur: (denotantibus hîc & ubique punctulis continuam multiplicationem quantitatum, quibus interseruntur.)

$$n,\ \frac{n.n+1}{1.\ 2},\ \frac{n.n+1.n+2}{1.\ 2.\ 3},\ \frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.\ 2.\ 3.\ 4},\ \&c.$$

& qui hos immediate excipiunt, sunt isti:

$$n+1,\ \frac{n+1.n+2}{1.\ 2},\ \frac{n+1.n+2.n+3}{1.\ 2.\ 3},\ \frac{n+1.n+2.n+3.n+4}{1.\ 2.\ 3.\ 4},\ \&c.$$

ac propterea erunt ultimi termini in eorundem seriebus reciprocis isti:

$$\frac{1}{n},\ \frac{1.\ 2}{n.n+1},\ \frac{1.\ 2.\ 3}{n.n+1.n+2},\ \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{n.n+1.n+2.n+3},\ \&c.$$

& qui hos immediate sequuntur,

$$\frac{1}{n+1},\ \frac{1.\ 2}{n+1.n+2},\ \frac{1.\ 2.\ 3}{n+1.n+2.n+3},\ \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{n+1.n+2.n+3.n+4},\ \&c.$$

Jam si a qualibet serie reciproca eadem ipsa truncata ab initio & aucta in fine uno termino, methodo Prop. XV, subtrahatur; subducto sigillatim secundo termino a primo, tertio a secundo, sequente ultimum ab ultimo; nascitur series terminorum totidem, quæ, per ea quæ in præced. Propos. dicta sunt, seriei reciprocæ figuratorum gradus sequentis aut subdupla est, aut subsesquialtera, aut subsesquitertia, &c. atque insuper, per observata Propos. XV, æqualis primo termino minus sequente ultimum ejus seriei, per cujus subductionem nata fuit: unde ipsa summa seriei finitæ reci-

ramidalium terminus primus & primæ differentiarum ad quartas usque (ulteriores enim nullæ sunt) ordinatim positæ constituunt uncias binomii ad quartam potestatem elevati, 1, 4, 6, 4, 1. Terminus igitur generalis est $1 + \frac{x-1}{1}.4 + \frac{x-1.x-2}{1.\ 2}.6 + \frac{x-1.x-2.x-3}{1.\ 2.\ 3}.4 + \frac{x-1.x-2.x-3.x-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = \frac{x.x+1.x+2.x+3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$. Et ratio procedendi manifesta est. Hic x nobis est, quod Auctori nostro n.

reciprocæ figuratorum quorumcunque obtinetur facile; ut sequitur: (c) No. LIV.

B. Trigon. $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ &c. . . . . usque ad $\frac{1.2.}{n.n+1}$

$$=\frac{2}{1}-2\times\frac{1}{n+1}=\frac{2}{1}-\frac{2}{n+1}$$

C. Pyram. $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$ &c. . . . . $\frac{1.2.3}{n.n+1.n+2}$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\times\frac{1.2}{n+1.n+2}=\frac{3}{2}-\frac{1.3}{n+1.n+2}$$

D. Triang. Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}$ &c. . . . . $\frac{1.2.3.4}{n.n+1.n+2.n+3}$

$$=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times\frac{1.2.3}{n+1.n+2.n+3}=\frac{4}{3}-\frac{1.2.4}{n+1.n+2.n+3}$$

E. Pyr. Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}$ &c. . . . . $\frac{1.2.3.4.5}{n.n+1.---n+4}$

$$=\frac{5}{4}-\frac{5}{4}\times\frac{1.2.3.4}{n+1.---n+4}=\frac{5}{4}-\frac{1.2.3.5}{n+1.---n+4}$$

XX. In-

(c) Methodo pag. 390 exposita, invenietur Seriei reciprocæ Trigon. terminum generalem $\frac{1.2}{x.x+1}$ reduci ad $\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}=2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$, unde summa fit $2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{x+1}\right)$;

Seriei recipr. Pyram. terminum generalem $\frac{1.2.3}{x.x+1.x+2}$ reduci ad $3\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)$, ideoque summam esse $3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)$ $=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1.x+2}\right)$;

Seriei recipr. Trigono-Pyram. terminum gener. $\frac{1.2.3.4}{x.x+1.x+2.x+3}$ reduci ad $4\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x+1}+\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$ summamque esse $4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)=4\left(\frac{1}{3}-\frac{1.2}{x+1.x+2.x+3}\right)$; quæ cum *Bernoullianis* conveniunt, & processum satis indicant.

No. LIV.

XX.

Invenire summam seriei infinitæ reciprocæ Trigonalium, Pyramidalium, Triang. Pyramidalium, &c. multatæ terminis initialibus quotlibet: & infinitarum summarum summam.

1. Summa seriei infinitæ integræ Trigonalium, Pyramidalium, Triang. Pyramidalium, &c. est $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, &c. per XVIII. Si ex unaquaque serie ab initio abscindantur n termini, summa abscissorum est $\frac{2}{1} - \frac{1}{n+1}$, $\frac{3}{2} - \frac{1.3}{n+1.n+2}$, $\frac{4}{3} - \frac{1.2.4}{n+1.n+2.n+3}$, $\frac{5}{4} - \frac{1.2.3.5}{n+1.n+2.n+3.n+4}$, &c. per XIX. Subtracta ergo hac a summa omnium, erit summa reliquorum $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1.3}{n+1.n+2}$, $\frac{1.2.4}{n+1.n+2.n+3}$, $\frac{1.2.3.5}{n+1.n+2.n+3.n+4}$, &c.

2. Summa serierum omnium mutilatarum seu nullo, seu uno termino est infinita; duobus terminis est $\frac{3}{2}$, per XVIII. Hinc si demas tertios terminos (qui constituunt seriem trigonalium B truncatam duobus terminis, cujus summa per eandem est $\frac{2}{3}$) erit reliquorum omnium summa $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} = \frac{5}{2.3}$. Hinc denuo si quartos terminos auferas (qui formant seriem pyramidalium C itidem truncatam duobus terminis, summamque proin per præced. efficiunt $\frac{2}{8}$) relinquetur cæterorum omnium summa $\frac{5}{6} - \frac{2}{8} = \frac{7}{12} = \frac{7}{3.4}$. Hinc iterum si quintos terminos resceces, exibit cæterorum summa $\frac{9}{4.5}$; si sextos, $\frac{11}{5.6}$; septimos, $\frac{13}{6.7}$; &c. adeoque universaliter, si ex unaquaque serie tollantur n termini, erit mutilatarum ita serierum omnium summa reliqua $\frac{2n-1}{n-1.n}$.

Coroll. Series $\frac{2}{n+1} + \frac{1.3}{n+1.n+2} + \frac{1.2.4}{n+1.n+2.n+3} +$

1.2.

$\frac{1.2.3.5}{n+1.n+2.n+3.n+4}$ + &c. sive, $\frac{2}{1}\times\frac{1}{n+1}+\frac{3}{2}\times\frac{1.2}{n+1.n+2}+$ No. LIV.
$\frac{4}{3}\times\frac{1.2.3}{n+1.n+2.n+3}+\frac{5}{4}\times\frac{1.2.3.4}{n+1\ldots n+4}+$ &c. $=\frac{2n-1}{n-1.n}$; singula enim seriei hujus membra singulas figuratam serierum mutilatarum summas exprimunt, per 1. part. hujus; adeoque & omnia omnium.

XXI.

Seriei hujus, $\frac{1a}{1.2}+\frac{2a}{1.2.3}+\frac{3a}{1.2.3.4}+\frac{4a}{1.2.3.4.5}+$ &c. *hoc est*, $\frac{a}{2}+\frac{a}{1.3}+\frac{a}{1.2.4}+\frac{a}{1.2.3.5}+$ &c. *summam invenire.*

Series hæc nascitur subductione sequentis seriei, $\frac{a}{1}+\frac{a}{1.2}+\frac{a}{1.2.3}+\frac{a}{1.2.3.4}+$ &c : multatæ primo termino a seipsa integra, methodo Prop. XV, quare ejus summa $=a$, primo sc. termino hujus, per Axioma 3.

Coroll. Hinc $\frac{1}{1.2}+\frac{4}{1.2.3}+\frac{9}{1.2.3.4}+\frac{16}{1.2.3.4.5}+$ &c. ($=$ F $+$ G $+$ H $+$ I $+$ &c.) $=\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+$ &c.

Nam F. $\frac{1}{1.2}+\frac{2}{1.2.3}+\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{4}{1.2.3.4.5}+$ &c. $=\frac{1}{1}$, per XXI.

G. - - $+\frac{2}{1.2.3}+\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{4}{1.2.3.4.5}+$ &c. $=$ F $-\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1.2}$

H. - - - - - - - $+\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{4}{1.2.3.4.5}+$ &c. $=$ G $-\frac{2}{1.2.3}=\frac{1}{1.2.3}$

I. - - - - - - - - - - - - $+\frac{4}{1.2.3.4.5}+$ &c. $=$ H $-\frac{3}{1.2.3.4}=\frac{1}{1.2.3.4}$

XXII.

Invenire summas serierum K, L, M, N; quarum numeratores

 sunt

No. LIV. *sunt arithmetice progressionales, denominatores Trigonalium integrorum, aut Quadratorum unitate minutorum quadrata.* (d)

K =

(d) Extendit hæc Propos. Methodum pag. 390 ad Series quæ formantur per subductionem seriei reciprocæ quadratorum, vel cujusvis potestatis $[\frac{1}{x^n}]$ a se ipsa truncata terminis uno, vel pluribus initialibus.

Reducatur enim fractio, quæ terminum Seriei generalem exprimit, in tot, quot fieri potest, fractiones hujus formæ, $A : (x+a)^n + B : (x+b)^n + C : (x+c)^n$. &c. ubi x repræsentat successivos terminos progressionis arithmeticæ. Et si crescat x per differentiam quæ sit communis divisor quantitatum $b-a$, $c-a$, &c., sitque insuper $A+B+C$ &c. $=0$, Series erit summabilis.

Ex. gr. Seriei K terminus generalis $4(2x+1) : xx(x+1)^2$, reducitur ad $A : xx + B : (x+1)^2$; ubi $A=4$, & $B=-4$ dant $A+B=0$, & x crescendo per unitates alteram conditionem observat. Igitur Series K reducitur ad duas sequentes

$$4\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+ \cdots \frac{1}{xx}\right)$$

$$-4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+ \cdots \frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

quarum summa $= 4\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right) =$ quæ, si sit x infinita, reducitur ad 4.

Pariter Seriei L terminus generalis $(x+1) : xx(x+2)^2$ reducitur ad $\frac{1}{4} : xx - \frac{1}{4} : (x+2)^2$. Ergo cum binæ conditiones requisitæ observentur, ea summari poterit. Reducitur enim Series L ad duas sequentes

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+ \&c \cdots \frac{1}{xx}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}+\&c.+\frac{1}{xx}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+2)^2}\right),$$

quæ, ubi x infinita est, abit in $\frac{1}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{16}$.

Seriei M terminus generalis est $x : (4xx-1)^2$. Is reducitur ad $\frac{1}{8} : (2x-1)^2 - \frac{1}{8} : (2x+1)^2$. Ergo Series ipsa componitur ex hisce duabus

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25} \cdots +\frac{1}{(2x-1)^2}\right)$$

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{25} \cdots +\frac{1}{(2x+1)^2}\right)$$

quarum summa $= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{(2x+1)^2}\right) = (xx+x) : 2(2x+1)^2$, quæ, posita x infinita, est $= xx : 8xx = \frac{1}{8}$.

Denique Seriei N terminus generalis $\frac{1}{16}(2x+1) : xx(x+1)^2$, reducitur ad $\frac{1}{16} : xx - \frac{1}{16} : (x+1)^2$. Hujus itaque summa $= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)$, quæ, cum x infinita est, reducitur ad $\frac{1}{16}$.

Posset ulterius extendi hæc Methodus & ad casus magis compositos applicari: sed Commentatorem oportet brevitatis esse memorem.

No. LIV.

$$K = \frac{3}{1^2} + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{6^2} + \frac{9}{10^2} + \frac{11}{15^2} + \frac{13}{21^2} + \&c.$$

$$L = \frac{2}{3^2} + \frac{3}{8^2} + \frac{4}{15^2} + \frac{5}{24^2} + \frac{6}{35^2} + \frac{7}{48^2} + \&c.$$

$$M = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{15^2} + \frac{3}{35^2} + \frac{4}{63^2} + \frac{5}{99^2} + \frac{6}{143^2} + \&c.$$

$$N = \frac{3}{8^2} + \frac{5}{24^2} + \frac{7}{48^2} + \frac{9}{80^2} + \frac{11}{120^2} + \frac{13}{168^2} + \&c.$$

Per subductionem seriei $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \&c.$ mutilatæ primo termino a seipsa integra, nascitur series aliqua, cujus termini sunt subquadrupli terminorum respondentium seriei K; unde, per Ax. 3, series $K = 4 \times \frac{1}{1^2} = 4$.

Per subductionem vero ejusdem seriei mutilatæ duobus primis terminis a seipsa integra, oritur series, quæ quadrupla est seriei L; unde per idem Ax. Series $L = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}\right) = \frac{5}{16}$.

Denique per subductionem seriei $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c.$ mutilatæ primo termino a seipsa integra, emergit alia, quæ octupla est seriei M; quare per 3. Ax. series $M = \frac{1}{8} \times \frac{1}{1^2} = \frac{1}{8}$: & propterea duplum seriei M, hoc est, omnes termini locorum imparium seriei $L = \frac{1}{4}$; adeoque reliqui termini ejusdem seriei, hoc est, ipsa series $N = \frac{5}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

XXIII.

Invenire summas serierum Q & R, item V & X, &c. quarum denominatores sunt termini integri progressionis quadruplæ, noncuplæ, &c. numeratores vero termini progressionis duplæ, triplæ, &c. unitatum minuti, tum aucti.

 Operatio

No. LIV. Operatio talis:

$$\left.\begin{aligned} O &= \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \&c. = 2 \\ P &= \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{256} + \&c. = \tfrac{4}{3} \end{aligned}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{1-1}{1} + \frac{2-1}{4} + \frac{4-1}{16} + \frac{8-1}{64} + \frac{16-1}{256} + \&c. \\ \text{seu } & \frac{0}{1} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{7}{64} + \frac{15}{256} + \&c. \end{aligned}\right\} = O - P = 2 - \tfrac{4}{3} = \tfrac{2}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{1+1}{1} + \frac{2+1}{4} + \frac{4+1}{16} + \frac{8+1}{64} + \frac{16+1}{256} + \&c. \\ \text{seu } & \frac{2}{1} + \frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{9}{64} + \frac{17}{256} + \&c. \end{aligned}\right\} = O + P = 2 + \tfrac{4}{3} = 3\tfrac{1}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{81} + \&c. = \tfrac{3}{2} \\ T &= \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{81} + \tfrac{1}{729} + \tfrac{1}{6561} + \&c. = \tfrac{9}{8} \end{aligned}\right\} \text{per Corol. VIII.}$$

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1-1}{1} + \frac{3-1}{9} + \frac{9-1}{81} + \frac{27-1}{729} + \frac{81-1}{6561} + \&c. \\ \text{seu } & \frac{0}{1} + \frac{2}{9} + \frac{8}{81} + \frac{26}{729} + \frac{80}{6561} + \&c. \end{aligned}\right\} = S - T = \tfrac{3}{2} - \tfrac{9}{8} = \tfrac{3}{8}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{1+1}{1} + \frac{3+1}{9} + \frac{9+1}{81} + \frac{27+1}{729} + \frac{81+1}{6561} + \&c. \\ \text{seu } & \frac{2}{1} + \frac{4}{9} + \frac{10}{81} + \frac{28}{729} + \frac{82}{6561} + \&c. \end{aligned}\right\} = S + T = \tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{8} = 2\tfrac{5}{8}$$

Idem inveniri poteſt, reſolvendo ſeries propoſitas Q, R; V & X, methodo Prop. XIV. Exempli loco eſto ſeries

Q=

$$Q = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{7}{64} + \frac{15}{256} + \&c. = Y + Z + \Pi + \Sigma + \&c.$$ No.LIV.

$$\left.\begin{array}{l} Y = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \&c. = \text{per Coroll. VIII. } \frac{1}{3} \\ Z = \cdot + \frac{2}{16} + \frac{2}{64} + \frac{2}{256} + \&c. = 2Y - \frac{2}{4} = \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1}{6} \\ \Pi = \cdots\cdots \frac{4}{64} + \frac{4}{256} + \&c. = 2Z - \frac{4}{16} = \frac{2}{6} - \frac{4}{16} = \frac{1}{12} \\ \Sigma = \cdots\cdots\cdots + \frac{8}{256} + \&c. = 2\Pi - \frac{8}{64} = \frac{2}{12} - \frac{8}{64} = \frac{1}{24} \\ \&c. = \cdots\cdots\cdots \&c. \cdots\cdots\cdots = \&c. \end{array}\right\} \frac{2}{3} \text{ per Coroll. VIII.}$$

XXIV.

In serie quavis infinita, cujus numeratores omnes sunt aequales; denominatores, vel numeri naturales, vel eorundem quadrata, cubi, aut alia quacunque potestas: summa terminorum omnium in locis imparibus est ad summam omnium in paribus, ut similis potestas binarii unitate multata ad unitatem.

Puta in numeris naturalibus, ut 1 ad 1; in quadratis ut 3 ad 1; in cubis ut 7 ad 1; in biquadratis ut 15 ad 1; &c.

Modus investigandi talis:

In Numeris Naturalibus:

Series ista $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+$ &c. aequatur suis partibus; videl. seriebus A + B + C + D + &c.

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \&c. = \frac{2}{1} \\ B = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \&c. = \frac{2}{3} \\ C = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \&c. = \frac{2}{5} \\ D = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} + \&c. = \frac{2}{7} \end{array}\right\} \text{per Coroll. VIII.}$$

Est ergo $\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+$ &c. aequalis, ideoque $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$ &c. dimidia seriei propositae $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ &c. hoc est, summa termino-

No. LIV. minorum in locis imparibus dimidia ſeriei totius; & proinde æqualis ſummæ reliquorum $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+$ &c.

Patet hinc rurſum veritas Prop. XVI. cum enim $\frac{1}{1}>\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}>\frac{1}{6}$, &c. erit $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+$ &c. $>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+$ &c. cui tamen æqualis modo oſtenſa eſt; quæ utique conciliari nequeunt, niſi ſumma utriuſque ſeriei ſtatuatur infinita, hoc eſt, tanta ut quæ inter illas intercedit differentia rationem æqualitatis deſtruere non poſſit.

In Numeris Quadratis.

Series $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+$ &c. $= E+F+G+$ &c.

$$\left.\begin{array}{l} E=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\text{\&c.}=\frac{4}{3.1} \\ F=\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{144}+\frac{1}{576}+\text{\&c.}=\frac{4}{3.9} \\ G=\frac{1}{25}+\frac{1}{100}+\frac{1}{400}+\frac{1}{1600}+\text{\&c.}=\frac{4}{3.25} \\ H=\frac{1}{49}+\frac{1}{196}+\frac{1}{784}+\frac{1}{3136}+\text{\&c.}=\frac{4}{3.49} \end{array}\right\}\text{per Cor. VIII.}$$

Eſt ergo $\frac{4}{3.1}+\frac{4}{3.9}+\frac{4}{3.25}+\frac{4}{3.49}+$ &c. $=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ &c. adeoque prioris ſubſeſquitertia, hoc eſt, $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+$ &c. æqualis $\frac{3}{4}$ poſterioris, hoc eſt, termini omnes locorum imparium in ſerie propoſita conſtituunt tres quartas partes totius ſeriei, & reliqui unam: quare ſumma terminorum illorum ad ſummam horum, ut 3 ad 1. Eadem inveſtigandi methodus obſervetur in reliquis poteſtatibus.

Aliter

Aliter & universaliter ita: No. LIV.

$$x = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} \text{ \&c.}$$

$$y = \frac{1}{1^m} \quad + \frac{1}{3^m} \quad + \frac{1}{5^m} \quad \text{\&c.}$$

$$x - y = + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} \text{ \&c.}$$

$$= \frac{1}{2^m 1^m} + \frac{1}{2^m 2^m} + \frac{1}{2^m 3^m} \text{ \&c.}$$

$$2^m x - 2^m y = + \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} \text{ \&c.} = x$$

unde $2^m x - x = 2^m y$, & $y = x - x : 2^m$, & $x - y = x : 2^m$,

ergo $y : x - y = x - \frac{x}{2^m} : \frac{x}{2^m} = 1 - \frac{1}{2^m} : \frac{1}{2^m} = 2^m - 1 : 1$. (e)

Schol.

(e) Manca, ut verum fatear, mihi videtur hæc Demonstratio, & quæ Auctorem, in Scholio sequenti, in errorem induxit. Ubi ponit $2^m(x-y) = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} +$ &c. $= x$, non animadvertit Seriei x terminos esse duplo plures terminis seriei $2^m(x-y)$. Scilicet, si Series x terminatur ad $\frac{1}{\infty^m}$, Series $2^m(x-y)$ terminatur ad $\frac{1}{(\frac{1}{2}\infty)^m}$. Non ergo poni debent æquales hæ Series, nisi constet totam Seriem x, primæ suæ medietati æqualem esse, hoc est, posteriorem medietatem prioris respectu evanescere. Nam si prior medietas ad totam Seriem sit ut r ad s, erit $2^m(x-y) : x = r : s$; unde est $y : x - y = 2^m s - r : r$, quæ ratio redit ad $2^m - 1 : 1$ (ut vult Auctor noster) tunc tantum quando $r = s$. Ut absolvatur itaque Demonstratio, necesse ut ostendamus quænam est ratio $r : s$. Ea vero ratio est æqualitatis, quotiescunque m numerus est unitate major. Nam si concipiatur, ut in Cor. 4. Prop. XVI. pag. 394, hyperboloides DEF [*Tab.*XX. *fig.*1.] inter asymptotos AC, AG, ejus naturæ, ut sit ubique CD $= 1 : AC^m$, & BE $= 1 : AB^m$, & fingatur AC divisa in partes

N°. LIV. SCHOL. Liquet hinc, quod summae duarum serierum (etiamsi incognitae) possint ad se invicem habere rationem cognitam. Vid. Prop. XVII. sub fin. Extendit se autem demonstratio ad potestatum radices, sive ad potestates fractas, non minus ac integras: sic ex. gr. colligimus, in serie $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{27}}+\frac{1}{\sqrt{64}}+\frac{1}{\sqrt{125}}+$ &c. (ubi denominatores sunt cuborum radices quadratae) omnes terminos locorum imparium ad omnes parium esse, ut $\sqrt{8}-1$ ad 1. Mirabile vero est, quod in serie $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+$&c. (cujus summa infinita est, ceu major serie $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$&c. ob denominatores minores) termini locorum imparium ad terminos parium juxta regulam inveniuntur habere rationem $\sqrt{2}-1$ ad 1, minoris sc. ad majus; cum tamen illi cum his sigillatim collati

tes innumeras aequales; quae sumantur pro unitatibus, repraesentabit spatium ACDFG Seriem integram $x=\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}$&c. Capiatur AB $=\frac{1}{2}$ AC, & repraesentabit spatium ABEFG hujus seriei medietatem primam, spatium vero BEDC medietatem postremam. Ratio igitur $r:s$ eadem est, quae spatii ABEFG ad spatium ACDFG. Sed quaelibet methodus quadraturarum, aut ipsa calculi integralis principia docent spatium ABEFG esse infinitum, quando $m>1$. Spatium vero BEDC finitum est. Igitur, quando $m>1$, spatii ABEFG ad spatium ACDFG ratio, vel ratio $r:s$, eadem quae infiniti ad se ipsum finito auctum, hoc est, ratio $r:s$ est aequalitatis ratio. Quare, in eo casu, verum est esse y ad $x-y$ ut 2^m-1 ad 1.

Sed, quando $m<1$, spatium ABEFG $=\frac{1}{1-m}$ AB^{1-m}, & spatium ACDFG $=\frac{1}{1-m}$ AC^{1-m}. Quare haec spatia sunt inter se ut AB^{1-m} ad AC^{1-m}, vel ut 1 ad 2^{1-m}. Igitur $r:s=1:2^{1-m}$, & $y:x-y\,[2^m s-r:r]=2^m.2^{1-m}-1:1=2-1:1=1:1$. Quotiescunque igitur $m<1$, hoc est, quando loco potestatum, Series est radicum reciproca, toties summa terminorum parium aequalis est summae imparium. Non satis caute venditavit Auctor, in Scholio quod mox sequitur, Regulam suam pro universali, nec locus est Paradoxo, quod ibidem tanquam verum, in medium affert.

collati iisdem manifesto sint majores: cujus ἐναντιοφανείας rationem, etsi ex infiniti natura finito intellectui comprehendi non posse videatur, nos tamen satis perspectam habemus. Idem vero de similibus seriebus aliis, quæ infinitam summam habent, intelligendum. No. LIV.

XXV.

Series Thesis X, $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}+\frac{a+2c}{b+2d}-\frac{a+3c}{b+3d}$; *& alia harmonica terminorum totidem & denominatorum eorundem,* $\frac{f}{b}-\frac{f}{b+d}+\frac{f}{b+2d}-\frac{f}{b+3d}$; *signis + & — alternatim se excipientibus, sumtoque* $f=a-\frac{bc}{d}$; *æquales summas habent.*

Etenim subtrahendo terminos locorum parium a terminis imparium, provenit eadem utrobique series, $\frac{ad-bc}{bb+bd}+\frac{ad-bc}{bb+5bd+6dd}$, sive $\frac{df}{bb+bd}+\frac{df}{bb+5bd+6dd}$, &c.

Esto ex. gr. series Th. X. $\frac{3}{1}-\frac{5}{2}+\frac{7}{3}-\frac{9}{4}+\frac{11}{5}-\frac{13}{6}$, positoq; $f=3-2=1$, series harmonica, $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$, erit summa utriusque $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}$, per saltum excerpta ex serie Q, Th. XV.

XXVI.

Seriei infinitæ fractionum K (*quarum denominatores crescunt progressione geometrica, hoc est, sequentes præcedentium sunt æque-multiplices exacte, numeratores vero præcedentium æque-multiplices aucti vel minuti communi quodam numero*,) *summam ultimumve terminum reperire.*

No. LIV. ($\pm$ denotat vel ubique + vel ubique —)

$$K = \frac{a}{c} + \frac{ab \pm d}{cm} + \frac{abb \pm bd \pm d}{cmm} + \frac{ab^3 \pm bbd \pm bd \pm d}{cm^3} + \frac{ab^4 \pm b^3d \pm bbd \pm bd \pm d}{cm^4} + \&c.$$

1. Summa seriei invenitur, resolvendo illam, methodo Prop. XIV, in series fractionum pure proportionalium L + M + N + O + P + &c.

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{a}{c} + \frac{ab}{cm} + \frac{abb}{cmm} + \frac{ab^3}{cm^3} + \frac{ab^4}{cm^4} + \&c. = + \frac{am}{(m-b)c} \\ M &= \pm \frac{d}{cm} \pm \frac{bd}{cmm} \pm \frac{bbd}{cm^3} \pm \frac{b^3d}{cm^4} \; \&c. = \pm \frac{d}{(m-b)c} \\ N &= \cdots \pm \frac{d}{cmm} \pm \frac{bd}{cm^3} \pm \frac{bbd}{cm^4} \; \&c. = \pm \frac{d}{(m-b)mc} \\ O &= \cdots \pm \frac{d}{cm^3} \pm \frac{bd}{cm^4} \; \&c. = \pm \frac{d}{(m-b)mmc} \\ P &= \cdots \pm \frac{d}{cm^4} \; \&c. = \pm \frac{d}{(m-b)m^3c} \end{aligned}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

&c. &c.

Summæ serierum M, N, O, P, &c. novam progressionem geometricam constituunt, cujus summa, per Coroll. VIII, est $md : (m-1)(m-b)c$, quæ summæ seriei L $am : (m-b)c$ addita vel subtracta efficit $(amm - am \pm md) : (m-1)(m-b)c$ summam omnium serierum L, M, N, &c. hoc est, ipsius seriei propositæ K.

2. Observandum, si $m > b$, summam esse finitam, adeoque ultimum seriei terminum evanescere, vid. Cor. XIV.

Sin $m < b$, & summa infinita est, ultimus quoque terminus est infinitus; tum enim singulæ progressiones geometricæ L, M, N, &c. sunt crescentes: confer Prop. V.

At existente $m = b$, summa quidem infinita est, sed postremus terminus finitus: tum enim surrogato m in locum b, secundus

lus terminus sit $(am \pm d) : cm$, hoc est, $a : c \pm d : cm$: tertius No.LIV.
$amm \pm md \pm d) : cmm$, hoc est, $a : c \pm d : cm \pm d : cmm$: quartus
$am^3 \pm mmd \pm md \pm d) : cm^3$, hoc est, $a : c \pm d : cm \pm d : cmm \pm$
$l : cm^3$: atque ita postremus $a : c \pm d : cm \pm d : cmm \pm d : cm^3 \pm$
$l : cm^4$, &c. in infinitum: unde patet, terminum infinitesimum
esolvi in $a : c \pm$ serie infinitorum geometrice progressionalium
n ratione m ad 1, quorum summa per Cor. VIII. est $d : (m-1)c$,
uæ ipsi $a : c$ addita vel subtracta efficit terminum infinitesimum
$am - a \pm d) : (m - 1)c$, cujus numerator differentiam nu-
neratorum primi & secundi termini, uti & denominator deno-
ninatorum eorundem differentiam exprimit: quare cum ex Prop.
K manifestum sit, terminum ultimum hujus progressionis

$$Q = \frac{a}{c}, \frac{am \pm d}{cm}, \frac{2am - a \pm d}{2cm - c}, \frac{3am - 2a \pm 3d}{3cm - 2c}, \frac{4am - 3a \pm 4d}{4cm - 3c}, \&c.$$

$$\text{sive } \frac{a}{c}, \frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm}, \frac{a}{c} \pm \frac{2d}{2cm - c}, \frac{a}{c} \pm \frac{3d}{3mc - 2c}, \frac{a}{c} \pm \frac{4d}{4cm - 3c}, \&c.$$

idem esse $(am - a \pm d) : (m - 1)c$ sive $a : c \pm d : (m - 1)c$; equitur in utraque progressione K & Q, primis duobus terminis xistentibus iisdem, ultimos quoque esse pares, quamvis incre-nenta vel decrementa prioris magis subitanea sint, quandoqui-lem ejus termini non nisi per saltum ex posteriore sunt excerp-i: Invenio enim, quod memorabile est, tertium terminum se-iei K convenire cum termino $m + 2$, quartum cum $mm + m + 2$, uintum cum $m^3 + mm + m + 2$, sextum cum $m^4 + m^3 + mm + m + 2$ eriei Q, & sic deinceps (f); uti patere poterit ex subjunctis se-iebus, ubi a valet 2, c 3, b vel m 3, & d 1.

Yyy 3 K =

(f) Seriei K terminus generalis sit $\frac{a}{c}\left(\frac{b}{m}\right)^z \pm \frac{d}{c} \times \frac{b^{z-1} + b^{z-2} + b^{z-3} \ldots 1}{m^z}$ [pono z esse numerum terminorum ui quæsitum præcedunt] $= \frac{a}{c}\left(\frac{b}{m}\right)^z \pm \frac{d}{c} \times \frac{(b^z - 1) : (b - 1)}{m^z} =$ [quando $m = b$] $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{c} \times \frac{(m^z - 1) : (m - 1)}{m^z}$.

Seriei Q terminus, quem x ter-mini

No. LIV. $K = \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{22}{27}, \frac{67}{81}, \frac{202}{243}$, &c. ultimus $\frac{5}{6}$.

$Q = \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{12}{15}, \frac{17}{21}, \frac{22}{27}, \frac{27}{33}, \frac{32}{39}, \frac{37}{45}, \frac{42}{51}, \frac{47}{57}, \frac{52}{63}, \frac{57}{69}, \frac{62}{75}, \frac{67}{81}$, &c. ultimus $\frac{5}{6}$

Intellige vero, quæ dicta sunt de summa ultimoque termino seriei K, si numeratores præcedentium sunt æque-multiplices aucti communi numero d, vel diminuti quidem eodem numero, at insuper $ab > a + d$. Nam si sit $ab = a + d$, æquivalebunt singuli numeratores ipsi a, summaque seriei fiet finita, nempe $am : (m - 1)c$, & ultimus terminus evanescet, sive m existat < vel = ipsi b.

XXVII.

Si dati cujuslibet numeri radix quadrata ducatur in ipsum numerum, & producti radix quadrata denuo ducatur in eundem, & producti hujus radix iterum iterumque; idque fiat continuo in infinitum: erit radix producti ultimi aqualis ipsi dato numero: [puta, si datus numerus vocetur a, erit $\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a \text{ \&c.})})})})})} = a$].

Ponatur enim $x = \sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a \text{ \&c.})})})})}$ erit $xx = a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a \text{ \&c.})})})}$ & $xx : a = \sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a \text{ \&c.})})})} = x$, proinde $xx = ax$, & $x = a$. Q. E. D.

XXVIII.

Si dati numeri cujuslibet radix quadrata addatur ipsi dato numero, & aggregati radix quadrata denuo addatur eidem, & aggregati hujus radix iterum iterumque; idque fiat continuo in infinitum: radix

mini præcedunt est $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{c} \times \frac{x}{(m-1)x+1}$.

Fiat terminus $z + 1$ Seriei K æqualis termino $x + 1$ Seriei Q, & demtis utrinque æqualibus $a : c$, ac dividendo per $d : c$, relinquetur $(m^z - 1) : m^z (m - 1) = x : (m - 1)$

$x + 1$; unde habetur $x = (m^z - 1) : (m - 1) = m^{z-1} + m^{z-2} + m^{z-3} \text{ ------- } + 1$ adeoque $x + 1 = m^{z-1} + m^{z-2} + m^{z-3} \text{ ------ } + 2$.

radix aggregati ultimi radicem dati numeri quarta parte unitatis aucti dimidia unitate superabit. [puta $\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\&c.))))}}}} = \frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+a)}$.] No.LIV.

Posito enim $x=\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\&c.)))}}}$ erit $xx=a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\&c.))}}$ & $xx-a=\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\&c.)))}}}=x$: proinde $xx=x+a$, & $x=\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+a.)}$ Q. E. D.

XXIX.

Datis duobus numeris quibusvis, si radix quadrata unius ducatur in alterum, & producti radix quadrata in primum, & hujus producti radix in alterum; atque ita semper productorum radices ducantur alternatim in datorum alterum; idque continuetur in infinitum: erit radix producti ultimi æqualis alterutri duorum mediorum proportionalium inter duos datos numeros [puta si dati numeri dicantur a & b, erit $\sqrt{(a\sqrt{(b\sqrt{(a\sqrt{(b\sqrt{(a\sqrt{(b\ \&c.))))))}}}}}}=\sqrt[3]{aab}$.]

Esto namque $x=\sqrt{(a\sqrt{(b\sqrt{(a\sqrt{(b.\ \&c.))))}}}}$, erit $xx=a\sqrt{(b\sqrt{(a\sqrt{(b\ \&c.)))}}}$ & $xx:a=\sqrt{(b\sqrt{(a\sqrt{(b\ \&c.)))}}}$ & $x^4:aa=b\sqrt{(a\sqrt{(b\ \&c.))}}$ & $x^4:aab=\sqrt{(a\sqrt{(b\ \&c.))}}=x$; proinde $x^4=aabx$, & $x^3=aab$, & $x=\sqrt[3]{aab}$. Q. E. D.

XXX.

Datis duobus numeris quibusvis, si radix cubica producti ex utroque ducatur in eorum primum, & producti radix quadrata ducatur in productum ex utroque, & hujus producti radix cubica denuo in eorum primum; & sic alternatim radices cubicæ & quadratæ ducantur in eorum primum & productum ex utroque: erit radix producti ultimi æqualis primo vel secundo quatuor mediorum proportionalium inter duos datos [puta $\sqrt{(a\sqrt[3]{(ab\sqrt{(a\sqrt[3]{(ab,\ \&c.))))}}}}=\sqrt[5]{a^4b}$, & $\sqrt[3]{(ab\sqrt{(a\sqrt[3]{(ab\sqrt{(a\ \&c.))))}}}}=\sqrt[5]{a^3bb}$.]

XXXI.

Datis duobus numeris quibusvis, si radix quadrata secundi ducatur in primum, & producti radix quadrata iterum in primum, producti vero hujus radix in secundum, & hujus producti radix denuo in primum, & sic alternatim productorum radices multiplicentur,

tur,

No. LIV. *tur, bis in primum, semel in secundum, erit radix producti ultimi = primo, secundo, vel quarto sex proportionalium inter duos datos* [puta $\surd(a\surd(a\surd(b\surd(a\surd(a\surd(b \&c.)))))) = \sqrt[7]{a^6 b}$, & $\surd(a\surd(b\surd(a\surd(a\surd(b\surd(a\surd(a \&c.))))))) = \sqrt[7]{a^5 bb}$, & $\surd(b\surd(a\surd(a\surd(b\surd(a\surd(a \&c.)))))) = \sqrt[7]{a^3 b^4}$.]

XXXII.

Datis duobus numeris quibusvis p & q, *si tertius quicunque ductus in* q, *addatur ipsi* pp, *& ex radice summæ subtrahatur* p, *& residui radix in* q *ducta addatur ipsi* pp, *& ex radice summæ denuo subtrahatur* p, *& sic deinceps in infinitum, erit radix ultimi residui, puta* $\surd(-p+\surd(pp+q\surd(-p+\surd(pp+q\surd(-p+\&c.)))))$ *radix æquationis cubicæ* $x^3 = -2px+q$.

XXXIII.

Iisdem positis, quæ in præcedente; si subtractio ipsius p *vertatur in additionem, erit radix aggregati ultimi, puta* $\surd(+p+\surd(pp+q\surd(+p+\surd(pp+q\surd(\&c.)))))$ *radix æquationis* $x^3 = +2px+q$.

XXXIV.

Datis duobus numeris p & q, *si tertius in* q *ductus subtrahatur a* pp, *& radix reliqui ad* p *addatur dematurve, & summæ reliquique radix in* q *ducta subducatur a* pp, *& radix reliqui*, &c. *erunt radices summæ residuique ultimi*, puta $\surd(p\pm\surd(pp-q\surd(p\pm\surd(pp-q\surd(\&c.)))))$ *radices æquationis* $x^3 = +2px - q$.

XXXV.

Non secus datis tribus numeris p, q, r, *erit* $\surd(-p+\surd(pp+r+q\surd(-p+\surd(pp+r+q \&c.))))$ *radix æquationis biquadraticæ* $x^4 = -2pxx+qx+r$.

Omnes hæ Prop. ad eundem modum demonstrantur, quo Prop. XXVII, XXVIII, & XXIX; quorsum itaque κοινώνω

SCHOL. Patet hinc aditus ad inventionem duarum med. proport. & in genere radicum Problematum solidorum & hypersolidorum per solas rectas lineas & circulos, quam præstantissimi omnium

nnium seculorum Geometræ a bis mille retro annis anxie, sed No. LIV.
ustra quæsivere. Hanc ego, quoad fieri potuit, per seriem conructionis in infinitum continuandæ, primus omnium exhibui in *ctis Lips.* mens. Septemb. 1689. * cum nemo simile quicquam ripto publicasset, forte nec animo concepisset uspiam.

Atque hic speculationis de Seriebus infinitis fructus felicissimus : nunquam pœnitendus nobis extitit; quem, ut infiniti Numinis enignitati unice acceptum ferimus; sic eundem, cum qualicunque oc nostro exantlato labore, ad majorem ejus gloriam directum t impensum volumus.

* Supra N°. XXXVII. pag. 411.

ΕΠΙΜΕΤΡΑ.

I.

Datur linea curva infinitis circa centrum gyris convoluta, & tamen finita alicui recta æqualis (g).

II.

Potest fieri ut curva quædam in se redeat instar Ellipsis, & tamen in infinitum excurrat instar Parabolæ. Talis est illa, cujus natura exprimitur per æquationem $ayy = bxx + x^3$ (h).

III. *Nec*

(g) Talem esse Spiralem Logaithmicam, demonstravit Auctor. N°. XLII. p. 443.

(h) Hæc est Curva 3ª. ordinis, NEWTONO species 68, quam expressit figura sua 73. Ruditer delineatam vide Tab. XX. fig. 2. Ex æquatione curvæ, habente formam hanc $y = \pm x\sqrt{\frac{b+x}{a}}$, manifestum est, quo magis crescunt abscissæ x positivæ, eo magis crescere ordinatas y, tam posit. quam negat. Excurrit igitur curva in infinitum ad hanc partem, sed, sumendo abscissas negativas, æquatio abit in hanc $y = \mp x\sqrt{\frac{b-x}{a}}$. Igitur si x excedat b, quantitatis negativæ $b - x$ radix extrahenda, esset imaginaria. Quamobrem ordinatæ fiunt imaginariæ ultra abscissam $AB = b$, hoc est, curva non ulterius extenditur, sed in se ipsam redit.

No. LIV.

III.

Nec absurdum est, unam eandemque numero magnitudinem in pluribus locis discretis & separatis simul existere. Sic duæ curvæ non obstante intervallo quo dirimuntur, nonnunquam constituunt unam eandemque numero curvam; qualis est, quæ exprimitur per $aax - x^3 = ayy$ ([t]).

IV.

Datur aliquod planum interminatum, quod tamen sit finitum ([u]).

V.

Item aliud quod quidem habeat infinitam aream, sed rotatum circa axem gignat corpus finitæ magnitudinis ([x]).

VI. *Ostendi-*

([t]) Hæc est species NEWTONI 67ª. fig. 70. 71. Vid. Tab. XX. fig. 3. Æquatio curvæ, si hanc accipiat formam $y = \pm\sqrt{(ax - x^3 : a)}$, docet, ad partem positivam, curvæ ordinatas esse reales, quamdiu $x < a$. Positiva enim quantitas est sub signo radicali. Sed ubi $x > a$, tunc negativa evadit quantitas $ax - x^3 : a$, & ejus radix y imaginaria. Constat igitur curva, ex parte positiva, ovali ACBD, cujus diameter AB $= a$. Ad partem vero negativam, imaginariæ sunt ordinatæ $y = \pm\sqrt{(x^3 : a - ax)}$, quamdiu $x < a$, reales simul ac $x > a$, & inde crescentibus x, crescunt y. Habet igitur Curva, ex parte negativa, formam Parabolæ campaniformis FEG, quæ distat ab ovali ACBD, intervallo AE $= a$. Nollem tamen inde concludere unam eandemque numero magnitudinem in pluribus locis discretis existere posse. Nam qui curvas ACBD, FEG, unam eandemque numero curvam pronunciat, quoniam una eademque æquatio utriusque naturam exprimit, mihi videtur signum cum re significata confundere.

([u]) Tale est in hyperbolis, quorum æquatio $x^m y^n = 1$, spatium inter ordinatam primariam asymptoton, & ordinatam quamvis comprehensum, quoties $m < n$, aut spatium inter ordinatam quamvis, axem asymptoton, & curvam contentum, quoties $m > n$.

([x]) Spatium ABEDC, [Tab. XI. fig. 4] inter hyperbolam *Apollonianam* BE, ordinatam AB, & asymptotos AC, CD, comprehensum, magnitudinis licet infinitæ, rotando tamen circa asymptoton CD, tanquam axem, gignit solidum finitæ magnitudinis, quod est, nempe, ad solidum finitum genitum ex rotatione rectanguli ABFC circa axem CF, ut 2AC ad AB.

VI.

Osculum Curvarum simplex duobus contactibus æquipollere, repetito examine per absurdum deprehendi (m).

VII.

Hic Syllogismus, Quoddam animal mente præditum usu rationis caret: Solus homo est animal mente præditum: Ergo, quidam homo usu rationis caret; *recte concludit, quamvis arietare videtur in utramque legem Syllogismorum primæ figuræ.*

VIII.

Est enim in modo Disamis *figuræ tertiæ; unde liquet, enunciationem exclusivam non semper æquipollere neganti, sed quandoque conversæ universali affirmanti.*

IX.

Prima corporum principia, stamina, *seu* elementa, *sunt necessario solida, non fluida.*

X.

Si Aer Recipientis ope Antliæ Pneumaticæ ad datum raritatis gradum perducendus sit, & quæratur quot haustibus, seu emboli agitationibus integris id consequi liceat; hæc observetur Regula: Logarithmum rationis, quam habet raritas aeris desiderata ad raritatem aeris naturalis, divide per Logarithmum rationis, quam habet cavitas Recipientis & Antliæ simul ad cavitatem solius Recipientis; *Indicabit enim quotiens quæsitum agitationum numerum. Intellige, si Recipiens & Antlia nullibi perfluant.* (n).

(m) Vid. Num. XLVII. pag. 480, & Nos. LV. LVI. LXIV. LXVI.

(n) Singulis emboli agitationibus, aer, qui recipiente solum continebatur, diffunditur in recipiens simul & antliam. Rarescit igitur singulis haustibus in ratione quam habet cavitas antliæ & recipientis simul ad cavitatem solius recipientis. Sit $a : 1$, vel a, hæc ratio. Ergo raritas, quæ ante primum haustum erat 1, post primum haustum erit a, post 2dum, a^2, post 3m, a^3, &c., post haustus x, a^x. Sit $r : 1$, vel r, ratio quam habet raritas desiderata ad

No. LIV.

XI.

Terræ ſemidiameter facili & exquiſita methodo ſic exploratur. Per libellam accuratiſſimam Tubo optico inſtructam & in puncto A [Fig. 5.] *lineæ alicujus ad perpendiculum erectæ conſtitutam, obſervetur eminus punctum* B *nota diſtantiæ: hinc tranſlata libella in punctum* B, *dirigatur verſus dictam perpendicularem, & obſervetur in hac punctum* C *ſuperius futurum ipſo* A: *quo facto, erit* CA *ad* AB, *ut* AB *ad ſemidiametrum Terræ quæſitam.* (*)

ad raritatem aeris naturalis. Igitur $a^x = r$, vel quoniam numerorum æqualium æquales ſunt logarithmi, x log. a = log. r, aut denique x = log. r : log. a.

(*) Nam, quia lineæ AB, BC, ſunt ad libellam, id eſt, horizontales, rectos angulos comprehendunt cum verticalibus AD, BD. Similia ſunt igitur Triangula CAB, BAD, & CA : AB = AB : AD, quæ pro Telluris ſemidiametro poteſt haberi. Sed vitiat hujus methodi ἀκρίβειαν, refractio aeris inæqualiter denſi, qua fit ut lineæ AB, BC, quæ rectæ eſſe deberent, incurventur.

Videatur N°. LXXI.



N°. LV.



N°. 52.

Fig. 2.

C S R P Q B N M

Fig. 4.

A l T L N B M t d q Q S R D P P C

N°. 54.

Fig. 4.

A B E C F D

Fig. 3.

C E A B D

Fig. 5.

C B A D

N°. LV.

G. G. L. *

GENERALIA

DE

NATURA LINEARUM,

Anguloque contactus & osculi, provolutionibus, aliisque cognatis, & eorum usibus nonnullis.

CUM nihil mihi sit gratius, quam qualiacunque tentamina mea Viris egregiis digna videri quæ perficiantur; perplacuere, quæ Clarissimus Basileensium Professor BERNOULLIUS, de linearum osculis mense *Martio* 1692 † in *Actis Eruditorum* publicarit. Cumque animadverterem, cogitationes quidem nostras in summa ipsi probari, nonnulla tamen aliter constituenda judicari, quod adeo non ægre fero, ut quoties doceor, in lucro ponam; meum esse putavi, rem denuo examinare, paratissimo ad retractandum animo, si monitis contrariis Doctissimi Viri locum dari posse deprehendissem. *Acta Erud. Lips. 1692. Sept. p. 440*

Statueram ego, *Contactum* continere duas intersectiones coincidentes; *osculum* continere plures contactus coincidentes, osculum quidem primi gradus esse, quando coincidunt duo contactus, seu intersectiones quatuor; osculum secundi gradus, quando coincidunt intersectiones sex, aut contactus tres &c. & circulum osculantem, sive maximum, aut minimum tangentium, intra, vel extra, in proposito puncto circulorum [qui scilicet omnium tangentium proxime ad curvam accedit] esse curvedinis mensuram, & definire quantitatem anguli contactus; ita ut angulus contactus

 duarum

* *Gothofredi Gulielmi* LEIBNITII. † Supra N°. XLVII. pag. 473.

No. LV. duarum linearum se tangentium sit idem qui circulorum ibi eas osculantium. Et in lineis, quas circulus in pluribus punctis potest secare, altiora etiam oscula posse oriri; cum omnes intersectiones in unum coalescunt; atque ita aliquando, in casu maximae vel minimae curvedinis, seu transitus a curvedine crescente ad decrescentem, vel contra, coincidere oscula duo, seu contactus quatuor, intersectiones octo. Observavi etiam postea, centrum circuli curvam propositam osculantis semper cadere in lineam, quae evolutione fili propositam generare potest, & unicam [suae seriei] esse perpendicularem illam, quae ex centro osculantis circuli ad lineam duci possit; sive unicam esse *unicam*, hoc est unicam esse maximam, vel minimam, ex eodem puncto ad curvam educibilem; cum ex aliis punctis intra curvam plures, vel duae saltem perpendiculares, id est, in sua serie maximae vel minimae, seu *duae suae seriei unicae* ad curvam duci possint. Et cum constet aliam atque aliam lineam evolutione describi, prout filum producitur longius; animadverteram olim [ut hoc obiter dicam] eas, quas D. BERNOULLIUS nuper vocavit *condescriptas*, esse *parallelas* inter se; ita ut una sit ab alia ubique aequidistans, [seu aequalis ubique minimi intervalli, quod est recta minima ab una ad aliam ducenda] vel, ut recta perpendicularis ad unam, sit alteri quoque perpendicularis, quae dudum mihi fuit definitio *parallelismi* in genere sumpti. Hanc nostram curvedinis mensuram usumque Evolutarum, etiam primo evolutionum Inventori Celeberrimo HUGENIO placuisse, ex solutione catenariae lineae animadverti. Porro cum tres intersectiones circuli & curvae coincidant, notavi *flexum* oriri *contrarium*, id est, contactum sumptum cum intersectione. Quemadmodum & coincidentes intersectiones quinque dant contactum cum flexu contrario coalescentem, seu intersectionem cum osculo primi gradus; & intersectiones septem coincidentes dant flexum contrarium cum simplici osculo, seu osculum secundi gradus, cum intersectione coalescens. Unde intelligitur, quotcunque intersectiones coincidentes in contactus, oscula, aut flexus contrarios resolvi posse. Et quidem in contactu vero atque osculo, recta, vel circulus, lineam ab utraque parte tangit extrorsum, vel ab utraque parte introrsum; sed in flexu contrario, unam partem tangit extrorsum, alteram introrsum, & ita compositum non tangit, sed secat.

Causam quoque, cur linea evolutione generans locus sit centrorum omnium circulorum lineam propositam osculantium, ita explicare mihi videbar. Sumantur duo puncta curvae A & B, & ducantur rectae ad curvam perpendiculares in A & in B; earum intersectio communis in C dabit centrum circuli, qui radio CA descriptus, tanget curvam in A; radio vero CB descriptus, tanget eam in B: sed si coincidant A & B, sive inassignabiliter distent, hoc est, ubi duae perpendiculares concurrunt; coincidunt duo contactus, duoque circuli tangentes abeunt in unum, qui curvam

curvam osculabitur. Sed per hunc ipsum concursum perpendicularium inassignabiliter differentium inveniuntur & lineæ evolutione generantes, ut ex *Hugeniano* de Pendulis Opere patet. Porro circulus, cujus centrum est in recta arcui ad easdem partes cavo perpendiculariter occurrente, per punctum occursus descriptus, arcum non secat, sed tangit. Itaque sicubi secat, necesse est ibi punctum adesse flexus contrarii, seu non esse lineam ad easdem partes cavam. Recte autem animadvertit D. BERNOULLIUS intersectione simplici ad contactum simplicem, vel ad osculum, seu contactum multiplicem accedente, contactum mutari in sectionem; sed hinc manifestum est, cum circulus curvam osculatur, regulariter [id est excepto flexus contrarii puncto] coincidere quatuor intersectiones, seu duos contactus: adeoque hanc ipsam esse naturam osculi primi gradus; quandoquidem id osculum definimus ordinaria osculatione circulorum, quæ in quocunque curvæ puncto regulariter locum habere potest, seu circulo curvedinem mensurante, qui scilicet proxime ad curvam accedit. No. LV.

Et in universum dici potest, intersectionum circuli cum alia linea numerum regulariter esse parem. Itaque non video quomodo primi gradus osculum tribus intersectionibus explicari queat; ita scilicet, ut tale osculum trium radicum sit regulare & tota curva diffusum; at osculum quatuor radicum, seu quatuor coalescentium intersectionum pro secundo & singulari habeatur, nec nisi in punctis curvæ determinatis contingat. Contra enim se res habet, & quatuor intersectiones, seu duo contactus, osculo cuique regulariter insunt; & in solo casu extremo, qui est flexus contrarii, nascens, ut ita dicam, vel moriens, osculario tribus intersectionibus contenta est. Unde nolui ex casu trium intersectionum peculiarem osculi gradum facere, cum præsertim ex contactu [cujus perfectior species osculum est] in intersectionem degeneraret. Eademque ratione, & in altioribus, osculatio sua natura paris est numeri radicum; nec nisi in flexus contrarii puncto in numerum imparem abit. Et sane, cum circulus post contactum in puncto proposito curvam adhuc in duobus punctis secat, necesse est has intersectiones, promoto circuli centro, continuo ad dictum contactum appropinquantes, tamen ambas simul contactui coalescere; nam cum quamlibet in eum pervenire necesse sit, ideo, si alterutra sola ad contactum perveniente circulus fiat proximus curvæ, seu oscularis, sequitur ambabus intersectionibus separatim pervenientibus ad coalitionem cum contactu proposito, duos dari circulos lineæ proximos, seu osculantes, per idem ejus punctum propositum transeuntes, quod est impossibile. Nisi scilicet linea ibi secet semet ipsam; quo casu duarum vice fungitur, adeoque circuli illi duo revera lineas duas osculantur, licet unius partes; de quo hic non agitur. Facile etiam hinc intelligitur, si circulus post contactum internum secare curvam rursus [utrinque] possit, tunc in casu osculi, [ubi duæ sectiones contactui coalescunt] circulum osculantem esse extra curvam;

&

No. LV. & contra ex contactu externo mox in casu coalescendi cum duabus reliquis sectionibus, fieri osculum internum, & ita transitum circuli, a contactu sectionem adjunctam habente ad osculum, esse transitum in oppositam curvæ partem.

Sed & hoc notandum est, *minimam curvedinem & maximam obtusitatem* esse in puncto flexus contrarii, & recte dixit D. Bernoullius, circulum osculantem eo casu degenerare in rectam, radius enim est infinitus, seu centrum cadit in lineæ evolutæ concursum cum sua asymptoto *. Quoniam antequam duæ proximæ ad curvam perpendiculares hactenus, sibi occurrentes ad plagam propositam, fiant sibi concurrentes ad plagam oppositam, seu ex convergentibus divergentes, debent fieri parallelæ: quo casu eorum concursus infinite abesse debet. Fieri tamen & aliunde potest, ut lineæ generatæ curvedo sit minima, seu maxima obtusitas; non quidem absolute, sed in toto aliquo arcu ad easdem partes cavo, seu in certa progressione. Cum scilicet talis est natura curvæ per sui evolutionem generantis, ut evolutio continuari ultra certum punctum, & filum generans ulterius extendi nequeat; ut contingit cum curva evolvenda ex duabus convexitates sibi obvertentibus ac sese tangentibus composita est. Eodem modo prodibit maxima curvedo, seu minima obtusitas, ut lineæ curvedo ex crescente rursus incipiat fieri decrescens; veluti si curva generanda non intra duos arcus generantes convexitate obversa se tangentes, sed extra earum angulum cadat. Neutro tamen modo generata linea per continuam fili evolutionem producitur.

Hæc autem ut notarem, eo facilius adductus sum, quod linearum naturam in universum illustrant, mihique proferunt non tantum ad finiendam illam celebrem de angulo contactus controversiam, sed & a vaga logomachia ad usus solidos ac profuturos transferendam. Et video nuper Dominum Eisenschmid dissertationem suam contra D. Lagnium defendentem, ac de diametro umbræ in eclipsi Lunæ loquentem, ex hypothesi Terræ ovalis, adhibuisse diametrum circuli, qui ovalem osculatur, seu cum ea angulum osculi [angulorum contactus minimum] facit, atque ita quam proxime ad illam accedit; eo consilio, ut ex diversis proportionibus diametri umbræ ad diametrum Lunæ definiatur vera figura globi Terræ. Quod quantum præstare possit, observationibus committo.

Cum hæc scripsissem, venere in manus meas *Acta Mensis Maii* 1692, in quibus nova quædam *Bernoulliana* † legi, & lineæ illius, cum qua rectæ convergentes ad rectum punctum, eundem constantem angulum [sed obliquum] faciunt, proprietatem elegantissimam ibi detectam, non sine voluptate observavi, aliaque video notata, quæ generalem curvarum naturam

* Vide tamen Num. LXXVI.

† N°. XLIX. pag. 491.

uram illustrant. Plurimum igitur linearum doctrinam hodie promotam habemus, tum explicata flexus natura, tum adhibitis ad earum generationem *provolutionibus*, pariter atque *evolutionibus*. Interiorem naturam *flexus*, seu curvitatis, aperuisse nonnihil visus sum detecta *mensura anguli contactus*, ope scilicet circuli curvam *osculantis*, seu maxime ad eam accedentis, eundemque cum ea in puncto osculi flexum habentis, de quo tum antea, tum etiam hoc loco dictum est. No.LV.

Quod ad *provolutionem* attinet, GALILÆUS, ut arbitror, primus de lineis per eam generatis cogitavit, & simplicissimam ex iis *Cycloeidem*, quam clavus rotæ in plano incedentis describet in aere, considerare cœpit, de qua multa a Viris doctis sunt demonstrata. ROMERUS *Danus*, Astrorum inprimis scientia clarus, cum in Observatorio Regio Parisino versaretur, elegantes, ut audivi, proprietates detexit Cycloeidis altioris, cum rota, scilicet, sive circulus incedit super circulo. De quo tamen ad me nihil pervenit. NEWTONUS nuper de Cycloeidibus iisdem egregia & universalia dedit *.

Evolutionem curvarum generatricem primus illustravit HUGENIUS. Eam cogitationem promovit TSCHIRNHUSIUS, adhibitis [ut ego appellare soleo] *coevolutionibus*, animadversoque quomodo tales lineæ coevolutæ, ut *foci* spectari possint, & radiorum quoque concursu generentur; considerata inprimis caustica, quæ formatur radiis parallelis a speculo reflexis. Ego inde longius progressus sum, usumque reperi ad solvenda Problemata [quorum in gratiam potissimum suscipitur speculatio] *lineasque opticas* inveniendas, quarum ope radii redderentur ad datum punctum convergentes, vel divergentes, aut etiam inter se paralleli. Quod alia etiam ratione præstitere NEWTONUS in *Principiis* †, HUGENIUS in libro *de Lumine* **. Observavi quoque eadem opera dari figuras *Acamptas*, quæ etsi opticæ & politæ sint, radios tamen non reflectunt, & *Aclastas*, quæ licet sint transparentes, seu ex materia radios refringente, vi formæ tamen suæ & positionis ad Solem, radios sine refractione transmittunt. His nunc observationes singulares BERNOULLIUS adjecit. Cæterum ab HUGENIO in tractatu *de Lumine*, & TSCHIRNHUSIO in *Actis*, notatum est, causticam illam, a speculo concavo sphærico radios solares reflectente formatam, simul esse cycloeidalem, provolutione circuli super circulo generatam. Postremo a me nuper proposita est *nova linearum formatio per concursum curvarum ordinatim datarum*, cum antea tantum radiorum seu rectarum concursus adhiberentur; cujus formationis ad Problemata solvenda egregium usum comperi.

* *Princ. Math. Phil. Nat.* Lib. I. Sect. X. Prop. 48. & 49.

† Lib. I. Sect. XIV. Prop. 97. & 98.

** Cap. VI. pag. 101. *seq.*

No. LV. Eximia quædam inesse videntur illis, quæ de figura Veli a vento tensi Clarissimus Bernoullius nuper disseruit *; tametsi de tota re [in qua non desunt scrupuli,] ob molem aliorum negotiorum non expensa, pronunciare non ausim. Ex reperta a me mensuratione *Loxodromiarum* per logarithmos, equidem non parum practici fructus duci potest; difficilem tamen arbitror cursus æstimationem, quæ longitudinibus definiendis sufficiat. Cum de deviatione navis geometrica acribia agitur; non velorum tantum, sed & navis expectanda esset figura. Denique quod innuit, se *Fratrem*que in calculo meo plurimum profecisse; id agnosco, congratulorque non illis magis, quam mihi. Valde autem nosse vellim, an ultra metas illas sunt provecti, ad quas ego perveni; id si ab illis, certe ab eorum ingenio aliquando expecto, & gaudebo plurimum, si intellexero; præsertim cum mihi vix amplius in talibus, ea qua prius intentione animi, versari liceat. Cæterum quoque a me non difficulter solvitur illud Problema: Invenire lineam, cujus arcu æquabiliter crescente, elementa elementorum quæ habent abscissæ sint proportionalia cubis incrementorum, vel elementorum, quæ habent ordinatæ; quod in catenaria seu funiculari succedere verissimum est.

Sed quoniam id jam a Bernoulliis est notatum; adjiciam, si, pro cubis elementorum ordinatarum, adhibeantur quadrata; quæsitam lineam fore logarithmicam. Si vero ipsa simplicia ordinatarum elementa sint proportionalia elementis elementorum, seu differentiis secundis abscissarum; inveni lineam quæsitam esse circulum ipsum.

* N°. XLVIII. pag. 481.

N°. LVI.

N°. L V I.

C U R V Æ
D I A - C A U S T I C Æ.

Earum relatio ad Evolutas, aliaque his affinia. Item Natura osculorum uberius explicata. Celeritates Navium definitæ. Regulæ pro resistentiis, quas Figuræ in fluido motæ patiuntur, &c.

PRomissam Elateris curvaturam jam aliquoties daturus eram, ni supervenientes novæ speculationes alio me rapuissent; fecissentque, ut iis potius calamo committenis inhærerem, quorum idea recentior vividius mentem feriebat, uam quæ obliterata ex animo novum quasi inveniendi laborem eposcebant. Atque hoc ipsum in causa est, cur fidem etiamnum illere cogar, postquam nuperæ de Causticis observatiunculæ liis affinibus inventis ansam præbuere. Cum enim relationem illm simplicissimam inter Evolutas & Causticas per reflexionem uper detexissem, mox attentandum duxi, num similis forte reatio inter Evolutas & *Dia-Causticas* deprehendi possit. Sic autem voco *Causticas per refractionem* natas, reliquis ad distinctioem *Cata-Causticis* dictis, vel etiam *Causticis* simpliciter, ut ætas honor aliquis habeatur, præ novis in Geometria hospitibus. Nam Cata-Causticorum Inventor Nobilis T s c h i r n h a u s i u s lterarum mentionem quidem injecit, tangere vero eas noluit. *Acta Erud. Lipſ. 1693. Jun. p. 244.*

 Solus

No. LV. Eximia quædam inesse videntur illis, quæ de figura Veli a vento tensi Clarissimus BERNOULLIUS nuper disseruit *; tametsi de tota re [in qua non desunt scrupuli,] ob molem aliorum negotiorum non expensa, pronunciare non ausim. Ex reperta a me mensuratione *Loxodromiarum* per logarithmos, equidem non parum practici fructus duci potest; difficilem tamen arbitror cursus æstimationem, quæ longitudinibus definiendis sufficiat. Cum de deviatione navis geometrica acribia agitur; non velorum tantum, sed & navis expectanda esset figura. Denique quod innuit, se *Fratrem*que in calculo meo plurimum profecisse; id agnosco, congratulorque non illis magis, quam mihi. Valde autem nosse vellim, an ultra metas illas sunt provecti, ad quas ego perveni; id si ab illis, certe ab eorum ingenio aliquando expecto, & gaudebo plurimum, si intellexero; præsertim cum mihi vix amplius in talibus, ea qua prius intentione animi, versari liceat. Cæterum quoque a me non difficulter solvitur illud Problema: Invenire lineam, cujus arcu æquabiliter crescente, elementa elementorum quæ habent abscissæ sint proportionalia cubis incrementorum, vel elementorum, quæ habent ordinatæ; quod in catenaria seu funiculari succedere verissimum est.

Sed quoniam id jam a BERNOULLIIS est notatum; adjiciam, si, pro cubis elementorum ordinatarum, adhibeantur quadrata; quæsitam lineam fore logarithmicam. Si vero ipsa simplicia ordinatarum elementa sint proportionalia elementis elementorum, seu differentiis secundis abscissarum; inveni lineam quæsitam esse circulum ipsum.

* N°. XLVIII. pag. 481.

N°. LVI.

N°. LVI.

CURVÆ DIA-CAUSTICÆ.

Earum relatio ad Evolutas, aliaque his affinia. Item Natura osculorum uberius explicata. Celeritates Navium definitæ. Regulæ pro resistentiis, quas Figuræ in fluido motæ patiuntur, &c.

I. PRomissam Elateris curvaturam jam aliquoties daturus eram, ni supervenientes novæ speculationes alio me rapuissent; fecissentque, ut iis potius calamo committendis inhærerem, quorum idea recentior vividius mentem feriebat, quam quæ obliterata ex animo novum quasi inveniendi laborem deposcebant. Atque hoc ipsum in causa est, cur fidem etiamnum fallere cogar, postquam nuperæ de Causticis observatiunculæ aliis affinibus inventis ansam præbuere. Cum enim relationem illam simplicissimam inter Evolutas & Causticas per reflexionem nuper detexissem, mox attentandum duxi, num similis forte relatio inter Evolutas & *Dia-Causticas* deprehendi possit. Sic autem voco *Causticas per refractionem* natas, reliquis ad distinctionem *Cata-Causticis* dictis, vel etiam *Causticis* simpliciter, ut ætatis honor aliquis habeatur, præ novis in Geometria hospitibus. Nam Cata-Causticorum Inventor Nobilis TSCHIRNHAUSIUS alterarum mentionem quidem injecit, tangere vero eas noluit. *Acta Erud. Lips. 1693. Jun. p. 244.*

No. LV. Eximia quædam inesse videntur illis, quæ de figura Veli a vento tensi Clarissimus BERNOULLIUS nuper disseruit *; tametsi de tota re [in qua non desunt scrupuli,] ob molem aliorum negotiorum non expensa, pronunciare non ausim. Ex reperta a me mensuratione *Loxodromiarum* per logarithmos, equidem non parum practici fructus duci potest; difficilem tamen arbitror cursus æstimationem, quæ longitudinibus definiendis sufficiat. Cum de deviatione navis geometrica acribia agitur; non velorum tantum, sed & navis expectanda esset figura. Denique quod innuit, se *Fratrem*que in calculo meo plurimum profecisse; id agnosco, congratulorque non illis magis, quam mihi. Valde autem nosse velim, an ultra metas illas sunt provecti, ad quas ego perveni; id si ab illis, certe ab eorum ingenio aliquando expecto, & gaudebo plurimum, si intellexero; præsertim cum mihi vix amplius in talibus, ea qua prius intentione animi, versari liceat. Cæterum quoque a me non difficulter solvitur illud Problema: Invenire lineam, cujus arcu æquabiliter crescente, elementa elementorum quæ habent abscissæ sint proportionalia cubis incrementorum, vel elementorum, quæ habent ordinatæ; quod in catenaria seu funiculari succedere verissimum est.

Sed quoniam id jam a BERNOULLIIS est notatum; adjiciam, si, pro cubis elementorum ordinatarum, adhibeantur quadrata; quæsitam lineam fore logarithmicam. Si vero ipsa simplicia ordinatarum elementa sint proportionalia elementis elementorum, seu differentiis secundis abscissarum; inveni lineam quæsitam esse circulum ipsum.

* N°. XLVIII. pag. 481.

N°. LVI.

CURVÆ DIA-CAUSTICÆ.

Earum relatio ad Evolutas, aliaque his affinia. Item Natura osculorum uberius explicata. Celeritates Navium definitæ. Regulæ pro resistentiis, quas Figuræ in fluido motæ patiuntur, &c.

I. PRomissam Elateris curvaturam jam aliquoties daturus eram, ni supervenientes novæ speculationes alio me rapuissent; fecissentque, ut iis potius calamo committendis inhærerem, quorum idea recentior vividius mentem feriebat, quam quæ obliterata ex animo novum quasi inveniendi laborem deposcebant. Atque hoc ipsum in causa est, cur fidem etiamnum fallere cogar, postquam nuperæ de Causticis observatiunculæ aliis affinibus inventis ansam præbuere. Cum enim relationem illam simplicissimam inter Evolutas & Causticas per reflexionem nuper detexissem, mox attentandum duxi, num similis forte relatio inter Evolutas & *Dia-Causticas* deprehendi possit. Sic autem voco *Causticas per refractionem* natas, reliquis ad distinctionem *Cata-Causticis* dictis, vel etiam *Causticis* simpliciter, ut ætatis honor aliquis habeatur, præ novis in Geometria hospitibus. Nam Cata-Causticorum Inventor Nobilis TSCHIRNHAUSIUS alterarum mentionem quidem injecit, tangere vero eas noluit. *Acta Erud. Lipf. 1693. Jun. p. 244.*

 Solus

N°. LVI. Solus HUGENIUS in tractatu *De lumine* * schema nobis sistit integræ Dia-Causticæ; sed circularis tantum, & per radios incidentes parallelos genitæ. Generalem vero Dia-Causticarum considerationem, earumque ad Evolutas relationem, primus, ni fallor, ego aggressus sum, nec irrito spero successu, ut ex sequenti constructione liquebit.

Sit punctum radians A, Curva quævis Exposita DHM, seu convexa versus A [ut in 1ª *figura*] seu concava [ut in 2ª,] recta HB curvæ perpendicularis, B punctum in Evoluta ejus, AH radius incidens, HI refractus accedens ad perpendicularem in 1ª, & recedens ab eadem in 2ª figura. Quo posito, ducantur ex puncto Evolutæ B in radium incidentem & refractum perpendiculares rectæ refractionem metientes BC, BE & angulo quem comprehendunt EBC, æqualis statuatur HBF, ad partes quas schema monstrat, sumptaque HG tertia proportionali ad AH & HC; fiat, ut FG ad FC, sic HE ad HI. Dico punctum repertum I fore in Dia-Caustica ex A: unde haud difficulter patet regressus a data Dia-Caustica ad punctum radians, vel ab utroque dato ad Evolutæ puncta invenienda (ª).

Casuum

* Cap. VI. pag. 119. *seq.*

(ª) Constructionis hujus analysin, qualem dedit Auctor, Vide N°. CIII. Art. 17. Vide etiam HOSPITALIUM *An. des inf. pet.* §. 133. En synthesin. Sit A punctum radians [*Fig.* 1. & 2.], AH, A*b* radii incidentes, HI, *b*I refracti, vicinissimi, HB radius osculi. Demissæ normales BC in radium incidentem AHC, & BE in refractum HEI, sunt sinus ang. incidentiæ AHK vel BHC, & refractionis BHI: ideoque sunt in ratione data, ut & B*c*, B*e* [quæ censeri possunt normales radiis, A*b* incidenti, *b*I refracto] nec non earum differentiæ C*c*, E*e*. Hæcque ratio rectarum BC, BE, eadem est tum ratione rectarum FC, HE, propter similitudinem Triang. BFC, BHE, deductam ex æqualitate angul. EBC, HBF, aut potius EBH, CBF. Igitur C*c* : E*e* = FC : HE. Centris A & I describantur per *b* arcus *ba*, *bi* qui constituunt Triang. H*ba*, H*bi* simila Triang. HBC, HBE, unde est *bi* : *ba* = HE : HC. Quæro rationem $\frac{HI}{EI}$; hæc $= \frac{bi}{Ee} = \frac{bi}{ba} \left[\frac{HE}{HC}\right] \times \frac{ba}{Cc} \left[\frac{AH}{AC}\right] \times \frac{Cc}{Ee} \left[\frac{FC}{HE}\right] = \frac{FC}{HC} \times AH$

Casuum vero particularium determinationes sequentes hinc eli- No. LVI.
imus.

1. Si curva versus punctum radians sit convexa & refractio at a perpendiculari, aut si illa sit concava & hæc fiat ad perpendicularem; radii refracti contigui perpetuo divergunt (b).

2. Si curva versus punctum radians sit convexa, & refractio at ad perpendicularem; aut si illa sit concava & refracta fiat a erpendiculari, radii refracti modo convergunt, modo divergunt, nodo paralleli sunt: Convergunt, cum HG ⊲ HF: divergunt ibi ⊳: & paralleli sunt cum ═. Sed constructio etiam in casu divergentium locum habet, nisi quod tunc recta HI in radio efracto retrorsum producto abscindenda (c).

3. Si punctum A radiet ex infinita distantia, evanescente HG, iet FH : FC ═ HE : HI (d).

4. Si radius curvæ perpendicularis manet ex infinito interval-

 lo,

$< \frac{AH}{AC}$ sive $\frac{HC}{GC}$ [nam, cum sit HG ertia proportionalis ad AH, HC, erit componendo AH : AC ═ HC : GC]. Igitur $\frac{HI}{EI}$ $[\frac{bi}{Ee}]$ ═ $\frac{FC}{GC}$; vel, convertendo HI : HE ═ FC : FG, quemadmodum habet Auctor.

(b) Nam in *Fig.* 1. si refractio fieret a perpendiculari, esset BE ⊳ BC, & B*e* ⊳ B*c*, ideoque E*e* ⊳ C*c* ⊳ *ha*. Sed *ha* ⊳ *hi*, [nam *ha* : *hi* ═ HC : HE, &, ubi refractio fit a perpendiculo, HC ⊳ HE]. Ergo E*e* ⊳ *bi*. Radii igitur divergerent.

In *Fig.* 2. si refractio fieret ad perpend. esset BE ⊲ BC, & B*e* ⊲ B*c*, ideoque E*e* ⊲ C*c* ⊲ *ba* ⊲ *bi* [ob HC ⊲ HE]. Igitur radii divergerent.

(c). In *Fig.* 1. Si HG ⊲ HF, est CG ⊲ CF. Ergo E*e* ⊲ *bi* [propter *bi* : E*e* ═ CF : CG. Vide Not. *a*]. Ergo radii convergunt. Si HG ⊳ HF, est quoque CG ⊳ CF, & E*e* ⊳ *bi*. Divergunt igitur radii. Si HG ═ HF est etiam CG ═ CF, & E*e* ═ *bi*, ac radii sunt paralleli.

In 2. *Fig.* Si HG ⊲ HF, est CG ⊳ CF; atque ideo E*e* ⊳ *bi*, unde sequitur radios esse convergentes. Si HG ⊳ HF, est CG ⊲ CF & E*e* ⊲ *bi*, ac radii divergunt. Sed HG ═ HF dat CG ═ CF, E*e* ═ *bi*, & radios parallelos.

(d) Nam, posita AH infinities majore quam HC, erit HG eadem HC infinities minor, adeoque nulla. FG igitur abit in FH, & analogia FG : FC ═ HE : HI, mutatur in FH : FC ═ HE : HI.

No. LVI. lo, erunt distantiæ puncti quæsiti a punctis H & B, ut recta refractionem metientes BC, BE. Sin procedat ex intervallo finito, erunt dictæ distantiæ ut recta BC, & quarta proportionalis ad distantiam puncti radiantis A a punctis H & B ac rectam BE. (e)

5. Si radius, seu ex finita, seu infinita distantia procedens, tangat curvam, & refringatur ad perpendicularem, evanescentibus HC & HG, coincidet CB cum HB, fietque HI = EH.

6. Si radius, seu ex finito, seu infinito intervallo profectus, ea obliquitate curvæ incidat, ut ejus refractus a perpendiculari recedens curvam tangat, coincidet punctum Dia-Causticæ I cum puncto incidentiæ H. (f)

Consectaria & Scholia principaliora his adnectimus.

α. Si Curva exposita DHM est geometrica, ejus Dia-Caustica ex quovis dato puncto, quoque talis erit.

β. Quia Evoluta tota circuli in unum punctum concentratur, hinc Dia-Caustica *Hugeniana*, & eadem opera omnes aliæ, quæ ex puncto distantiæ finitæ generantur, quam facillime determinantur. Schema *Hugeniana* ex radiis parallelis ad perpendicularem refractis *figuræ* 3[æ] pars sinistra, ex radiis a perpendiculari refractis, pars dextra refert.

γ. Patet vero etiam, quod omnia, quæ BAROWIUS tam operose

(e) Sint AH, A*h* [Fig. A] radii manantes ex A, quorum ille perpendicularis ad Curvam, irrefractus transeat in HI, iste refrangatur in *h*I. Erit HI : BI = H*h* : BE = H*h*×BC : BC×BE = AH×BC : AB×BE = BC : $\frac{AB\times BE}{AH}$.

Quod si A infinite distet, AH & AB censentur æquales, & est HI : BI = BC : BE.

(f) Tunc enim coincidunt BE & BH, evanescitque angulus EBH nec non ipsi æqualis CBF; coincidunt ergo puncta E & H, nec non C & F. Evanescunt igitur CF, & HE. Quamobrem evanescit HI quæ est ad evanescentem HE, ut evanescens FC, ad finitam aut infinitam FG.

operose struxit ad determinandum locum Imaginis puncti radiantis, e peracta ad superficiem circularem refractione vel reflexione, specialissima duntaxat Corollaria sint generalis nostræ relationis Causticarum & Dia-Causticarum ad Evolutas: Quandoquidem ipsi *Imaginis* nomine nihil aliud venit quam radiorum reflexorum aut refractorum concursus. Qua occasione monemus, illa quæ jam de officio trium Linearum *Anti-Caustica*, *Peri-Caustica* & *Ant-Evoluta* diximus, * ne sinistræ acceptioni ansam præbeant, sic explicanda esse, ut intelligantur de radiis ad rectam RH [Vide *Tab.* XIX. *Fig.* 1] expositam Curvam in puncto incidentiæ H tangentem, non vero ad ipsam expositam DHM relatis: Sic enim utique limitandum fuisse constat; cum alias si ad curvam referantur radii, ipsorum punctorum A & I alterum alterius, & punctum B sui ipsius sit imago, per hypothesin: minime vero puncta *a*, *i*, & *b*. No. LVI.

δ. Quoniam Ellipseos Dia-Caustica ex radiis axi AC parallelis [*Fig.* 4.] tota cogitur in unum punctum, focorum nempe alterum, sicubi refractiones fiunt secundum rationem axis AC, ad focorum distantiam DE (g), hinc expedita constat ratio inveniendi puncta quotlibet Evolutæ ejus hoc pacto: Sumpto quovis in Ellipsi puncto B, & bisecto angulo DBE per rectam BI, quæ axem secet in L, demittatur in axem perpendicularis BF, fiatque ut DE ad AC, sic BL ad BG; ac tum denique, ut GF ad GL, sic BI [quam videlicet abscindit recta EI ipsi BE perpendicularis] ad quartam BH, erit punctum H in Evoluta Ellipseos (h). At idem elegantius obtinetur per relationem Cata-Causticæ

* Supra N°. XLIX. pag. 492. sub finem.

(g) Ex demonstr. CARTESII *Dioptr.* Cap. 8. Art. 3. Sit enim KB radius incidens axi AC parallelus, BE refractus, LB*l* ad Ellipsim perpendicularis, angulum DBE, ut notum est, bisecans: & erit KB*l* [BLD] ang. incidentiæ, & LBE ang. refractionis. Ergo ratio refractionis est ea quæ sinus ang. BLD ad sinum ang. LBE = BE : LE = BD: DL [EUCL. VI. 3.] = EBD seu AC : DE.

(h) Demitte ex H in radios KBM incidentem, & BNE refractum, normales HM, HN, quæ rationem refractionis metientur, eruntque

No. LVI. Causticæ ad Evolutam, quandoquidem utervis Ellipseos focus respectu radiorum ex altero egressorum etiam Cata-Causticæ munere fungitur: hunc enim in finem quærenda tantum quarta proportionalis ad $\frac{1}{2}$ AC, BD & BI, ad obtinendam statim optatam BH ([i]): quas constructiones Illustris HUGENIUS cum sua quam dedit *Propositione* X. *parte* 3. *Horol. Oscillat.* conferre poterit.

ε. *Spira mirabilis*, singulari privilegio non competenti Cycloidibus, sui ipsius quoque Dia-Caustica est ex umbilico, productis videlicet retrorsum radiis, seu a perpendiculari, seu ad perpendicularem refractis, utpote qui antrorsum divergunt. Inveniuntur autem ejus puncta, demissa perpendiculari ex puncto Evolutæ B [vide dictam *Fig.* 1. *Tab.* XIX.] in radium refractum incidentis AH: intersectionis enim locus erit Dia-Caustica expositæ spiralis DHM, eademque numero cum illa ([l]).

ζ. Rectif

que ideo inter se, ut AC, DE. Age HK, quæ cum HB capiat ang. BHK = NHM, aut cum MH, ang. MHK = NHB, sic ut similia fiant Tr. MHK, NHB, atque ideo HK : HB = HM : HN. Et quoniam est [ex constr.] BG : B[illegible] = AC : DE = HM : HN = HK : HB, similia erunt Tri. BLG, HBK, atque BG parallela est HK, quo ipso similia quoque sunt Tr. rectangula BFG, HMK. Ergo KM in B, & GF in L, similiter dividuntur, estque KB : KM = GL : GF = [ex constr.] BH : BI = BN : BE. Ergo KB : KM = BN : BE, prorsus ut requirit Art. 3. supra pag. 551.

(i) Sit EB radius incidens, BD reflexum & per Theor. de Cata-Causticis demonstr. N°. XLIX. pag. 493. est 2BI — BH : BH = EB : BD, *componendo*, 2BI : BH = EBD : BD, vel $\frac{1}{2}$ EBD [$\frac{1}{2}$ AC] : BD = BI : BH.

(l) Sit [*Fig.* B] KH spira mirabilis, AH radius ex umbilico incidens, Hi refractus retroproductus in HI; HB, radius evolutæ; BC, eadem cum BA, sinus incid. & BE, sinus refract. quippe normales ad AH, HI. Quia C & A coincidunt, coincidet quoque G cum illis, sunt nimirum HG tertia proportionalis ad HA, HC. Age BF quæ cum BE capiat ang. HBF = EBC, & erit per Theor. pag. 550. FG : FC = HE : HI. Quoniam igitur, FG = FC, erit quoque HE = HI; hoc est, punctum E, in quod cadit Bi normalis demissa ex umbilico, est ad Dia-Causticam. Ducatur AE, & quia datur ang. incid. AHB, datur quoque ang. refr. AHE; datur que eorum summa BHE. Datur etiam rectus BEH. Quare datur specie Triang.

ζ. *Rectificationem* Dia-Causticarum quod spectat, ea sic habet: No.LVI.
Ducto radio incidenti AH, & alio AD, qui tangat expositam, [*Vide partem sinistram Fig.* 3.] vel alio AL, cujus refractus eam tangat, [*vide partem dextram*,] Si super puncto radiante A radio AH describatur arcus circuli HM [qui in casu infinitæ distantiæ puncti A in rectam abit perpendicularem radiis,] erit [*in parte sinistra*] curva LI, una cum adsumpta recta DL, quæ, per casum articuli quinti determinatur, æqualis differentiæ radii refracti HI, & alicujus rectæ, ad quam DM est in ratione quæ refractiones metitur; [*in parte* vero *dextra*] curva LI sola, æquatur aggregato radii HI, & ejus rectæ, ad quam LM dictam rationem habet. (m).

n. Hinc vero novæ oriuntur constructiones curvarum per Dia-Causticas, quales Dominus de *Tschirnaus* mediantibus Causticis formandas exhibet: Exempli gratia, Si describenda sit [*Fig.* 3.] Ellipsis PRS ad datos semi-axes PQ, QS, producatur SQ ad B, donec fiat BS = PQ, tum centro B radio BS describatur quadrans DHS, cujus Dia-Caustica ex radiis ipsi BS parallelis sit LIN, posita refractionis mensura ea quæ per rectas BS, BQ, expri-

Triang. BHE; daturque ratio BH : HE. Sed datur etiam ratio AH : BH. Data est igitur ratio AH: HE. Quamobrem radio AH, sub dato angulo AHE, adjungitur recta HE, cum ipso datam rationem habens. Ergo, per Cor. I. Prop. III. pag. 498, Dia-Caustica Ee est Spira eadem cum exposita *h*H.

(m) Est enim [Vid. *Fig.* 1. 2. & Not. (*a*)] propter similia Triang. H*ba*, HBC, & H*bi*, HBE; H*a* : H*i* = BC : BE = *i* : *r*, id est in ea ratione quæ metitur refractionem. Ergo summa omnium H*a*, ad summam omnium H*i*, in eadem ratione *i* : *r*. Est autem, *Fig.* 3 *parte sinistra*, summa omnium H*a* = AD — AH = DM, summa autem omnium H*i* = HI — DLI. Quare DM : HI — DLI = *i* : *r*. Ergo HI — DLI = $\frac{r}{i}$ DM, & DLI = HI — $\frac{r}{i}$ DM. At, *in ejusdem fig. parte dextra*, summa omn. H*a* = AH — AL = LM; & summa omn. H*i* = LI — HI: unde est LM : LI — HI = *i* : *r*, ac LI — HI = $\frac{r}{i}$ LM, ac LI = HI + $\frac{r}{i}$ LM.

No. LVI. exprimitur; dico, si curvæ NIL, ope styli ambulantis super quadrante SHD, ita circumvolvatur filum NIHR = NS, ut pars ejus extra quadrantem prominens HR parallela statuatur radio BS, descriptum iri extremitate R optatam Ellipsin PRS (ⁿ).

θ. Patet ex hactenus dictis, quod data curva Exposita, & una harum, vel Evoluta, vel Caustica, vel Dia-Caustica, cæteræ quoque ex iis inveniri possint: sed & quod mirabilius nonnullis fortasse videbitur, data Exposita & una reliquarum trium, possunt exponi aliæ quarum hæc sit altera quævis ex illis tribus omnifariam acceptis, eæque semper infinitæ; ut enim Curva quælibet infinitarum curvarum Evoluta, & sic infinitarum Caustica, vel Dia-Caustica esse potest: Nempe

a. Data *Curva* AB, [*Fig.* 5.] ejusque *Evoluta* CD, reperienda est alia, cujus ista CD sit *Caustica* ex dato puncto E, quod sic peragitur: Sumpto quovis Curvæ puncto B, junctaque EB, excitentur duæ perpendiculares, una FG ad rectam EB ex puncto ejus medio, altera BD ad ipsam curvam AB, erit punctum intersectionis harum G in curva, cujus Caustica ex puncto E est curva CD (°). Liquet autem, si loco Expositæ AB sumatur quævis ejus *Condescripta*, totidem inde diversas Curvas proditura

(ⁿ) Nam quia semper DLI = HI − r DM : i aut [cum sit BQ : BS = r : i] DLI = HI − BQ × DM : BS, erit etiam DLIN = SN − BQ × BS : BS = SN − BQ, ideoque IN = DLIN − DLI = SN − BQ − HI + BQ × DM : BS. Præterea [ex constr.] NIHR = NS. Ergo HR = NIHR − NI − IH = NS − NS + BQ + HI − BQ × DM : BS − HI = BQ − BQ × DM : BS & RK = RH + HE − EK = HR + DM − BQ = BQ − BQ × DM : BS + DM − BQ = DM − BQ × DM : BS = QS × DM : BS = QS × HE : BS. Igitur ordinatæ RK curvæ SRP ad ordinatas HE circuli DHS datam habent rationem BS : QS. Est ideo SRP ellipsis.

(°) Causticarum proprietas est, [vid. N°. XLIX. pag. 493. lin. 2. seq.] quod aggregatum radii incidentis & reflexi sit causticæ æqualis, vel eadem minus majusve constante longitudine. Atqui, ducta EG, quæ est = BG, patet esse EG + GD = BG + GD = BD, radio evolutæ curvæ AB = causticæ CD, vel eadem majus minusve data longitudine. Quare punctum G est ad curvam optatam.

turas esse, quarum omnium communis caustica ex puncto E est No. LVI.
curva CD, sicut eadem omnium *Condescriptarum* communis Evoluta existit. Sin punctum E radiet ex infinita distantia per rectas EB parallelas [quo casu præcedens constructio non habet locum] ducatur GH illis utcunque perpendicularis [*Fig.* 6] & in protracta DB capiatur BF = BL, junctæque FL agatur parallela BH, ut & HI ipsi LB, erit punctum I in curva, cujus Caustica est CD (p).

b. Data deinde *Curva* AB [*Fig.* 7.] ejusque *Evoluta* CD, exponi debeat alia FG, cujus illa CD sit *Dia-Caustica* ex dato puncto E, cujusque vertex sit datum punctum F; hoc ita fit: Descriptis, centro E, radio EF seu EH, & alio utcunque majori EG circulis FH, GI; fiat, ut sinus anguli incidentis ad sinum anguli refracti, sic HG ad quartam FL, tum convoluto filo FD circa curvam DC, describat punctum ejus L lineam LG secantem circulum IG in G, erit hoc unum ex punctis curvæ, cujus Dia-Caustica ex E est illa CD (q). Si vero cuipiam constructio hæc non satis geometrica videatur; sciat in promptu mihi esse aliam, qua idem consequor, utendo tantum circulis & lineis rectis: sic ut nec convolutione fili, nec ipsa curva CD indigeam; dummodo concedatur, ex quovis puncto curvæ AB perpendicularem ei duci posse; quod utique hic & ubique supponendum (r).

(p) Nam, ob BF = BL, & BH parallelam ipsi FL, est BI = HI. Quare HID = BID = causticæ CD, vel ea majus minusve data longitudine. Ergo punctum I est ad Curvam quæsitam.

(q) Debet enim esse, si sit G punctum curvæ optatæ [per Art. ζ. pag. 555] $FLD = GCD + \frac{r}{i} HG$. Sed est $FL = \frac{r}{i} HG$, & $LD = GCD$. Quare $FLD = GCD + \frac{r}{i} HG$.

(r) Constructio, quam celat Auctor, non multum forte differt ab ista. Producatur CZ, ad curvam AB normalis, donec sit $ZK = AF + \frac{r}{i} EF$, & agatur recta EK, quam [si necesse est productam] secabit in M circulus, centro Z, radio ZM, qui sit ad ZK ut *i* ad *r*, descriptus: Den

No. LVI. Nota, si AB sit Circulus, & CD punctum, prodibunt Ovales illæ *Cartesianæ* tantopere celebratæ Geometris; quarum proinde inventio generalioris hujus constructionis tantum casus simplicior existit.

c. *Exposita* porro BC [*Fig.* 8.] ejusque *Caustica* DE ex puncto A, invenire lubeat aliam, cujus *Evoluta* sit DE. Ad hoc efficiendum quæratur tantum ejus Anti-Caustica, abscindendo ex protracta EC ipsam CF = CA, vel saltem eadem majorem minoremve constante longitudine (f). Quod si vero quærenda sit alia, cujus DE sit *Dia-Caustica*, quæratur primum aliqua, cujus illa DE sit Evoluta & tum per §. *b.* &c.

d. Data denique *Exposita* FG [*Fig.* 7.] ejusque *Dia-Caustica* CD ex puncto E, præstitutum sit invenire aliam AB, cujus ipsa

Denique rectæ ZM parallela EG designabit in EZ punctum G, quod est ad curvam optatam.

Nam $i:r = ZM : ZK = GE : GK$ [ob GE, ZM parallelas]. Ergo $GK = \frac{r}{i} GE$. Et $GZ [= ZK - GK] = AF + \frac{r}{i} EF - \frac{r}{i} EG = AF - \frac{r}{i} HG$. Ergo GCD [= GZ + ZCD = GZ + AD; est enim ZCD = AD, cum sit AZ evoluta ipsius CD] $= AF - \frac{r}{i} HG + AD = FD - \frac{r}{i} HG$: ac denique $FD = GCD + \frac{r}{i} HG$. Est igitur punctum G ad curvam, cujus CD Dia-caustica est ex puncto E, cujusque vertex in F.

Quod si punctum radians infinite distet, paululum varianda constructio. Ducta utcunque HL [*Fig.* 6] ad radios incidentes perpendicularis, producatur DB ad AB normalis donec BF sit $= \frac{r}{i} BL$; agatur LF & ipsi parallela BH, atque HI parallela ipsi BL, designabit in recta BD punctum I ad curvam optatam.

Nam, ob similia triangula BLF, IBH, & quoniam est $BF = \frac{r}{i} BL$ erit etiam $BI = \frac{r}{i} HI$. Sed BID = curvæ CD. Ergo curva CD æqualis aggregato radii ID, & rectæ BI vel $\frac{r}{i}$HI. Ergo, per Art. ζ, punctum I est ad curvam, cujus CD Dia-caustica est radiorum incidentium qui sunt ipsi HI paralleli.

(f). Vide Num. XLIX, pag. 492.

psa CD sit *Evoluta*: Ducta ex E ad Expositam quavis recta EG No. LVI.
e abscissa EH = EF distantiæ puncti E a vertice Expositæ, iat, ut sinus anguli incidentis ad sinum anguli refracti, sic GH d FL, ipsique AL [sumpto A vertice optatæ ubivis in recta F] in radio refracto æqualis abscindatur GZ, erit Z punctum a optata (t). Sin alia desideretur, cujus *Caustica* sit ipsa CD uæratur primum illa cujus est *Evoluta*, & tunc per §. *a*. &c.

Habet itaque Lector, in hac & illa Anni 1692 * lucubratiunula, in compendio fere quicquid de *Evolutis*, *Causticis*, & *Dia-causticis*, per mutuam ipsarum comparationem & relationem ad e invicem cognosci potest. Cui si artificium [nobis Fratribus, t credo, peculiare hactenus] adjungere voluissem, quo *Centra irculorum osculantium*, seu *Evoluta puncta*, ex natura *Exposita* nica & simplici proportione inveniri possunt (u), agnosceret uto, colophonem quodammodo huic materiæ impositum esse, ihilque in ea jure amplius desiderari posse. Spero autem, & in is quæ publicavi, nonnulla tam nova tamque singularia contiieri, ut si fontem, unde manant, studiosius tegere voluissem, nerito omnibus Geometris admirationi esse potuissent.

II. Cum hæc scriberem, incidebant in manus *Acta* mensis Septembris anni 1692 eaque quæ Celeberrimus Dominus LEIBNITIUS his præsertim, quæ de *Curvarum osculis*, mense Martio publicaveram, erudite opposuit †. Quibus sane perlectis non oteram non & gaudere, quod mea qualiacunque examine suo igna æstimarit, & meam simul dolere incuriam, quæ verba ita

 obscu-

(t) Nam AD=FD—FL—LA. ed FD [ex natura Dia-Causticæ G] $= \frac{r}{i}$ HG + GCD & FL [per onstr.] $= \frac{r}{i}$ HG, ac LA = GZ. rgo AD $= \frac{r}{i}$ HG + GCD $- \frac{r}{i}$ HG — GZ = ZCD. Igitur filo AD convoluto circa curvam DC, describet punctum ejus A curvam AZ.

* N°. XLIX. pag. 491.

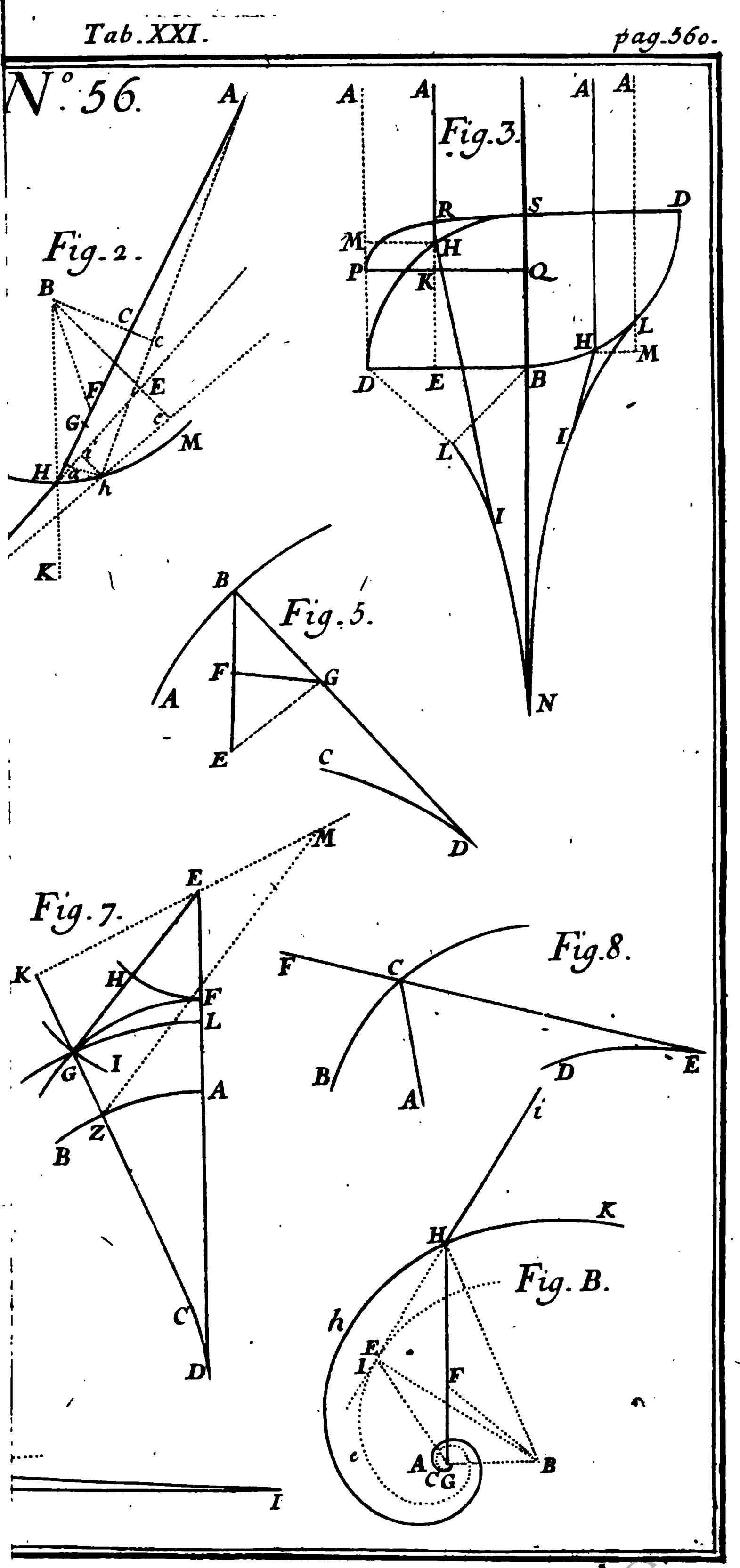
(u) Vid. Num. LVIII.

† N°. præced.

No. LVI. obscure concepta reliquit, ut Viro perspicacissimo non omnem scrupulum eximere valuerint: quapropter ut quod ibi neglectum resarciam, ac rem in majore luce constituam, necessum duco paucas hic lineas annectere, quas Benevolus Lector *Schediasmati* mensis Martii per modum *Addendorum* haud gravate subjungat.

Exemplum communis Parabolæ & ejus Curvæ, cujus Evolutione describitur, totum negotium explanabit: Conceditur mihi, quod si super quovis puncto intermedio posterioris tanquam centro, longitudine fili evolventis ceu radio, circulus describatur, is ipse futurus sit, qui curvam parabolicam osculari dicitur; sed & pro concesso assumo [quis enim post levissimam attentionem hoc inficiabitur?] circulum huncce Parabolam præter punctum osculi necessario in alio aliquo puncto secaturum, imo vero in duobus, sicubi illam in puncto osculi tangere, non secare censendus esset; [utut id veritati adversum jam supra pagina 115 lin. 11 * exerte demonstravi:] unde si osculum illud per duos contactus, seu quatuor intersectiones coincidentes interpretandum sit, quid obsecro manifestius, quam secuturum hinc fore, ut unus idemque circulus Parabolam in 5, imo 6 punctis secare possit? Quæ in Conicis omni ævo inaudita res fuit. At inquis, annon centrum circuli osculatoris considerari solet ceu concursus duarum rectarum Parabolæ perpendicularium, super quo descripti his radiis circuli curvam tangant, adeo ut in casu indistantiæ perpendicularium efficiatur *concursus duorum contactuum*? Utique; sed & hoc præoccupavi pagina 116. † Osculum simplex spectari revera potest, ut concursus duorum contactuum; at contactuum factorum non ab *uno eodemque circulo*, sed *duobus circulis diversis & inæqualibus* concentricis: quo quidem sensu illud eodem jure considerare possemus ceu concursum decem, centum, pluriumve contactuum factorum a totidem circulis excentricis, prout videli-

* Supra pag. 478. lin. quinque ultimis.
† Supra pag. 480.


N°. 56.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. B.

delicet plures, pluresve conciperentur perpendiculares, quarum qualibet foret radius alicujus circuli tangentis, quæque omnes ad indistantiam usque sibi approximari intelligerentur. Verum enim vero ejusmodi consideratio ad propositum nostrum, ubi agitur de numero concurrentium intersectionum unius ejusdemque circuli, prorsus inutilis. Instas porro, si circulus præter contactum curvam adhuc in duobus hinc inde punctis secet, necesse erit, ut hæ intersectiones promoto circuli centro tandem ambæ simul contactui coalescant, aut si separatim id fiat, ut duo dentur circuli curvam in eodem puncto osculantes, quod impossibile. Resp. si ambæ intersectiones simul contactui coalescunt, oritur osculum, non primi, sed secundi gradus; & si una seorsim, cogitandum [ut monui pagina 112 *] illam subinde ex contactu emersuram, & oppositas curvæ partes perambulaturam, donec alteri in alio aliquo curvæ puncto obviam facta, cum illa novum ibi contactum celebret, post quem alteri huic intersectioni ad priorem contactum non propius accedere, nedum ipsi uniri licet. Tandem vero nec hoc prætereundum: si suppositio trium tantum radicum æqualium, seu trium intersectionum coincidentium, pro osculo simplici inveniendo sit erronea dicenda; quæro cur calculus pagina 114 ** in illa fundatus nihilominus ad legitimam solutionem perducat? Ostendendum itaque esset, hoc vel casu tantum accidisse, vel idem saltem quoque succedere, supponendo quatuor radices æquales; quod nescio an quisquam præstabit. N. LVI.

Cæterum Celeberrimus LEIBNITIUS peregregie observavit Circulum, nempe osculatorem, curvedinis mensuram esse, & mihi quoque innotuerat, postquam animadvertissem curvedines radiis horum circulorum reciproce proportionales existere.

III. Pergit post hæc Acutissimus Geometra ad ea, quæ mense Maio

* Supra pag. 475. ** pag. 477. 478.

No. LVI. Maio * de *Curvatura Veli* differueram ; & nonnulla haud vulgaria in iis quidem latere suspicatur ; de tota tamen re [in qua sibi non deesse scrupulos affirmat] nil definit. Optassem vero ego quam maxime, ut dubitandi rationes nobis exposuisset. Quippe nec *Frater* meus, qui dum adhuc Parisiis versaretur Problema plene absolvit, detecto quod me ad æquationem $adsddx = dy^3$. [suppositis elementis curvæ ds æqualibus] perduxerat artificio ; nec ipse Illustris HOSPITALIUS, quicum ille inventum communicaverat, quicquam in eo fallaciæ deprehenderunt. Ego sane, præter anomaliam illam quam causatur fluidi supra veli sinum exundantis portio, quamque articulo 25 tetigi **, nihil in toto negotio reperio difficultatis ; adeo quidem, ut nihil præter hoc deesse nobis videatur, quin naturam pressionis fluidorum plene perspectam habeamus, indeque mechanicam horum non minus, ac solidorum, absolutam & perfectam aliquando expectare possimus. Fateor in meis positionibus nonnulla reperiri, [sed fundamentum calculi non concernentia,] quæ paulo enucleatius, vel etiam emendatius dici potuissent. Sic, cum §. 5 † celeritates navium, eodem secundo vento velitantium, statuuntur ut *Velorum subtensæ* ; intelligendæ sunt celeritates navium initiales, seu primi celeritatum gradus impressi, non subsequentes celeritates actuales [quarum ultima, seu maxima est illa, quæ *ad quam non* vocatur ;] ut pote ad quas supputandas habenda quoque præcipue est ratio resistentiæ seu gravitatis fluidi, cui naves innatant. Reperio autem, quod si illa respectu resistentiæ, seu gravitatis aeris, quo naves impelluntur, valde magna statuatur, qualis reapse est, celeritates navium *ad quas non*, cæteris paribus, propemodum futuræ sunt, ut *radices subtensarum veli*, non ut ipsæ subtensæ (u). Notanter adjeci in dicto §. *cæteris*

* Supra N°. XLVIII. pag. 481. *seq.*

** Pag. 489.

† Pag. 484.

(u) Vid. N°. CIII. Art. XVIII. Interim hæc habe. Sit proræ superficies aquis immersa, ad subtensam veli, ut P ad p ; aquæ & aeris densitas ut D & d ; C Venti, c Navis celeritas, atque ideo $C - c$, celeritas qua

teris paribus; ut intelligatur, hæc non *absolute* dici, quasi celeritas navis cujuspiam, sepofita consideratione figuræ ejus, ullatenus definiri possit, sed *relative*; ita quidem, ut si de navis unius celeritate semel experientia constiterit, de aliarum omnium ejusdem figuræ, structuræ, & ponderis, sed velorum tantum amplitudine differentium celeritatibus pariter judicium ferri queat. Nunc vero dico amplius, & postquam totum hoc negotium a physica incertitudine ad geometricam ἀκρίβειαν traduxi, ipsam quoque *celeritatem absolutam navium* determinare posse me profiteor. No. LVI.

Primo enim, si pars superficiei proræ immersa aquis plana statuatur & æqualis subtensæ veli, seu basi segmenti circularis quod velum refert, & insuper ratio gravitatis aeris ad gravitatem aquæ, ut 1 ad 841, illi, qui in natura obtinet, quam proxime conformis, deprehendo, velocitatem navis maximam, cujuscunque molis sit, præcise fore subtrigecuplam velocitatis ipsius venti (x); nisi quod ponderosior navis tardius hanc velocitatem assequatur.

Deinde quamvis proræ superficies, qua aquis immersa est, non plana statuatur, sed, ut communiter ad aquas facilius sulcandas fieri solet, acuminata, vel rostrata, satis tamen constat difficultatem aliam hinc non nasci, præter eam, quæ in hoc consistit, ut definiatur, quanto plus minusve huic illive figuræ in fluido motæ resistatur; id quod sequentes positiones determinabunt.

1. Si

qua ventus in velum impingit; & erit actio venti in velum, ad resistentiam aquæ in proram, ut $pd \times (C - c)^2$ ad $PDcc$. Navis autem celeritate existente maxima, æqualis est actio venti resistentiæ aquæ. Quare, in eo casu $pd\,(C - c)^2 = PDcc$, vel $(C - c)\sqrt{pd} = c\sqrt{PD}$, atque ideo c [celeritas Navis maxima] $= C\sqrt{pd} : (\sqrt{PD} + \sqrt{pd}) =$ [si ponas D multo majorem quam d,] quam proxime $C\sqrt{pd} : \sqrt{PD}$. Ergo, cæteris paribus, c est propemodum ut $(\sqrt{p})$ radix subtensæ veli.

(x) Sit enim $P = p$, & $D : d = 841 : 1$ erit $c =$, [$C\sqrt{pd} : (\sqrt{PD} + \sqrt{pd}) =$] $C : (\sqrt{841} + \sqrt{1}) = C : 30$, quam proxime.

No.LIV. 1. Si *Triangulum Isosceles* DCE [*Figura 9.*] & *Rectangulum* AB, æque gravia & basium æqualium, DE, AF, ferantur eadem celeritate in fluido quopiam juxta directiones HQ perpendiculares basibus: Vel etiam [quod eodem redit] si idem *Triangulum* juxta dictam directionem moveatur, sed præcedente nunc vertice C, nunc basi DE; erunt resistentiæ, quas a fluido patiuntur figuræ, vel quas idem patitur *Triangulum* diverso sensu latum, in ratione duplicata basis DE, vel AF, & aggregati crurum DC+CE (y).

2. Resistentia quam patitur *Quadratum* in fluido motum juxta directionem lateris, ad resistentiam ejusdem pari celeritate lati juxta directionem diagonalis, vicissim est, ut diagonalis ad latus: facilius ergo hoc quam illo sensu in fluido movetur Quadratum (z).

3. Resistentia, quam patitur *segmentum minus Circuli*, juxta directionem basi perpendicularem & præcedente basi latum, ad resistentiam quam idem patitur, eadem celeritate & directione, sed præcedente vertice motum, est ut quadratum diametri ad idem

(y) Sit QH impressio fluidi in particulam H, sive Rectanguli AB, sive Trianguli DCE. Hæc, quia ad latus Trianguli obliqua est, decomponi debet in duas QK lateri parallelam, ideoque effectu destitutam, & QI perpendicularem; quæ iterum in duas QM, QL decomponenda est. Prior QM, ad axem CG perpendicularis, eliditur per æqualem & oppositam *qm*. Posterior illa est quæ Triangulum retardat. Igitur resistentia quam patitur Triangulum, est ad resistentiam quam patitur Rectangulum, ut QL ad QH, hoc est, in duplicata ratione QI ad QH [ob QL, QI, QH continue proportionales], vel EG ad EC [propter similia Triangula QIH; CGE] vel denique basis ED ad summam crurum ECD.

(z) Sit enim DCE semi-quadratum, & est, per Not. præc. resistentia in bina latera DCE, ad resist. in diagonalem DE, ut EG^2 ad EC^2, vel ut EC^2 ad ED^2. Est autem resist. in DE, ad resist. in latus CE [si utrumque recta in fluidum incurrat] ut ED ad EC. Ergo, *ex æquo*, resistentia in DCE, hoc est, in quadratum motum juxta directionem diagonalis, ad resistentiam in CE, hoc est, in quadratum motum juxta directionem lateris, ut $EC^2 \times ED$ ad $ED^2 \times EC$, vel ut EC ad ED, ut latus ad diagonalem.

idem quadratum, multatum triente quadrati basis segmenti circuli (*a*). No. LVI.

Coroll. Hinc resistentiæ *semi-circuli*, cujus modo basis præcedit, modo vertex, sunt ad invicem in ratione sesqui-altera (*b*).

4. Parabolæ juxta directionem axis incedenti, præeunte modo basi, modo vertice, resistitur in ratione tangentis ad arcum circuli alicujus, qui habeat diametrum parametro, & tangentem semibasi Parabolæ æqualem (*c*).

Cccc 2 Co-

(*a*) Sit DAHE [*Fig.* C] curva quælibet, cujus basis DE, quæque moveatur in fluido, juxta directionem AC basi perpendicularem, nunc base, nunc vertice præeunte. Et si repræsentet PN impressionem fluidi in particulam N*n* basis, ista præcedente, sumatur QH = PN, eaque decomponatur in duas, QK parallelam & QI normalem ad curvam: istaque rursus resolvatur in duas, QM, quæ per æqualem oppositam eliditur, & QL quæ sola retardat motum curvæ; ostendeturque, ut in Nota (y) factum est, resistentiam quam patitur particula N*n*, base præeunte, esse ad resistentiam quam patitur particula H*h*, curva præeunte, ut QL ad QH, vel ut QI^2 ad QH^2, propter QL, QI, QH continue proportionales. Sed, ob sim. Triang. QIH, HO*h*, est QI : QH = O*h* : H*h* = $dy : ds$, [positis, nempe AB = x, BH = y, AH curva = s]. Ergo resistentia partic. N*n* basis est ad resistentiam part. H*h* curvæ, ut dy^2 ad ds^2, vel ut $dy^3 : ds^2$ ad dy. Quamobrem, si totius basis resistentia exponatur per ipsam basim $2y = 2\int dy$, exponetur totius curvæ DAE resistentia per $2\int(dy^3 : ds^2)$. Vid. infra Art. 6. pag. 568.

Sit nunc DAE segmentum circuli, cujus æquatio $yy = 2ax - xx$, vel $x = a - \surd(aa - yy)$, aut differentiando $dx = ydy : \surd(aa - yy)$, adeoque $ds^2 [= dx^2 + dy^2] = aady^2 : (aa - yy)$. Unde est $\int(dy^3 : ds^2) = \int(aa - yy)\,dy : aa = (aay - \frac{1}{3}y^3) : aa$. Ergo resistentia chordæ ad resistentiam arcus ut $2y$ ad $2y - \frac{2}{3}y^3 : aa$, vel ut $4aa$ ad $4aa - \frac{4}{3}yy$, ut quadratum diametri ad idem quadratum minutum triente quadrati basis [$4yy$].

(*b*) Si DAE sit semicirculus, erit $y = a$, & resistentia diametri ad resistentiam semiperipheriæ est ut $4aa$ ad $4aa - \frac{4}{3}aa = \frac{8}{3}aa$, ut 12 ad 8, aut 3 ad 2.

(*c*) Sit DAE parabola, cujus æquatio $yy = ax$. Ergo $x = yy : a$ & $dx = 2ydy : a$ atque $ds^2 = (aa + 4yy)\,dy^2 : aa$. Igitur resistentia basis ad resistentiam curvæ, ut y ad $\int(dy^3 : ds^2) = \int(aady : (aa + 4yy)) = \int(\frac{1}{4}aady : (\frac{1}{4}aa + yy))$, quæ est expressio arcus circuli, cujus diameter a = parametro, tangens y = semibasi.

No. LVI. COROLL. Si basis Parabolæ æquetur parametro, Resistentiæ erunt, ut Quadratum ad Circulum inscriptum (*d*).

5. *Hyperbolæ* [*Ellipsis*] Resistentias, quas subeunt, cum nunc basis, nunc vertex præcedit, ita comparabis. Fiat, ut Aggregatum [Differentia] transversi & recti lateris ad latus transversum: sic quadratum recti lateris ad quadratum diametri circuli alicujus in quo applicetur tangens æqualis semibasi Hyperbolæ [Ellipsis], tumque fiat iterum, ut Aggregatum [Differentia] laterum ad latus rectum, sic dicta tangens ad aliam rectam: nec non ut idem Aggregatum [Differentia] laterum ad transversum, ita arcus tangenti circuli respondens ad arcum alium: quo facto erunt Resistentiæ ut dicta tangens ad Aggregatum [Differentiam] inventæ rectæ, arcusque (*e*).

COROLL. Si Hyperbola sit æquilatera, fiat diagonius quadrati, super lateribus ejus descripti, optati circuli diameter, cui adaptetur tangens æqualis toti basi Hyperbolæ, eruntque Resistentiæ, ut duplum tangentis ad ipsam tangentem suomet arcu auctam. Et si insuper Hyperbolæ basis semissi dicti diagonii æquetur, invenientur Resistentiæ, ut duplum quadrati circulo circum-

(*d*) Quod si basis $= a$ parametro, erit $y = \frac{1}{2}a$, tangens æqualis radio, & arcus octans peripheriæ. Igitur resistentiæ sunt, ut radius ad octantem peripheriæ, vel ut quadratum ad circulum inscriptum.

(*e*) Dicatur p parameter, vel latus rectum, a latus transversum Hyperbolæ vel Ellipsis, cujus æquatio $ayy = apx \pm pxx$ [signum superius ad hyperbolam, inferius ad ellipsim pertinet], vel $xx \pm ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa \pm ayy : p$, aut $x = \mp\frac{1}{2}a \pm \surd(\frac{1}{4}aa \pm ayy : p)$, & $dx^2 = aayydy^2 : (\frac{1}{4}aapp \pm apyy)$, adeoque $ds^2 [= dx^2 + dy^2] = (\frac{1}{4}app + (a \pm p) yy)\, dy^2 : (\frac{1}{4}app \pm pyy) =$ [posito $a \pm p = b$] $(byy + \frac{1}{4}app)\, dy^2 : (\pm pyy + \frac{1}{4}app)$. Ergo resistentia basis ad resistentiam curvæ, ut y ad $\int(dy^3 : ds^2) = \int(\pm pyy + \frac{1}{4}app)\, dy : (byy + \frac{1}{4}app) = \pm\int pdy : b + \int(\frac{1}{4}aappdy : b\,(byy + \frac{1}{4}app))$

$$= \pm py : b + \frac{a}{b}\int(\frac{app}{4b}dy) : (yy + app : 4b)$$

, quæ quantitas integralis exprimit arcum circuli, cujus diametri quadratum $= app : b$, tangens y. Dicatur is arcus A; & erit resistentia basis ad resistentiam curvæ, ut tangens aut semibasis y ad $aA : b \pm py : b$; quæ illa ipsa est ratio quam verbis enunciat Auctor.

cumscripti ad quadratum simul & circulum. (f). No. LVI.

Quæ dicta sunt de Resistentia Ellipsis, procedunt tantum, cùm illa juxta axem majorem movetur. Nam Resistentia quam patitur, cum juxta minorem movetur, dependet a quadratura Hyperbolæ; quare ope Logarithmicæ, seu Funiculariæ, sic invenitur. Sit Funicularia, cujus Parameter sit ad semilatus rectum Ellipsis in ratione subduplicata triplicatæ lateris transversi & differentiæ utriusque. Deinde fiat, ut latus rectum Ellipsis ad differentiam laterum, sic tertia proportionalis ad latus rectum & basin Ellipsis ad quartam. Denique ducta per centrum Funiculariæ recta ad axem perpendiculari, applicetur ei ad curvam recta alia parallela axi, quæ sit ad parametrum Funiculariæ in ratione subduplicata lateris transversi Ellipsis & differentiæ ejus ac inventæ quartæ. Quo facto, alia quædam proportionalis ad differentiam laterum, latus rectum & semi-basin Ellipsis, multata intervallo, quod axem Funiculariæ & parallelam ejus discriminat, mensuram resistentiæ optatæ determinabit (g).

 6. Ge-

(f) Si ponatur $p = a$, ellipsis abit in circulum, cujus resistentia Art. 3. data est, independenter ab arcus rectificatione; quippe, in eo casu, $b = a - p$ fit $= 0$.

Hyperbola vero, ubi $p = a$ æquilatera fit, & est $b = a + p = 2a = 2p$. Resistentiæ sunt, ut y ad $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} y$, vel ut $4y$ ad $2A + 2y$. Est autem A arcus circuli, cujus diametri quadratum $= app : b = \frac{1}{2} pp =$ semidiagonio quadrati, super latere p vel a descripti, cui aptata tangens $y =$ semibasi. Quod si vero ipsa diagonalis pro diametro sumatur, & aptetur tangens $2y =$ basi; omnes lineæ duplicantur, & habetur arcus $2A$. Sunt igitur resistentiæ basis & curvæ, ut $4y$, duplum tangentis $2y$, ad $2y + 2A$ ad tangentem simul & arcum.

Quod si tangens $2y$, seu basis $= \frac{1}{2} pp$ semidiagonio, vel radio circuli, arcus A erit octans peripheriæ, cujus ad tangentem suam eadem ratio est quæ circuli ad quadratum circumscriptum. Igitur, eo in casu, basis & hyperbolæ resistentiæ sunt, ut duplum quadrati ad quadratum circulo inscripto auctum.

(g) Nam si ellipsis juxta minorem axem movetur, parameter p minor axe transverso a, adeoque $b = a - p$ quantitas negativa. Igitur terminus $\int (\frac{1}{4} aappdy) : b \, (\frac{1}{4} app + byy))$ dividendo per $-b$, induet hanc formam $-\int (\frac{1}{4} aappdy) : bb (\frac{1}{4} app : b - yy))$ quæ pendet a logarithmis vel quadratura

No. LVI. 6. Generaliter vero in *quacunque Figura*, quæ eadem celeritate, nunc præcedente base, nunc vertice, per fluidum quodpiam movetur, Resistentiæ se habent, ut Figuræ basis ad summam omnium cuborum factorum ex elementis basis, & applicatorum ad quadratum elementorum ipsius curvæ (*b*). At quantum unica hæc

dratura hyperbolæ, cujusque integralis est $(pa\sqrt{a} : 4b\sqrt{b}) \times$ Log. $((p\sqrt{\frac{a}{b}} - 2y) : (p\sqrt{\frac{a}{b}} + 2y))$. Notum autem est quantitates logarithmicales, per Funiculariam haberi posse. Ut demonstretur Auctoris constructio, ponamus rectam æqualem $A : \sqrt{(BB - yy)}$, quæ axi parallela intercipitur inter rectam normalem ad axem, & Funiculariam, cujus parameter est $A : B$; hanc rectam, aio, distare ab axe, intervallo quod sit $= \int (A dy : (BB - yy))$. Id autem facillime ex iis sequitur, quæ de natura Funiculariæ demonstrata sunt. Ostensum enim est, N°. XXXIX. pag. 426. si sit P parameter, & x abscissa a vertice, esse applicatam $y = \int (P dx : \sqrt{(xx + 2Px)}$; quamobrem, si sit z abscissa a centro, hoc est si $z = x + P$, erit $u = \int (P dz : \sqrt{(zz - PP)})$. Fiat igitur $P = A : B$; & $z = A : \sqrt{(BB - yy)}$, adeoque $dz = Aydy : (BB - yy)^{\frac{3}{2}}$, & erit $u = \int (A dy : (BB - yy))$. Comparetur hæc formula cum expressione integranda $\int (\frac{1}{4} aappdy : bb (\frac{1}{4} app : b - yy))$; & erit $A = \frac{1}{4} aapp : bb$, ac $BB = \frac{1}{4} app : b$. Describatur itaque Funicularia cujus parameter $P = A : B$

$$= \frac{\frac{1}{4} aapp : bb}{\frac{1}{2} p\sqrt{a} : \sqrt{b}} = \frac{1}{2} pa\sqrt{a} : b\sqrt{b}, \&$$

ejus axi parallela applicetur recta $= A : \sqrt{(BB - yy)} = \frac{1}{4} aapp : bb \sqrt{(\frac{1}{4} app : b - yy)} = (\frac{1}{2} aap : b\sqrt{b}) \times \sqrt{(a - 4byy : p)} = P\sqrt{a} : \sqrt{(a - 4byy : pp)}$; eritque u distantia ejus rectæ ab axe $= \int (\frac{1}{4} aappdy : bb (\frac{1}{4} aapp : b - yy))$. Ergo recta $py : b$, tertia proportionalis ad differentiam laterum, latus rectum, & semi-basim ellipsis, multata intervallo u quod axem Funiculariæ & parallelam ejus discriminat, est ad y ut resistentia ellipsis juxta minorem axem mota, ad resistentiam basis, prorsus ut habet Auctor.

(*b*) Vide Notam (*a*) pag. 565. Quod si autem figura plana DAE, circa axem AC rotata generet solidum, quod in fluido moveatur juxta directionem axi parallelam, nunc base, nunc vertice præeunte, erit pariter resistentia, quam patitur corona circularis ex rotatione particulæ N*n* genita, ad resistentiam, quam patitur zona ex rotatione particulæ H*h* genita, ut ds^2 ad dy^2, vel ut $cydy$ ad $cydy^3 : ds^2$ [c denotante peripheriam cujus radius $= 1$]. Quare, si resistentia basis per ipsam basim solidi, $\frac{1}{2} cyy = \int cydy$ designetur, resistentia superficiei curvæ erit $= \int (cydy^3 : ds^2)$, adeoque erunt illæ resistentiæ, ut yy & $2\int (ydy^3 : ds^2)$.

Itaque

hæc obſervata regula, tum ad conſtructionem navium, tum ad perficiendam nauticam univerſam, tum etiam ad definiendam figuram Penduli alicujus horologii, ut aerem quam liberrime ſulcare, & minima quantumvis vi in motu conſervari poſſit (*i*), plurimaque præſtanda alia, momenti conferat, haud dictu opus eſt; quin potius mirari ſubeat, quod viſa tam manifeſta rei utilitate, No. LVI.

Itaque, ſi proponitur conus iſoſceles, cujus latus ad radium baſis ſit ut l ad r; in quo igitur eſt $ds : dy = l : r$ adeoque $ds^2 = lldy^2 : rr$, adeoque $2\int(ydy^3 : ds^2) = 2\int(r^2ydy : l^2) = r^2yy : l^2$; dicemus reſiſtentiam baſis eſſe ad reſiſtentiam ſuperficiei conicæ, ut yy ad $r^2yy : l^2$ vel ut l^2 ad r^2, in duplicata ratione lateris ad radium baſis.

Segmenti ſphæræ, [ubi $ds^2 = aady^2 : (aa - yy)$ Vide Not. (*a*) pag. 565.] baſis, quando præcedit, patitur reſiſtentiam, quæ eſt ad reſiſtentiam ſuperficiei ſphæricæ, ſi præcedit vertex, ut yy ad $2\int(ydy^3 : ds^2) = 2\int(ydy \times (aa - yy) : aa = yy - \frac{1}{2}y^4 : aa$, vel ut aa ad $aa - \frac{1}{2}yy$, ut quadratum radii ſphæræ, ad idem quadratum minutum ſemiquadrato radii baſis.

Igitur hemiſphærii reſiſtentia eſt ſemiſſis reſiſtentiæ baſis ejus. Nam, in eo caſu, $y = a$. Ergo $aa - \frac{1}{2}yy = \frac{1}{2}aa$. Ut etiam invenit Newtonus *Phil. Princip.* Lib. II. Sect. VII. Prop. 34.

Solidi parabolici [quod habet $ds^2 = (aa + 4yy)dy^2 : aa$: Vid. Not. (*c*). pag. 565.] reſiſtentiæ, modo baſe, modo vertice præeunte, ſunt ut yy, & $2\int(ydy^3 : ds^2) = 2\int(aaydy) : (aa + 4yy) = \frac{1}{4}aa \times \int(8ydy : (aa + 4yy) = \frac{1}{4}aa \times$ (Log. $(aa + 4yy)$ — Log. aa) [ſubtrahitur Log. aa, quia Log. $(aa + 4yy)$, poſito $y = 0$ fit = Log. aa], vel ut yy ad $\frac{1}{4}aa$ Log. $((aa + yy) : aa)$, quæ ratio vel per logarithmos, vel per Funiculariam facile dabitur.

Solida vero hyperbolicum & ellipticum, baſe præcedente reſiſtentiam patiuntur, quæ eſt ad reſiſtentiam eorundem, vertice præcedente, ut yy ad $2\int(ydy^3 : ds^2) =$ [quoniam $ds^2 = (byy + \frac{1}{4}app)dy^2 : (\pm pyy + \frac{1}{4}app)$] $= 2\int(\pm pyy + \frac{1}{4}app)ydy : (byy + \frac{1}{4}app) = \pm 2\int pydy : b + \int(\frac{1}{2}aappydy : b(byy + \frac{1}{4}app) = \pm pyy : b + \frac{aapp}{4bb}$ Log. $((byy + \frac{1}{4}app) : \frac{1}{4}app)$, quæ ratio pariter per logarithmos facile haberi poteſt.

(*i*) Solidum minimæ reſiſtentiæ definierunt Newtonus, *Princ. Phil. Math.* Lib. II. Sect. VII. Prop. 35. *Schol.* Fatio Duillerius, in peculiari Tractatu, *Joh.* Bernoulli in *Actis Lipſ.* 1699 & 1700, Hospitalius *ibid.* & in *Comment. Acad. Reg. Scient. Pariſ.* 1699; Generaliſſime autem Bouguerus in iiſdem *Comment.* ad ann. 1733.

No. LVI. litate; nemo quod ſciam hoc æquor adhucdum arare tentaverit.

IV. Quod ſupereſt in Schediaſmate *Leibnitiano*, ſolutionem concernit æquationis ſupra memoratæ $adsddx = dy^3$, quam Summus Vir, inſtituto examine, Catenariæ competere nobiſcum agnoſcit (*k*); & inſuper peregregie obſervat, quæſitam curvam fore Circulum, ſi habeatur $addx = ds\,dy$ (*l*). His addere liceat, quod ſi ſit $addx = dy^2$; emerſura eſt Curva quæpiam, quæ etſi non ſit ipſa Logarithmica, ejus tamen ope ſic conſtruitur: Eſto logarithmica AF [*Figura* 10.] cujus aſymptotos DG, & applicata AC æqualis ſubtangenti $= a$. Hac, ceu radio, ſuper C deſcribatur Circuli Quadrans AED, ſumptoque ubivis in logarithmica puncto F, ducantur per illud rectæ FE, FH, parallelæ ipſis DG, AC, eaſdemque reciproce ſecantes in B & G. Dico, ſi abſcindatur GH = arcui AE, fore punctum H in curva quæſita CH; cujus a logarithmica diverſitatem, vel ſolus vertex C, quo hæc altera caret, arguit. Quam conſtructionem ſibi nuper communicatam Illuſt. HOSPITALIUS hac demonſtratione ſynthetica munivit (*m*). Ponatur $CA = a$, $CG = x$, $GH = y = AE$, $GF = z = CB$, habebiturque ob logarithmicam $dx = -adz : z$, & propter circulum $dy = adz : \sqrt{(aa - zz)}$. Sed ex hypotheſi [ob ſuppoſita ds æqualia] debebit differentiale ipſius

(*k*) Vid. Num. XLVIII. Nota (e) pag. 485.

(*l*) Integrando enim eſt $adx = yds$ [ds ponitur conſtans] & $a^2dx^2 = y^2ds^2 = yydy^2 + yydx^2$, vel $(a^2 - y^2)dx^2 = y^2dy^2$, aut denique $dx = ydy : \sqrt{(a^2 - y^2)}$; & integrando rurſus $x = a - \sqrt{(aa - yy)}$, quæ æquatio eſt ad circulum.

(*m*) En Analyſin. Ponatur $ds : a = dy : u = dx : t$, & quoniam eſt $ds^2 = dy^2 + dt^2$, pariter erit $a^2 = t^2 + u^2$, adeoque $tdt + udu = 0$, & $tdt = -udu$. Rurſus erit $dx = tds : a$, & $ddx = dtds : a = dtdy : u$, [cum ſit $ds : a = dy : u$] quo ſubſtituto in æquatione propoſita $addx = dy^2$, ea evadet $adtdy : u = dy^2$, unde fit $dy = adt : u = adt : \sqrt{(aa - tt)}$. Igitur $y =$ arcui circuli AE cujus ſinus $BE = t$. Sed eſt quoque $dx = tdy : u = \frac{t}{u} \times \frac{adt}{u} = atdt : uu = -audu : uu = -adu : u$. Igitur $x =$ logarithmo ipſius $u = \sqrt{(aa - tt)} = CB = FG$.

ipsius $ds^2 = [dx^2 + dy^2 = a^4dz^2 : (aazz - z^4)]$ æquari nihilo: No. LVI.
quare $aazddz - z^3ddz - aadz^2 + 2zzdz^2 = 0$, sive $zzdz^2 = aadz^2 - zzdz^2 - aazddz + z^3ddz$, hoc est, facta multiplicatione per aa, & divisione tum per zz, tum per $aa - zz$, $aadz^2 : (aa - zz) = (aadz^2 - aazddz) : zz$, hoc est $dy^2 = addx$. Q. E. D. Subjungi potest & hoc leviusculum, Curvam, in qua ipsa ddx proportionalia reperiuntur ipsis dy, vel dy^2, vel dy^3, &c. perpetuo fore Parabolam; sicubi loco ds ipsa dy æqualia supponantur. Et generaliter, positis dy æqualibus, si æquentur quoque ipsa dx, quæsita linea erit Recta: si ipsa ddx, Parabola communis: si d^3x, Parabola Cubica: si d^4x, Biquadratica, &c. (n)

Atque hæc possunt esse specimina qualiumcunque profectuum, quos a paucis retro annis in Geometria interiore fecimus; si addantur iis nuperæ meæ Florentini Ænigmatis, & Problematis de minimo Crepusculo solutiones *, quarum prior [quanquam supprimenda, si de *Leibnitiana* † constitisset] quædam me judice haud contemnenda continet, dum §. 4 modum generalem suppeditat, cuicunque Figuræ planæ, seu rectilineæ, seu curvilineæ, quadrabili, vel non quadrabili, geometricæ, vel mechanicæ, seu libera denique manu formatæ, æqualem ex superficie sphærica portionem abscindendi; quo ipso utique multo plus me præstitisse autumo, quam Auctor Florentinus postulaverat. Sciendum

(n) Si positis dy æqualibus, æquentur quoque dx, ista illis erunt proportionalia; pone igitur $adx = dy$, & integrando, habebis $ax = y$, æquationem ad rectam.

Si ipsa ddx sint constantia, pone $addx = dy^2$, & integrando bis, fiet $ax = \int\int addx = \int\int dy^2 = \int dy \int dy = \int ydy = \frac{1}{2}yy$, æquatio ad Parabolam.

Si sit $a^2d^3x = dy^3$, integrando ter, habebis $a^2x = a^2\int\int\int d^3x = \int dy \int dy \int dy = \int dy \int ydy = \int \frac{1}{2}yydy = \frac{1}{6}y^3$, æquationem ad Parabolam cubicam.

Pariter $a^3d^4x = dy^4$, integrando quater, dat $a^3x = a^3\int^4 d^4x = \int^4 dy^4 = \int dy \int dy \int dy \int dy = \int dy \int dy \int ydy = \int dy \int \frac{1}{2}yydy = \int \frac{1}{6}y^3dy = \frac{1}{24}y^4$, æquationem ad Parabolam biquadraticam; &c.

* Nis. LII. pag. 512, & LIII. pag. 515.

† Quæ extat in *Actis Erud. Lips.* 1692. Jun. pag. 275.

No. LVI. dum autem, ambo quoque Problemata a *Fratre* meo Parisiis soluta esse, posteriorisque de Crepusculo solutionem, inscio me, *Diario Gallico* insertam, cui cum mea apprime convenit, hoc non obstante, quod ille soliditatem sphæræ introspiciendo, ego superficie tenus duntaxat eam contemplando, diversissima uterque via in hac investigatione usi fuerimus. Habemus vero & alia his plura & majora, quæ etiamnum premimus: at illa quantacunque sint, num metas has transiliant, quas Summus Geometra [tam eximia & invidenda in hoc studiorum genere, tum in *Actis* passim, tum in privatis ad me litteris porro pollicitus] attigit, nostrum judicare non est. Id certe de se cogitare, ut hominis vanissimi; sic palam profiteri insanientis prorsus foret. Suspicimus Virum nunquam satis laudatum, ut decet; & ab ejus lumine lumen nobis accensum grati agnoscimus: ac quanquam fieri forte possit, ut in nonnulla inciderimus, ad quæ ipsi, aliorum negotiorum mole obruto, attendere vel penetrare non licuit, hæc tamen & ipsa ei accepta ferenda putamus; quandoquidem huic, qui glaciem fregit aliis, gratia debetur, non ob ea tantum, quæ invenit ipsemet, sed & quæ alii jactis ab ipso fundamentis inædificaverunt. Cæterum existimavi semper & existimo etiamnum, promotionem scientiarum non unius ætatis, nedum hominis, opus existere, sed aliquot plurium in diversis seculis viventium, studiaque sua in communem scopum dirigentium; quorumque posteriores priorum vestigia legendo, & pergendo ubi illi desiere, pristinis inventis nova & majora superaddant: & quemadmodum, nobis maturiorem scientiarum ætatem adeptis, nunc ludus jocusque videntur, quæcunque Veteres, utut ingenio nobis neutiquam inferiores, [at nostris subsidiis, in illa Geometriæ infantia, destituti] tam operose invenerunt ac demonstrarunt; ita persuasum omnino habeo, venturos post nos, qui, licet ingenio nostris Heroibus non prævaleant, ex eorum tamen inventis ansam captare poterunt pomæria vastissimæ scientiæ proferendi, ultra quam fortasse, ne cogitando quidem, nunc assequi valeamus. Interim tanta quisque laude dignus censebitur, quantum ad illa latius extendenda de suo contulerit; neque po-

stremi

ſtremi pluris æſtimabuntur, quod longius progreſſi ſint, & plura detexerint, quam omnium primi, qui illis ad hoc perveniendum viam ſtraverunt. No.LVI.



N°. LVII.

PROBLEMA

Ab Eruditis ſolvendum,

Propoſitum

A *Johanne* Bernoulli.

Quæritur qualis ſit Curva A C, quæ hanc habet proprietatem, ut, ducta ubicunque tangente CD terminata ab axe AE, portio ejus abſciſſa AD ſit ad tangentem CD in ratione M ad N. *Act. Erud. Lipſ.* 1693. Mai. p. 235.

Problema hoc ſolutu dignum eſt, & facile Mathematicorum applicationem meretur. In quacunque enim ratione ſit M ad N, curva ABC ſemper eadem facilitate motu quodam continuo deſcribi poteſt; non obſtante, quod curva, pro ratione M ad N, magis vel minus compoſita evadat: in caſu quippe rationis æqualitatis illico patet, curvam ABC eſſe circulum; in reliquis, ſi M ad N eſt ut numerus ad numerum, erit quidem curva geometrica, ſecus autem tranſcendentalis eſt. Quæritur generalis determinatio puncti in curva.

No. LVII.

JACOBI BERNOULLI
SOLUTIO
PROBLEMATIS FRATERNI
Ante octiduum Lipsiam transmissi.

Acta Erud. Lips. 1693. Jun. p. 255.

ELegans est hoc Problema, in quod incidimus occasione *Hugenianorum* quorundam, quæ nuperrime in *Actis Roterodamensibus* comparuere *. Ei se primo applicuit *Frater*, cumque paulo post significaret se voti sui factum compotem, operæque pretium esse ut solvatur, eumque in finem etiam Problema publice proponendum, tecta solutione, *Lipsiam* mitteret, Auctor mihi extitit, ut & ipse tentarem, & quam reperi solutionem sequentem [omissa tamen demonstratione, ne aliis idem inveniendi voluptatem adimerem] cum Publico communicarem; nescius etiamnum, an & quousque cum Fraterna conspiret.

In data positione recta AB [*Fig.* 1. & 2] assignatum est punctum A, & quæritur Curva AC, in qua, sumpto ubivis puncto C, ductaque per illud recta tangente CD, abscissa AD sit ad tangentem DC in constante ratione n ad 1.

SOLUTIO, Abscissa quavis AD, centro D, radio DC [qui sit ad abscissam AD, ut 1 ad n] describatur arcus circuli; fiatque ut aggregatum unitatis & dicti radii ad potestatem $\pm 2n$ elevati, ad eorundem differentiam; sic ipse radius, ad rectam DB auferendam ex positione data AB. Dico, si super B erigatur recta

* *Histoire des Ouvrages des Sçavans.* Fevr. 1693.

cta BC perpendicularis ipsi AB, secansque arcum circuli in C, fore punctum C in curva optata AC (a). No. LVII.

Eximium autem usum habet hoc Problema. Primo enim hinc constat, infinitas esse diversissimorum generum Curvas, communi hac proprietate gaudentes, ut recta AD, DC, constantem rationem habeant; omnes vero illas esse geometricas, [quanquam aliæ aliis magis minusve sint compositæ,] in quibus hæ lineæ se habent, ut numerus ad numerum. Deinde omnes hæ Curvæ describuntur motu continuo fili GDC in alterutra extremitate C pondus annexum habentis hoc pacto: In Triangulo AFE [*Fig.* 2] rectangulo ad A, cujus crus AE æquale sit longitudini fili GDC, applicetur norma BDH, ea ratione ut dum crus DB super AB versus A volvitur, alterum HD fili portionem GD ante se pellendo, lateri Trianguli AE perpetuo parallelam manere, ejusque extremitatem G, super hypothenusa FE incedere cogat: sic fiet, ut pondus extremitati C annexum & attractum curvam describat AC ita comparatam, ut AD sit ad portionem fili DC, Tangentem scilicet Curvæ, in ratione data crurum Trianguli AF & AE (b). Unde patet, si constructiones ejusmodi censendæ sunt geometricæ & accuratæ, æquationes infinitas altissimorum graduum, pari cum simplicissimis omnemque pene fidem excedente facilitate, construi posse. Denique nec hoc tacendum, quod

(a) Constructionis hujus analysim, qualem ipse instituit Auctor, vide No. CIII. Art. 19.

(b) Filum DC, quod pondusculum C trahit, tangit perpetuo curvam AC hujus ponderis motu descriptam. Sed est filum CDG æquale rectæ AE, vel DGH. Igitur DC = GH. Est autem GH [sive tangens DC] ad EH [vel abscissam AD], ut AE ad AF, ob similia Triang. EHG, EAF. Verum adnoto non facile esse hujusmodi motu describere alteram partem I*c*K curvæ, ubi resecta A*d* abscissam A*b* longitudine superat. Ibi enim, non summa rectarum *cdg*, sed earumdem differentia, datæ rectæ AE æqualis esse deberet. Neque tamen hæc ita accipi velim, quasi impossibile esset comminisci rationem aliquam motus continui, quo & pars curvæ I*e*K describi queat.

No. LVII. quod solutio hujus Problematis abstrusæ Methodi Tangentium inversæ plurimum perficiendæ & promovendæ magnum lumen præbere possit.

N°. LVIII.

CURVATURA LAMINÆ ELASTICÆ.

Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi.

Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti;

Una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, &c.

Acta Erud. Lips. 1694. Jun. p. 262. Post triennale silentium promissi tandem fidem libero; sed ita, ut moram, quam Lector alias inique ferre posset, nonnullo fœnore compensem, dum Elaterum curvaturam non in una sola, [ut initio fueram pollicitus] sed generaliter in quacunque extensionum hypothesi constructam exhibeo; quod primus, ni fallor, exequor, postquam a multis inutiliter tentatum Problema fuisset. Extitit enim jam inde a GALILÆI quoque temporibus celebre, qui curvam hanc, perinde ut Funiculariam, Parabolam esse suspicatus erat. Eandem denique sententiam tuitus est Pater *Gasto* PARDIES Gallus, in exiguo tractatu de *staticis*,

N°56.

Fig. C.

Q M K L I A h H B O E n N C D P K E

N°57. 1.

M N C B A D E

N°57. 2.

K f I C Fig. 2. A D B b F g d G E H K

ſtaticis †, ubi tamen in rem præſentem nil niſi paralogiſmos meros cenſuit. Et nuper adeo ejuſdem Societatis Vir *Franciſcus Tertius de Lanis*, in prolixo ſuo opere *Magiſterii naturæ & artis*, *Tom.* 2 *lib.* 7. [ubi multa huc facientia & lectu digna habet] idem evincere conatur, ſed ratiocinio plane præpoſtero: ut vel hinc non ſine voluptate percipere liceat, quantopere Prædeceſſores noſtri, interioris Geometriæ cognitione deſtituti, ſe torſerint, pro inveſtiganda re, quam in illa caligine abſque ejus adminiculo ſcire non poterant. Dixeram in *Actis Eruditorum* 1691, pagina 289. * Problema hocce plus difficultatis habere *Funiculario*, nec ſine ratione. Ut enim alia taceam, notandum, duas præſto eſſe claves in *Catenarii* inveſtigatione, quæ ad duas differentes æquationes viam ſternunt, quarum una naturam curvæ per relationem ipſiuſmet ad coordinatas ejus, altera per relationem fili evolventis ad eaſdem exprimit; cum ad curvæ Elaſticæ naturam indagandam poſteriore tantum clave aditus pateat. Hinc enim manifeſto ſequitur, fieri bene poſſe, ut quiſpiam prioris Problematis difficultates ſuperet, nec tamen protinus alterius quoque victor evadat; deſtitutus nimirum clavium altera, quæ dictam relationem fili evolventis ſeu radii circuli oſculatoris [non quomodocunque, ut factum in *Actis Lipſienſibus Menſis Januarii* 1691 ** pag. 22,] ſed in terminis ſimpliciſſimis & pure differentialibus exhibeat. Hæc nobis jam eo tempore, quo ſpeculationi funis vacabamus, innotuerat, eamque mox nonnullis inter peregrinandum communicavit *Frater*; præterea dum immenſa inventi utilitas in reſolvenda *Velaria*, & hac, quam præ manibus habemus, *Elaterum Curvatura*, aliiſque ſublimioribus, quotidie magis magiſque ſeſe mihi explicuit, effecitque tandem, ut non poſſim publico aureum Theorema diutius invidere; præſertim cum hoc unum adhuc Geometris defuiſſe videatur, quominus æque feliciter in recenſitis Problematis, atque in altero illo, verſati fuerint. N.LVIII.

Prioſ-

† *Des forces mouvantes*. Art. CIII.
* Supra N°. XLII. pag. 451 & 452.
** N°. XLI. pag. 440. 441.

N.LVIII. Priusquam itaque ad institutum pergam, sunto in *Fig.* 1. portiunculæ Curvæ infinite parvæ ab, bc, quibus perpendiculariter insistant radii circuli osculatoris af, bf, concurrentes in puncto f, facientesque angulum afb æqualem angulo gbc, quem producta portio ab cum altera bc efficit; tum abscindatur bh = bc, ductæque intelligantur parallelæ al, bn, co, nec non bl, hom, gcn; quarum illæ abscissarum, hæ applicatarum elementa [sive dx, dy, ddx, &c.] indigitent. Dico,

α. Quod positis Curvæ elementis ab, bc, hoc est, ipsis ds æqualibus, radius circuli osculatoris seu longitudo fili evolventis af, nempe $z = dxds : ddy$; item $z = dyds : ddx$. Nam ho : bc = ho : hc + hc : bc = [ob similitudinem Triangul. bmh, hoc, item hcb, abf] bm : bh + ab : bf = al : ab + ab : bf = al : bf = $dx : z$. Sed ho = hm − nc = bl − ne = ddy, & bc = ds. Quare $ddy : ds = dx : z$. Eodem modo ostendetur $ddx : ds = dy : z$. Q. E. D.

Corollarium. In omni Curva, positis ejus elementis æqualibus, differentiæ secundæ coordinatarum primis reciproce proportionantur. Cum enim $dxds : ddy = z = dyds : ddx$ erit $dxddx = dyddy$, adeoque $ddx : ddy = dy : dx$; quod ipsum quoque ex sola similitudine Triangulorum bmh, hoc, liquet; ubi co, seu ddx, est ad oh, seu ddy, ut hm ad bm, vel bl ad al, seu dy ad dx.

β. Positis vero abscissæ elementis al, bn, hoc est, ipsis dx æqualibus, erit radius osculantis circuli af seu $z = ds^3 : dxddy$. Quoniam gc : bc = gc : hc + hc : bc = [ob similitudinem Triangul. bng, chg, nec non hcb, abf] bg : bn + ab : bf = ab : al + ab : bf = $ds : dx + ds : z = ds^2 : zdx$: atque gc = gn − nc = bl − nc = ddy, & bc = ds, erit $ddy : ds = ds^2 : zdx$. Q. E. D.

Haud absimiliter ostendetur, quod positis dy æqualibus, futurum est $z = ds^3 : dyddx$.

His addo nova, de quibus nec *Fratri* adhuc constat, Theoremata pro curvis, quarum applicatæ non sunt parallelæ, sed in com-

communi puncto coeunt: poſito namque radio circuli ſuper polo ſeu umbilico hoc deſcripti a; abſciſſa peripheriæ ejus, x; & intercepta inter polum & datam curvam, y: erit radius oſculantis circuli $z = adyds : (2dxdy + yddx)$ vel $aydxds : (ydx^2 - aaddy)$ ſi elementa Curvæ ds; & $z = ads^3 : (dxds^2 + dxdy^2 - ydxddy)$ ſi ipſa dx: & denique $z = ads^3 : (dxds^2 + dxdy^2 + ydyddx)$ ſi ipſa dy æqualia intelliguntur. Eſt vero in ejuſmodi Curvis $ds = \sqrt{(yydx^2 + aady^2)} : a$ (a). Hac via duce cognovi, radium N.LVIII.

(a) Sit [Fig. A] Ad $= a$, de $= dx$, em $= dx + ddx$, Aa $= y$, lb $= dy$, nc $= dy + ddy$, al $= ydx : a$ bn $= (ydx + dydx + yddx) : a$, ab $= ds = \sqrt{(aady^2 + yydx^2)} : a$, bc $= ds + dds$, af $= z$. Producatur ab in h, & centro b, deſcribatur per c, arculus ch; fiatque angulus nbg = lab, &, addito utrinque recto, erit gbA = baA, adeoque hbg = [hbA — gbA = aAb + baA — gbA =] aAb, unde fit Ad [a] : de [dx] = bh [$ds + dds$] : ho [$(dxds + dxdds) : a$]. Præterea ſimilitudo Triangul. alb, bng, dat al [$ydx : a$] : bn [$(ydx + dydx + yddx) : a$] = bl [dy] : ng [$(ydydx + dy^2dx + ydyddx) : ydx$], unde demto nc [$dy + ddy$] relinquitur gc $= (dy^2dx + ydyddx - ydxddy) : ydx$. Rurſus ex ſimilitudine Triang. goc, & gbn vel bal, ſequitur, ba [ds] : al [$ydx : a$] = gc [$(dy^2dx + ydyddx - ydxddy) : ydx$] : co [$(dy^2dx + ydyddx - ydxddy) : ads$]. Ergo ch = co + ho $= (dxds^2 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy + dxdsdds) : ads$; ac denique ſectores ſimiles cbh, afb, dant ch : cb [$ds + dds$] = ab [ds] : af, unde fit [af] $z = (ads^3 + ads^2dds) : (dxds^2 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy + dxdsdds)$, vel $ads^3 : (dxds^2 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy)$, cum in numeratore ads^2dds, in denominatore $dxdsdds$ præ reliquis terminis evaneſcant. In hac expreſſione radii oſculi, nulla quantitas conſtans ſupponitur. Quare ſi ponantur ipſa dy æqualia, hoc eſt $ddy = 0$, fiet $z = ads^3 : (dxds^2 + dxdy^2 + ydyddx)$ quod ultimum eſt Auctoris noſtri Theorema: penultimum vero, ſeu $z = ads^3 : (dxds^2 + dxdy^2 - ydxddy)$ habetur, ponendo $ddx = 0$, ſeu ipſa dx æqualia. Quod ſi ds [$\sqrt{(aady^2 + yydx^2)} : a$] ſtatuatur conſtans, erit $aadyddy + ydydx^2 + yydxddx = 0$, adeoque $ddy = -ydx^2 : aa - yydxddx : aady$, & $ddx = -dydx : y - aadyddy : yydx$. Subſtitue hunc valorem in formula $z = ads^3 : (dxds^2 + dxdy^2 - ydxddy + ydyddx)$, & fiet $z = ads^3 : (dxds^2 + dxdy^2 - ydxddy - dxdy^2 - aady^2ddy : ydx) = ads^3 : (dxds^2 - (yydx^2 + aady^2)ddy : ydx) = aydxds^3 : (ydx^2ds^2 - aads^2ddy) = aydxds : (ydx^2 - aaddy)$; quod eſt Theorema ſecundum. Hic pro ddy ſubſtitue valorem ejus $-ydx^2 :$ aa

N.LVIII. dium circuli ſpiralem *Archimedæam* oſculantis ubique quartam eſſe proportionalem, ad peripheriam circuli primæ revolutionis, radium ejus, & quantitatem $(xx+aa)\sqrt{(xx+aa)}:(xx+2aa)$. (b)

Sed miſſis & præmiſſis iſtis, redeo in orbitam propoſiti noſtri Problematis, conſtruendo Curvam Elaſticam, ut ſequitur:

I. *Generaliter.*

Eſto ſpatium rectilineum, ſive curvilineum quodvis ABC [*Fig.* 2.] cujus abſciſſæ AE vires tendentes, ordinatæ EF tenſiones repræſentent, eique ponatur æquale quadratum AD, intra quod deſcriptus ſit ſuper A circuli quadrans GKL. Statuatur etiam indefinitæ portioni ſpatii AEF æquale rectangulum AH, ducta recta HI ſecante quadrantem circuli in K, & junctæ AK fiat parallela GM, ipſique AM in ordinata EF [ſi opus ſit] producta capiatur æqualis EN. Erit punctum N ad curvam quandam AN talem, ut ſi ſpatio AEN pergas ſtatuere æquale rectangulum AO, rectaſque OP, FE producas ad communem occurſum in Q, exiſtat punctum Q in curva optata AQR. Nimirum, ſi aſſerculus quidam oblongior, tigillum, virga, pertica, aut lamina quæcunque flexilis, elaſtica, & gravitatis expers AQRSyVA, uniformis ubique latitudinis & craſſitiei RS, AV, longitudinis vero RQA, firmetur una extremitate in RS ad perpendiculum, alterique AV potentia applicetur, ſeu pondus appendatur Z, quantum ſufficit ad laminam incurvandam, donec ipſa ejuſve tangens in A, puta AB, directioni ponderis

$aa-yydxddx:aady$, & erit $z = aydxds:(ydx^2+ydx^2+yydxddx:dy) = adyds:(2dxdy+yddx)$; quod eſt Theorema primum.

(b) Eſt in Spirali *Archimedea* $y=ax:c$ [c peripheriam denotat, cujus radius a], atque $dy=adx:c$, & $ddy=addx:c$. Evaneſcente igitur ddx, nulleſcit ddy. Quare radius oſculi $z=ads^3:(dxds^2+dxdy^2)$. Eſt autem $ds=\sqrt{(aady^2+yydx^2)}:a=dx\sqrt{(aa+xx)}:c$. Ergo $z=\frac{a}{c}\times\frac{(aa+xx)\sqrt{(aa+xx)}}{2aa+xx}$.

deris AZ normalis fiat, acquiret concava laminæ superficies N. LVIII.
RQA curvaturam quam construximus; cui convexa SyV parallela est, & evolutione curvæ ejusdem mn condescribitur. (c) Quantum autem ad hoc præstandum requiratur ponderis, sic cognosces: Ponatur vectis SRZ, cujus fulcrum R, brachium longius RZ = BA, brevius æquale crassitiei laminæ RS, cui affixa sit portio quæpiam datæ laminæ SY, firmata in XY; quo facto, si longiori vectis extremitati adjiciatur pondus Z, quod extendere possit dictam portionem per Triangulum RST, fibram scilicet XS per ST, xs per st, reliquasque proportionaliter, ita quidem ut ST sit ad BC, sicut SY rectangulum sub longitudine & crassitie portionis laminæ ad spatium ABC; erit idipsum quoque pondus quæsitum. (d)

(c) Sit Qy laminæ crassities $= c$; Qq, elementum curvæ $= ds$, AP $= y$, PQ $= x$, EF $= t$, tensio quam vis tendens AE, hoc est pondus Z agens per vectem AE, vel QP inducere valet fibræ elasticæ, cujus longitudo data $= b$, resistenti per vectem SR vel Qy. Igitur tensio yΩ, quam inducit fibræ ωy, cujus longitudo ds, erit $tds : b$. Et similia Triangula ΩyQ, Qqn, dant Ωy [$tds : b$] : yQ [c] = Qq [ds] : Qn [z seu, ut ostensum est, $dxds : ddy$]. Æquando igitur media extremis $tdxds^2 : bddy = cds$, vel $cbddy$, aut $aaddy$ [ponendo $aa = cb$] $= tdxds$ ac integrando $aady = ds\int tdx = Sds$ [faciendo $S = \int tdx =$ AEF]. Ergo $a^4dy^2 = SSdy^2 + SSdx^2$, unde est $dy = Sdx : \surd(a^4 - SS)$, ubi $aa =$ spatio ABC. Nam ubi EQ tangit curvam AQR, abitque in BR, ibi dx respectu dy evanescit. Ergo $\surd(a^4 - SS)$ evanescit, & est $a^4 = SS$, vel $a^2 = S$ = ABC.

Atque hinc sequitur Auctoris constructio. Est enim AG $= a$, AD $= a^2$ = ABC, AH = AEF $= S$, & AI = AH : AG $= S : a$, atque IK $= \surd(AK^2 - AI^2) = \surd(aa - SS : aa) = \surd(a^4 - SS) : a$. Similia autem Tr. AIK, MAG, dant IK [$\surd(a^4 - SS) : a$] : AI [$S : a$] = AG [a] : AM [$Sa : \surd(a^4 - SS)$] = EN. Igitur AEN $= \int Sadx : \surd(a^4 - SS)$ = AO $= ay$. Itaque $y = \int Sdx : \surd(a^4 - SS)$; & $dy = Sdx : \surd(a^4 - SS)$.

Hanc fuisse Auctoris Analysin ex N°. LXVI liquet. In qua tamen nonnulla corrigenda videntur, præsertim, quod ad unius duntaxat fibræ ωy tensionem attenderit, cum tamen omnes fibræ quæ crassitiem Qy constituunt, extendantur, imo potius comprimantur interiores, dum exteriores extenduntur. De quibus videsis Nos. LXVI & CII.

(d) Pondus Z agens per vectem AE, laminæ cujus longitudo $= b$ inducit

N.LVIII. *Scholia* & *Corollaria*. 1. Si lamina inflexa RQA loco puncti R firmetur alicubi in Q, resecta portione RQ, servabit reliqua ab eadem potentia inflexa eandem curvaturam AQ.

2. Quin & si curva RQA, rotata circa RZ, genuerit a parte opposita aliam Rq similem & eandem secum, sed inverse positam, & lamina cogitatione producta ac loco puncti R in q firmata fuerit, retinebit aucta & eadem potentia compressa eandem curvaturam AQRq.

3. Porro si segmentum quodvis curvæ AQ rotatum circa rectam Qn ipsi normalem in Q, producat in parte opposita simile & æquale segmentum Qa, formabunt ambo segmenta AQa *Arcum* proprie dictum, qui posito retinaculo in Q tenditur a duabus potentiis, extremitati utrique ad rectos applicatis, & singulis ipsi Z æqualibus. Idem intellige de Arcubus formatis rotatione Curvæ integræ AQR, vel auctæ portione Rq, circa rectam eidem in R, vel q normalem; unde triplex habetur Arcus: Diminutus, Plenus, Auctus. *Diminutus*, quem formant duo segmenta minora Curva AQR: *Plenus*, quem æqualia: *Auctus* quem majora; & hoc discrimine cognoscuntur, quod rectæ tangentes utramque extremitatem Arcus diminuti ad partes ejus convexas, aucti ad concavas, pleni ad neutras inclinant, sed sibi mutuo parallelæ sunt.

4. Eadem quoque curvatura AQa gaudere consentaneum est *Assulas* illas, ex quibus Dolia conficiuntur: unde sequitur, neminem doliorum capacitatem, quæ vulgo pro Sphæroidibus ellipticis habentur, rite mensurasse; cum nulla ratione asseratur, asseres hosce curvari in ellipses.

5. Si directio ponderis, vel cujusvis potentiæ inflectentis, ad lami-

ducit tensionem EF, agendo vero per vectem AB = RZ, eidem inducit tensionem BC. Ergo laminæ SY, cujus longitudo SX, agens per eundem vectem, inducit tensionem ST = BC × SX : *b*, [sunt enim, cæteris paribus, tensiones ut laminarum longitudines]. Atqui *b* = *aa* : *c* = ABC : QY = ABC : SR. Ergo ST = BC × SX × SR : ABC, hoc est, ST : BC = SX × SR [SY] : ABC.

laminam, ejusve tangentem in puncto appensionis sit obliqua; nascetur Curva paululum diversa ab AQR, quam tamen eadem facilitate determinare possum. Sed nolo nimium evagari. (e) N.LVIII.

6. Rectangulum sub radio circuli osculantis laminam Qn, & respondente applicata EF, æquatur constanti spatio ABC = AD (f). Hinc dicti radii respectivis applicatis reciproce proportionantur; & cum iidem quoque linearum curvedines reciproce mensurent, erunt curvedines inflexæ laminæ AQR respectivis EF directe proportionales: quapropter in A puncto applicatæ potentiæ curvedo nulla est [quod alias in puncto flexus contrarii fieri consuevit;] hinc eo major, quo remotior unaquæque portio laminæ a linea directionis potentiæ: maxima est in R, unde iterum versus q decrescit, &c. saltem si, cum viribus tendentibus AE, simul quoque crescant tensiones EF; quo quidem nihil universalius verum existit.

7. Idcirco, data lege tensionum invenire curvam Elasticam, in abstracta geometria aliud nihil est, quam data curva AFC reperire aliam AQR, in qua radii circulorum osculantium reciproce proportionentur respectivis applicatis alterius. Facillima autem est conversa hujus: Data curva Elastica, una cum radiis circulorum eam osculantium, invenire legem tensionum, quam Natura in ejus productione observat: utpote ad quem effectum tantum requiritur, ut tertia proportionalis ad radium Qn & constantem quandam AG, axi AB respective applicetur, ad habendam statim EF. (g)

Consectantur hinc Theoremata quædam universalia prorsus nova. Nam

8. In omni Curva AQR, summa tertiarum proportionalium ad radios circulorum osculantium & constantem quandam rectam

AG,

(e) Vide Num. LXVI. Art. II.

(f) $EF \times Qn = t \times dx\,ds : ddy = aa = ABC = AD$. Vid. Not. c.

(g) Nam, quia $EF \times Qn = AD = AG^2$, est $Qn : AG = AG : EF$.

N.LVIII. AG, applicatarum ad axem Curvæ AB, efficit ſpatium quodpiam ABC = rectangulo ſub una applicatarum EF & reſpectivo circuli oſculantis radio Qn = quadrato AG (h). Quod ipſum quoque per initio demonſtratum Theorema evincitur: Sic enim AE = x, EQ = y, AQ = s, AG = a; erit per memoratum Theorema, Qn = $dx\,ds : ddy$, tertia proportionalis ad hanc & AG, nempe EF = $aaddy : dxds$, quæ ducta in dx gignit differentiale ſpatii ABC, $aaddy : ds$, cujus proin integrale $aady : ds$, efficit indefinite ſpatium AEF; eſt vero pro ſpatio toto ABC, $aady : ds$ = [ob $dy = ds$ in extremitate R] aa = EF × Qn.

9. Sed & ſpatium quodvis intermedium FEef, duabus applicatis EF, ef, interceptum, æquale rectangulo ſub AG, ceu ſinu toto, & differentia ſinuum duorum angulorum, quos tangentes rectæ Qp, rd, in punctis Curvæ Q & r, ad axem AB conſtituunt (i).

10. Iiſdem poſitis quæ prius, Tangens Qp eſt ad ſubtangentem pP, ut ſpatium ABC ad ſpatium AEF: cum enim ſpatium AEF repertum ſit $aady : ds$, erit ds ad dy, hoc eſt, Qp ad pP, ſicut aa, hoc eſt, ABC ad AEF.

11. Quin etiam Qp, pP, PQ, proportionales ſunt ipſis AK, AI, IK, vel MG, MA, AG; ſimiliaque ſunt Triangula QpP, KAI & GMA (k).

12. Quod ſi dictæ tertiæ proportionales ad radios circulorum oſculantium & conſtantem AG, applicentur ad axem alterum curvæ AZ, naſcetur ſpatium AγcZA = ABCFA = AD. Sed AEF ad APγ ut pP, ad differentiam reliquorum laterum Trianguli QpP (l).

13. Si

(h) $\int AG^2 . dx : Qn = \int EF . dx =$ AEF, quod tandem eſt ABC = EF × Qn.

(i) Quoniam AEF = $aady : ds$ = aa × Sinum anguli PQp; & Aef = aa × Sinum anguli rrd, ſeu rde, eſt EFfe = AEF — Aef = aa × differentiam Sinuum, &c.

(k) Qp:Pp:QP = $ds:dy:dx = aa : S : \surd(a^4 - SS) = a:(S:a):\surd(aa - SS : aa)$ = AK: AI: IK = MG: MA: AG.

(l) $\int EF . dy = \int t dy = \int(t dx \int t dx :$ $\surd$

13. Si punctum h sit in caustica Elasticæ ex radiis ipsi PQ, vel AB, parallelis, producaturque radius circuli osculatoris Qn in b, ad occursum ipsi AZ; erit Qn ad Qb ut spatium AEF ad circumscriptum rectangulum, ut Qh ad $\frac{1}{2}$ QP (m). N. LVIII.

14. Ut radius AG, ad arcum circuli GK: sic laminæ crassities RS vel AV ad excessum longitudinis convexæ yV supra concavam QA: unde excessus iste arcui GK proportionalis (n).

15. Quoties curva Elastica AQR est ex numero geometricarum, hoc est, algebraicarum [sic enim illas posthac appellabo in honorem *Viri Celeberrimi*, qui hoc nomine designatas cupit,] curva quoque Tensionum AFC est algebraica, & simul spatium ABC quadrabile: sed non vicissim (o).

16. Si curva tensionum AFC est algebraica & spatium ABC quadrabile, Elastica AQR nunc est algebraica, nunc mechanica: alge-

$\sqrt{(a^4 - SS)}) = \int(SdS : \sqrt{(a^4 - SS)}) = aa - \sqrt{(a^4 - SS)}$. Ergo, quando $S =$ ABC $= aa$, tunc $\int$EF. dy, quod est AγcZA, fit $= aa =$ AD. Ubique autem AEF [S]: APγ $[aa - \sqrt{(a^4 - SS)}] = \frac{S}{a} : a - \sqrt{(aa - SS : aa)} =$ AI : AK — IK $=$ Pp : Qp — Pp.

(m) Qh : $\frac{1}{2}$QP $=$ Qf : QP $=$ Qn : Qb $= \frac{dxds}{ddy} : \frac{xds}{dy} = \frac{dx}{x} : \frac{ddy}{dy} = \frac{dx}{x} : \frac{tdxds : aa}{Sds : aa} = S : tx =$ AEF ad rectang. circumscriptum.

(n) Excessus convexitatis Vy supra concavitatem AQ $= \int \Omega y = \int tds : b = \int ctds : aa = \int ctdy : S = \int ctdx : \sqrt{(a^4 - SS)} = c\int dS : a\sqrt{(aa - SS : aa)} = \frac{c}{a}$ per arcum circuli, cujus radius a [AG], sinus $S : a$ [AI] $= \frac{c}{a}$ per arcum GK. Ergo, ut radius a [AG] ad arcum GK, sic c [RS] ad excessum convexitatis supra concavitatem. Generalis autem est *condescriptarum* proprietas ut earum differentia vel summa æquetur arcui circuli, quam primus demonstravit *Joh.* BERNOULLI, Frater Auctoris.

(o) Ubi curva AQR est algebraica, habetur $dy : dx$, algebraice. Ergo algebraice data est ratio $S : \sqrt{(a^4 - SS)}$, atque $SS : (a^4 - SS)$, & $SS : a^4$, ac $S : aa$. Igitur spatium ABC est quadrabile. Datur etiam algebraice, ratio $ddy : dxds$, seu $t : aa$. Ergo t datur algebraice, hoc est, curva AFC algebraica est.

N.LVIII. algebraica, si insuper curvilineum AEN quadrabile; mechanica, si secus. Quod si curva AFC sit quidem algebraica, at non contineat spatium quadrabile, altera AQR non alia est, quam mechanica secundi generis, hoc est, quæ ad sui constructionem supponit quadraturam spatii mechanici primi generis; nisi forte quadraturæ spatiorum AEF & AEN a se mutuo dependeant, quo casu Elastica non nisi primi generis mechanica est.

II. *Specialius.*

Si curva tensionum AFC sit paraboloides cujusvis gradus, hoc est, si tensiones EF sint in quacunque ratione multiplicata, seu submultiplicata virium tendentium AE [pro cujus rationis indice pono m] constructio curvæ Elasticæ sic contrahetur: Facto super A quadrante circuli ABi, capiatur in ejus radio Ag, quæ sit ad AB & AE eo ordine proportionalis, quem indicat numerus $m+2$, indeque excitata perpendiculari gl, junctaque lA, eique facta parallela iu, applicetur in E recta $EN = Au$: sic nascitur curvilineum AEN, cui si fiat æquale rectangulum AO [postquam AG æqualis sumpta fuerit ipsi AB] productis OP, FE, habebitur in optata curva punctum Q. Quod pondus Z spectat, cujus ope laminæ elasticæ hæc curvatura inducatur, tantum in A appendendum est, quantum possit in distantia RZ vel AB extendere frustum laminæ SY per Triangulum RST, quousque scilicet Rectangulum sub RZ & ST ad Rectangulum SY fiat, sicut $m+1$ ad unitatem. (p)

Scholia

(p) Sit $AB = X$, $BC = T$, & curva tensionum AFC ejus naturæ, ut sit ubique $= X^m : x^m = T:t$, aut $t = Tx^m : X^m$. Igitur $S = \int tdx = Tx^{m+1} : (m+1) X^m = tx : (m+1)$. Æquatio igitur curvæ AQR, quæ generaliter erat $dy = Sdx : \sqrt{(a^4 - SS)}$, in hoc casu speciali erit $dy = txdx : (m+1) \sqrt{(a^4 - ttxx : (m+1)^2)} = txdx : \sqrt{((m+1)^2 a^4 - ttxx)} = $ [quia $aa = ABC = TX : (m+1)$] $= txdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)}$.

Hinc

Scholia & *Corollaria*. 1. Tangens Qp est ad subtangentem pP, sicut recta AB ad nuper acceptam Ag. (q) N.LVIII.

2. Recta Qb Curvæ perpendicularis, quarta est proportionalis ad tres Ag, AE & AB. (r)

3. Radius osculantis circuli Qn ad totam perpendicularem Qb [& proinde quoque Rm ad RZ] est sicut 1 ad $m+1$.

4. Et radius reflexus Qh ad incidentem PQ, ut 1 ad $2m+2$. (s)

5. Si sit curva interminata Rβ, talis, ut applicata ei recta βQP ubique sit tertia proportionalis ad AE & AB, erit curvilineum AZR$\beta\alpha$A ad quadrantem ABi, ut & pars AP$\beta\alpha$A ad sectorem Ali; sicut 2 ad $m+1$. (t)

6. Ra-

Hinc constructio: Nam cum sit $AB^{m+1} : AE^{m+1} = AB : Ag$, erit $Ag = AE^{m+1} : AB^m = x^{m+1} : X^m = tx : T$, & $gl = \sqrt{(AB^2 - Ag^2)} = \sqrt{(XX - ttxx : TT)} = \sqrt{(TTXX - ttxx)} : T$. Similia autem Triangula Agl, Aiu dant gl : Ag = AB : Au. Ergo Au [EN] $= Xtx : \sqrt{(TTXX - ttxx)}$. Ergo AEN $= \int Xtxdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)}$ = AO = AB × AP = Xy. Igitur $y = \int (txdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)})$ & $dy = txdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)}$.

Pondus autem Z generaliter tale esse debet, ut agens per vectem RZ, laminæ SY tensionem inducat ST, quæ sit ad BC, ut SY ad ABC = AB. BC : $(m+1)$, vel, æquando media extremis, & dividendo per BC, ut sit ST × AB [ST × RZ] $= (m+1)$ SY.

(q) Qp : Pp $= ds : dy =$ [quia $Sds = aady$] $aa : S = \frac{TX}{m+1} : \frac{tx}{m+1} = TX : tx = T : \frac{tx}{T} =$ AB : Ag.

(r) Pp : Qp = [Ag : AB =] AE : Qb.

(s) Generaliter, Qn : Qb = AEF : AE. EF [Vide Not. m]. Specialiter, Qn : Qb = AEF [AE × EF : $(m+1)$] : AE × EF = $1 : m+1$.
Et quia Qh : $\frac{1}{2}$QP = Qn : Qb [Vid. Not. n] erit Qh : QP = $1 : 2m+2$.

(t) Est Pβ $= X^2 : x$. Ergo elementum spatii AP$\beta\alpha$A $= X^2 dy : x = X^2 tdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)}$. Elementum vero sectoris Ali $= \frac{1}{2}$AB per elementum arcus $il = \frac{1}{2}AB^2 \times dAg : gl = \frac{1}{2} XX . (m+1) x^m dx : \sqrt{(TTXX - ttxx)} = \frac{1}{2}(m+1) XXtdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)}$. Ergo elem. spatii AP$\beta\alpha$A ad elem. sectoris Ali, ut 1 ad $\frac{1}{2}(m+1)$ vel ut 2 ad $m+1$. Et in eadem ratione sunt ipsa spatia, quæ simul incipiunt & desinunt.

N.LVIII. 6. Radius quadrantis Ai ad arcum il eſt, ſicut Laminæ craſſities RS vel AV ad exceſſum, quo convexa ejus longitudo yV ſuperat concavam QA (u).

7. Ex infinitis Paraboloidibus [qualium AFC hic una fingitur, quæque pro curva tenſionum poſſunt accipi,] una ſola eſt, quæ curvam laminæ AQR reddit algebraicam: una ſola, quæ rectificabilem; una ſola, quæ ſpatium ejus efficit quadrabile: quamvis nec hæ ipſæ proprie paraboloidum nomen mereantur. (y)

Nam 1°. ſi $m = 0$, ſive, ſi tenſiones ſint in ratione, ut ſic dicam, nulliplicata virium tendentium, hoc eſt, ſi EF, BC ſint æquales & paraboloides ABC degeneret in parallelogrammum, Curva laminæ abibit in circulum; prout evidens admodum eſt, cum ob tenſionum æqualitatem nulla ratio ſit, cur majorem minoremve curvedinem in una, quam in altera parte induat.

2°. Si

(u) Eſt generaliter laminæ craſſities ad exceſſum convexitatis ſupra concavitatem, ut radius a ad arcum cujus ſinus $S:a$, [Not. n], vel ut radius $aa:1$, ad arcum cujus ſinus $S:1$. Specialiter autem eſt $aa = TX:(m+1)$ & $S = tx:(m+1)$. Ergo radius ad ſinum ut TX ad tx, vel ut X [AB] ad $tx:T$ [Ag]. Quare laminæ craſſities ad exceſſum convexitatis ſupra concavitatem, ut AB ad arcum il, cujus ſinus Ag.

(y) 1. Si curva AQR, cujus æquatio oſtenſa eſt $dy = txdx : \surd(TTXX - ttxx) = Tx^{m+1}dx : X^m \surd(TTXX - TTx^{2m+2} : X^{2m}) = x^{m+1}dx : \surd(X^{2m+2} - x^{2m+2})$ ſit algebraica, neceſſe eſt differentialem $x^{m+1}dx : \surd(X^{2m+2} - x^{2m+2})$ eſſe integrabilem. Ea vero nequit integrari niſi quando eſt $m+1$ æqualis fractioni affirmativæ, cujus denominator impar, aut fractioni negativæ, cujus denominator par. Illa autem fractio, ſi ſit AFC paraboloides, hoc eſt, ſi m ſit numerus integer, alia eſſe nequit quam $\frac{1}{1}$. Ergo curva AQR non eſt algebraica, niſi $m = 0$. Eo autem in caſu æquatio abit in hanc $dy = xdx : \surd(XX - xx)$ aut integrando, $a - y = \surd(XX - xx)$, quæ eſt ad circulum, centro Z, radio ZR, vel ZA deſcriptum.

Quod ſi, non ſolum paraboloides, ſed etiam hyperboloides pro curvis tenſionum AFC ſumi poſſe concedatur, tunc innumeræ curvæ AFC dabunt curvam AQR algebraicam.

2. Quo-

2°. Si $m = -\frac{1}{2}$, id eſt, ob indicem negativum, ſi tenſiones ponantur in ratione ſubduplicata reciproca virium tendentium [quo caſu Curva AFC verius eſt hyperboloides] naſcetur Curva laminæ rectificabilis; tota quippe AQR dupla rectæ AB, ſicut portio ejus RQ dupla mediæ proportionalis inter AB & BE. At talis hypotheſis, qua creſcente vi tendente minuatur tenſio, & decreſcente augeatur, naturæ legibus & conſuetudini ubique adverſatur. N. LVIII.

3°. Si denique $m = 1$, quæ vulgo recepta eſt hypotheſis, hoc eſt, ſi tenſiones ſint in ſimplici ratione virium [quo caſu curvilineum ABC abit in Triangulum] complectetur ſic curvata lamina ſpatium quadrabile. De hoc vero nunc fuſius.

III. *Specialiſſime.*

Vulgaris [ut modo dixi] eſt hypotheſis, *extenſiones viribus tendentibus proportionales eſſe:* qua eſt uſus olim Celeberrimus *Dnus*

Ffff 2

2. Quoniam $ds = aady : S = (TX : (m+1) \times (x^{m+1} dx : \surd(X^{2m+2} - x^{2m+2}) : (Tx^{m+1} : (m+1) X^m) = X^{m+1} dx : \surd(X^{2m+2} - x^{2m+2})$; toties erit curva AQR rectificabilis, quoties differentialis hæc poterit integrari. Ea vero poteſt ſemper integrari, quando $2m+2$ fractio eſt, hoc eſt, quando $m = \frac{1}{2r} - 1$, ſumendo r pro numero quocunque integro affirmativo; ſpeciatim ſi $r = 1$, erit $m = -\frac{1}{2}$, ſeu $t = 1 : \surd x$, & Elaſticæ curvæ æquatio $dy = dx \surd x : \surd(X - x)$, quæ eſt ad Cycloidem, axe AB, ſemibaſi AZ deſcriptam. Hujus autem longitudo, ut notum, æqualis eſt duplæ diametro AB circuli genitoris & portio quævis cujus applicata EQ æqualis eſt duplo mediæ proportionalis inter AB & BE.

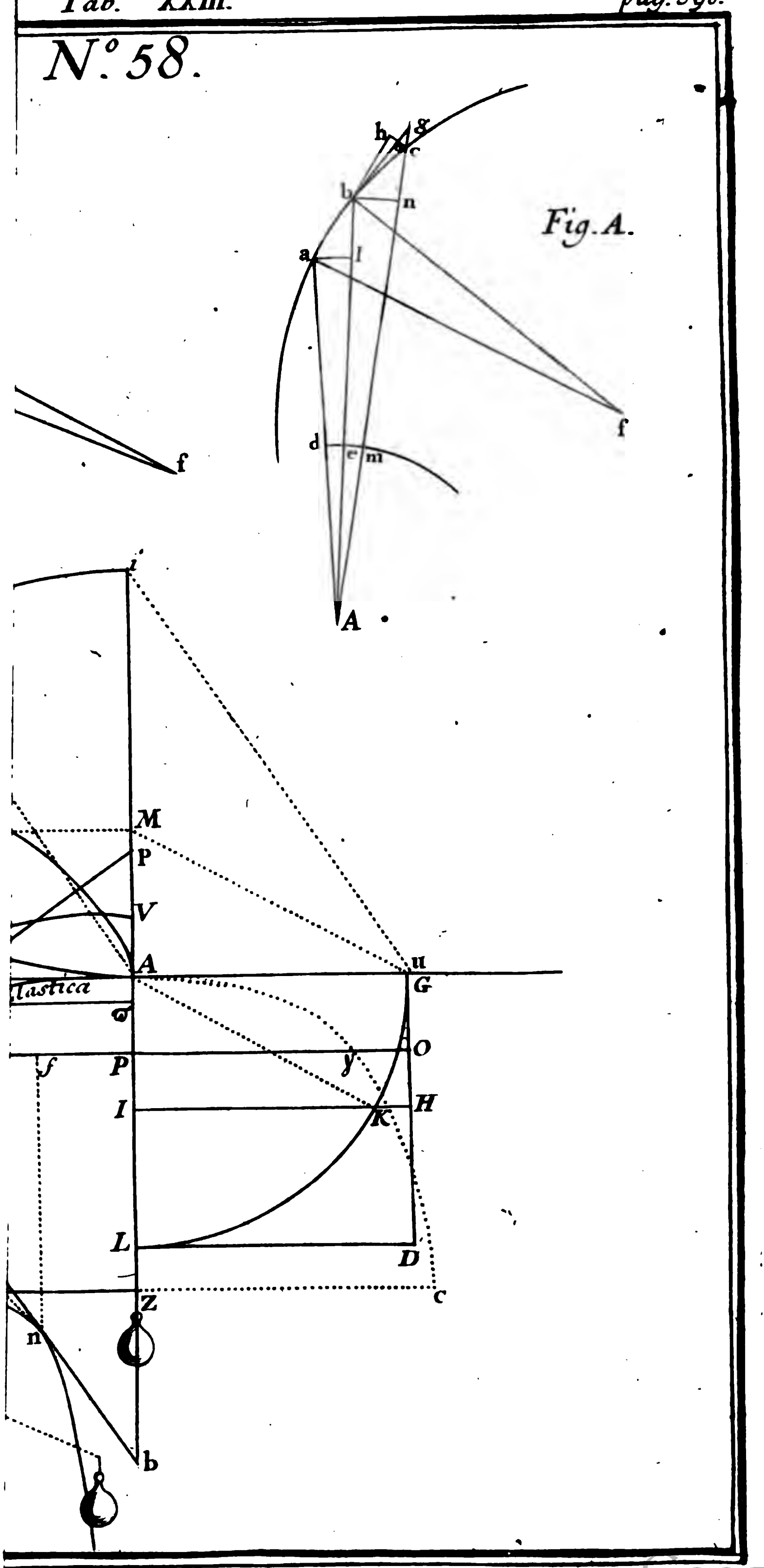
3. Spatium AQP $= \int x dy = \int (x^{m+2} dx : \surd(X^{2m+2} - x^{2m+2})$ quadrabile eſt, ſi hæc quantitas integrabilis. Integrari autem poteſt, quando $m = (1-2r) : (1+2r)$ vel $-(6+2r) : (4+2r)$, ubi r numerum quemcunque integrum, & ipſum o repræſentat. Fac $r = 0$, & $m = (1-2r) : (1+2r)$ dat $m = 1$, qui caſus eſt ſpecialiſſimus de quo infra fuſius.

N.LVIII. *Dnus* LEIBNITIUS in acutissima sua lucubratione *De Resistentia solidorum*; & ipsemet ego in præsente materia, priusquam generalem Problematis constructionem adinvenissem. Quapropter operæ pretium existimo, naturam & proprietates Curvæ nostræ in hac hypothesi paulo specialius exponere: quanquam pro ipsa hypotheseos hujus, sicut & pro alterius cujusvis veritate multum militare nolim; persuasum potius habens, nullam constantem tensionum legem in Natura observari, sed eam pro diversa corporum textura diversam existere; id quod experimenta, tum nostra, tum aliorum abunde confirmare videntur, quorum plurima prælaudatus Author industrius *Magisterii naturæ & artis*, loco citato, recenset.

Constructio. Per punctum E, [*Fig*. 3] sumptum ubivis in radio AB circuli BiGL, agantur recta Ei & radio perpendicularis EF; e qua producta [si opus sit] abscindatur EN, quæ sit ad AB, sicut quadratum AE ad rectangulum FEi [quod fieri potest per generalem constructionem, sumendo Ag tertiam proportionalem ad AB & AE, & ducendo gl, Al & huic parallelam iu: vel si videatur commodius, ducendo Ff parallelam AB & secantem Ei in f, junctæque fA agendo parallelam ac, abscindentem ex Ei partem Ea = EA; utrovis enim modo repertæ Au vel Ee sumenda æqualis EN:] sic erit punctum N ad curvam AN claudentem spatium AEN; cui si porro ad radium AG constituatur æquale rectangulum AO, & producantur NE, OP ad mutuum occursum in Q, erit punctum Q in curvatura optata AQR; ad quam inducendam Laminæ tantum ei in A pondus appendendum, quanto possit [in *Figura* 2.] extendi SY donec rectang. RZ × ST, fuerit duplum rectang. SY. Sic ut pateat, eam non secus atque catenariam transcendentem esse, & ad sui constructionem quadraturam spatii curvilinei requirere (*a*).

Cele-

(*a*) Si sint tensiones viribus tendentibus proportionales, fiat [Not. p] $m = 1$, vel $t = x$ & $T = X$, eritque curvæ Elasticæ æquatio $dy = xxdx : \sqrt{(X^4 - x^4)}$ vel $xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ ponendo nunc $a = AB = X$. Quæ, secundum Auctoris præscripta. construitur, capiendo EN [$axx : \sqrt{}$


N.° 58.
Fig. A.
h
g
c
b
n
a
l
f
d
e
m
A
f
i
M
P
V
A
u
G
lastica
O
y
P
f
I
K
H
L
D
Z
c
n
b

Celeberrimus D. LEIBNITIUS ingeniosissimum modum præscribit, construendi Catenariam ope solius Logarithmicæ, absque suppositione quadraturarum; eoque sane perfectissimum in Transcendentibus construendi genus exhibet: dolendum tantum quod non sit universale; nec enim succedit in iis curvis, quæ ad sui constructionem Circuli quadraturam requirunt; plurimæque dantur aliæ, quæ mechanicæ cum sint, nec tamen a Circuli, nec ab Hyperbolæ tetragonismo [hoc est, a Logarithmicæ descriptione] dependent. Potest vero certo charactere cognosci, utrum curva aliqua mechanica ope Logarithmicæ construi possit, necne. Posita enim Æquatione differentiali curvæ $ady = tdx$; [ubi dx & dy elementa coordinatarum designant, a quantitatem constantem, t quantitatem aliam quamcunque, quam ex indeterminatis sola x ingrediatur;] Dico, si qua arte reperiri possit curva algebraica, cujus x abscissam denotet, cujusque subtangens tertia sit proportionalis ad t & a, certo secuturum, curvam optatam ope Logarithmicæ construibilem esse; cum ad hoc præstandum nihil aliud requiratur, quam ut singulis applicatis curvæ algebraicæ sumantur æquales applicatæ in Logarithmica [cujus subtangens sit $= a$], & ex iis [productis, si opus] resecentur singulæ abscissæ, ad habenda totidem puncta, per quæ optata curva transire debet. Quod si vero nulla detur curva ex algebraicarum numero, cujus subtangens dictam tertiam proportionalem N.LVIII.

$\sqrt{(a^4 - x^4)}$] quæ sit ad AB [a] ut AE² [xx] ad rect. FEi [$FE \times Ei = \sqrt{(aa - xx)} \times \sqrt{(aa + xx)} = \sqrt{(a^4 - x^4)}$]; vel sumendo Ag [$xx : a$] tertiam proportionalem ad AB [a] & AE [x], ducendo gl, [$\sqrt{(aa - x^4 : aa)} = \sqrt{(a^4 - x^4)} : a$], Al, & huic parallelam iu, quæ dabit Au [= EN] $= axx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ propter gl : Ag = Ai : Au; aut etiam, ducendo Ff parallelam AB, quæ dabit Ef $= \sqrt{(a^4 - x^4)} : a$, propter Ai [a] : Ei [$\sqrt{(aa + xx)}$] = EF [$\sqrt{(aa - xx)}$] : Ef; capiendo Ea = EA = x & agendo ipsi Af parallelam ac, quæ ex EA abscindet Ee $= axx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, propter Ef [$\sqrt{(a^4 - x^4)} : a$] : EA [$x$] = Ea vel EA [$x$] : Ec, vel EN. Ita enim erit ay = AG × AP = AO = AEN $= \int axxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, adeoque $y = \int xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$.

Pondus autem Z tale esse debet [Not. p] ut sit ST × RZ = $(m+1)$ SY = 2SY.

N.LVIII. nalem æquet, frustra quoque quis constructionem imperatam solius ope Logarithmicæ molietur (*b*). Quocirca si in nostra curva [cujus æquatio differentialis est $xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$] præstandum esset quod Acutissimus Geometra præstitit in Funicularia, indagandum prius foret, num curva quædam detur algebraica, quæ subtangentem habeat $a\sqrt{(a^4 - x^4)} : xx$; quod aliis indagandum relinquo, ut leve habeant specimen, quo universales suas, quas jactant, tangentium methodos inversas explorent. Ego ob graves causas suspicor curvæ nostræ constructionem, a nullius Sectionis conicæ seu quadratura, seu rectificatione dependere. Sed pergo ad ejus præcipuas affectiones:

1. Ducta tangente Qp, erit subtangens Pp quarta proportionalis ad AB, AE & EN. Ipsa vero EN quarta proportionalis ad AB, AE & tangentem Qp: ideoque

2. Inter tangentem Qp & subtangentem Pp media est proportionalis EN. Hinc Pp: Qp = AE^2 [QP^2] : AB^2 = Ag: AB. (*c*) Et hæc est proprietas characteristica Curvæ, quam texi involucro *Mense Junio* 1691 *, cujus sensus hic est: *Portio axis applicatam inter & tangentem est ad ipsam tangentem, sicut quadratum applicatæ ad constans quoddam spatium.* Logogryphi tunc adhibiti ratio consistit in tribus alphabetis vicariis, ex quibus litteræ alternatim desumptæ sunt: eædem vero ad alphabetum naturale ita referuntur, ut hujus litteræ *a*, respondeat vicarii

(*b*) Si sit curva algebraica, cujus x abscissa, u ordinata, subtangens [$udx : du$] $= aa : t$, erit $aadu : u = tdx = ady$, adeoque $y =$ log. u, atque ideo curva, cujus æquatio est $tdx = ady$ poterit construi per logarithmicam. Sed de hujus methodi universalitate, vide Nos. LXIV. & LXVI.

(*c*) $Pp = xdy : dx = x^3 : \sqrt{(a^4 - x^4)} = x . (axx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) : a =$ AE × EN : AB.

$Qp = xds : dx = aax : \sqrt{(a^4 - x^4)} = a . (axx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) : x =$ AB × EN : AE.

Ergo Pp × Qp = EN^2. Ac Pp : Qp $= \frac{AE \times EN}{AB} : \frac{AB \times EN}{AE} = AE^2 : AB^2 = \frac{AE^2}{AB}$ [Ag] : AB.

* N°. XLII. pag. 452.

vicarii primi *b*, ſecundi *d*, tertii *g*; cæteris elementis ordine continuo ſuccedentibus. Id quod ipſum Logogryphum tentanti, ex retecta quam involvit propoſitione obſcurum eſſe non poteſt. N.LVIII.

3. Spatium Elaſticum RQPZ æquale ſemiſſi rectang. FEi, idemque proportionale rectæ gl: totum ergo ſpatium AQRZA æquatur ſemiquadrato ex AB (*d*).

4. Curvedines inflexæ Laminæ in R, Q, ſunt proportionales applicatis RZ, QP (*e*).

5. Recta Qb curvæ perpendicularis tertia eſt proportionalis ad AE & AB. (*f*)

6. Ejuſque ſemiſſis eſt radius oſculantis circuli Qn. Ambæ ergo ad AB applicatæ Hyperbolas efficiunt. (*g*)

7. Recta Rm ſumpta ad principium uſque curvæ mn, e cujus evolutione principalis deſcribitur, æquatur ſemiſſi ipſius RZ vel AB.

8. Ipſa vero curva mn quarta eſt proportionalis ad AE, EB & ſemiſſem AB. (*h*)

9. Si ex radio reflexo incidentis QP abſcindatur Qh, quarta pars ipſius QP, erit punctum h in Cauſtica ex radiis ipſi AB parallelis; ſic ut Cauſtica Ah æquetur $\frac{5}{4}$ AE. (*i*)

10. Spatium

(*d*) APQ $= \int x\,dy = \int (x^3 dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) = A - \frac{1}{2}\sqrt{(a^4 - x^4)}$. Fiat $x = 0$, & erit APQ $= 0 = A - \frac{1}{2}\sqrt{a^4}$, adeoque $A = \frac{1}{2}\sqrt{a^4} = \frac{1}{2}aa$. Fiat $x =$ AB $= a$, & APQ $[\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}\sqrt{(a^4 - x^4)},]$ evadit AZR $= \frac{1}{2}aa$. Igitur PQRZ $=$ AZR $-$ APQ $= \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}\sqrt{(a^4 - x^4)} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^4 - x^4)} = \frac{1}{2}\sqrt{(aa - xx)} \times \sqrt{(aa + xx)} = \frac{1}{2}$ FEi $= \frac{1}{2}a \times \sqrt{(a^4 - x^4)} : a = \frac{1}{2}$ AB $\times$ gl.

(*e*) Curvedines ſunt inverſe ut radii oſculi; Ergo directe ut $ddy : dxds = t : aa$ [Not. c] $= x : aa$, proportionales applicatis x.

(*f*) Qb $=$ AB $\times$ AE : Ag [Not. r] $= ax : (xx : a) = aa : x =$ AB^2 : AE.

(*g*) Qb : Qn $= m + 1 : 1$ [Not. ſ] $= 2 : 1$. Ergo Rm $= \frac{1}{2}$ RZ $= \frac{1}{2}$ AB.

(*h*) Curva mn $=$ Qn $-$ Rm $= \frac{1}{2}$AB^2 : AE $- \frac{1}{2}$ AB $= \frac{1}{2}$ AB (AB $-$ AE) : AE $= \frac{1}{2}$ AB $\times$ BE : AE.

(*i*) Qh : QP $= 1 : 2m + 2$ [Not. ſ] $= 1 : 4$. Et Curva Ah $=$ PQ $+$ Qh $= \frac{5}{4}$PQ $= \frac{5}{4}$AE.

N.LVIII. 10. Spatium quoque causticum AhrZA admittit quadraturam, quippe æquale $\frac{7}{8}$ spatii Elastici AQRZA, hoc est, $\frac{7}{16}$ quadrati ex AB (k).

11. Spatium vero ab Evoluta mn comprehensum a quadratura hyperbolæ dependet. Posito enim $AB^2 = 8$, applicataque nx, quæ sit ad mZ, sicut ·2 ad $\sqrt{5}$, exprimetur spatium mnxZ per seriem [alias spatium hyperbolicum, ut vulgo notum, designantem] $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ &c. diminutam $\frac{1}{2}$ unitatis. Nota spatium ntbx infinitum esse. (l)

12. Omnes portiunculæ curvæ AQ ductæ in respectivas applicatas QP, vel AE, aut [quod unum idemque,] omnes hujus † particulæ in tangentes respectivas Qp, spatium conficiunt quod Sectori circuli Ali æquatur: nimirum, si radius circuli AB sit 1, ejusque portio Aq intercepta centro A ductaque recta lL dicatur t, utrumlibet spatium exprimetur per seriem: $t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9$, &c. ($m$)

† *Scil. applicatæ.*

13. Hinc Sector Ali ad curvam AQ applicatus, producit distantiam Centri gravitatis curvæ ab axe AP (n). Et superficies Conoidis geniti rotatione curvæ AQ circa axem AP, ad Sectorem Ali se habet, ut circumferentia circuli ad radium, hoc est, æquatur arcui li ducto in semiperipheriam iGL. (o)

14. Distan-

(k). Nam triangulum, quod inter radios duos reflexos vicinissimos & exiguum curvæ AQR arcum continetur, sub-octuplum est parallelogrammi quod inter duos radios incidentes intercipitur, cum utriusque æqualis sit altitudo dy, hujus basis illius basi quadruplo major. Ergo area AhrRQA areæ AZR est octava pars. Igitur AhrZA $= \frac{7}{8}$ AZR $= \frac{7}{16} AB^2$.

(l) Vide Num. CI. Prop. 60, quæ ultima est.

(m) $\int x ds$, vel [Not. c] $\int$ Qp. $dx = \int (aaxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) =$ sectori circuli cujus radius $a = AB$, sinus $xx : a = Ag$, hoc est sectori Ali. Est autem Aq = tangenti semissis arcus il. Quare per N[i]. LXXIV. Prop. 45. Series $t - \frac{1}{3}t^3 +$ &c. hujus sectoris aream exprimit.

(n) Notissimum enim est distantiam centri gravitatis curvæ AQ ab axe AP, inveniri, si summa momentorum singularum particularum curvæ [$\int xds =$ Ali] applicetur ad, vel dividatur per ipsam curvam AQ.

(o) Hujus conoidis superficies =

c

14. Distantia Centri gravitatis spatii Elastici AQP ab axe AB invenitur, si triens cubi rectæ AE, mulctatus solido sub tribus EF, Ei & AP comprehenso, adplicetur ad quadratum AB, truncatum rectangulo FEi. Ejusdem vero distantia ab AP habetur, si triens solidi sub curva AQ & quadrato AB, mulctati solido sub tribus EF, Ei & EA comprehenso, adplicetur ut ante. Idcirco totius spatii AQRZA centrum gravitatis ab axe AB distat triente rectæ AB; & ab AZ triente curvæ AQR. Hinc mensurantur solida nata ex conversione figuræ tam circa rectam AB quam AZ. (p)

15. Ipsa vero Curva AQ reperitur, si descripta hyperbola æquilatera ids, cujus centrum A, & semi-latus transversum Ai, triplum solidum quod fit ex ductu frusti hyperbolici AidE in segmentum circuli AiFE, multatum solido comprehenso sub tribus EF, Ed vel Ei, & EA, adplicari intelligitur ad duplum quadratum ex AB. (q)

16. Series

$\frac{c}{r}\int x\,ds = \frac{c}{r} \times$ Ali [ubi $c:r$, rationem exprimit peripheriæ ad radium]. Est autem Ali $= \frac{1}{2}$ Ai $\times$ il. Ergo superficies conoidis $= \frac{c}{2r} \times$ Ai $\times$ il $=$ [posito $r =$ Ai] $\frac{1}{2}c \times$ il.

(p) Distantia centri gravitatis ab axe AB æqualis est $\int xydy : \int xdy$. Est autem $\int xdy = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}\sqrt{(a^4 - x^4)}$ [Not. d], & $\int xydy = y\int xdy - \int dy\int xdy = \frac{1}{2}aay - \frac{1}{2}y\sqrt{(a^4 - x^4)} - \int \frac{1}{2}aady$ [$\frac{1}{2}aay$] $+ \int \frac{1}{2}dy\sqrt{(a^4 - x^4)}$ [$= \int \frac{1}{2}xxdx$, aut $\frac{1}{6}x^3$] $= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}y\sqrt{(a^4 - x^4)}$. Igitur hæc distantia $= (\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}y\sqrt{(a^4 - x^4)}) : (\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}\sqrt{(a^4 - x^4)}) = (\frac{1}{3}x^3 - y\sqrt{(aa - xx)}\sqrt{(aa + xx)}) : (aa - \sqrt{(aa - xx)}.\sqrt{(aa + xx)})$.

Distantia ejusdem centri gravitatis ab axe AP est $\frac{1}{2}\int xxdy : \int xdy = \int(x^4dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) : (aa - \sqrt{(a^4 - x^4)}) = \frac{1}{3}(aa\int(aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) - x\sqrt{(a^4 - x^4)}) : (aa - \sqrt{(a^4 - x^4)}) = \frac{1}{3}(aas - x\sqrt{(a^4 - x^4)}) : (aa - \sqrt{(a^4 - x^4)})$. Hinc si $x = a$, distantia centri gravitatis ab AB $= \frac{1}{3}a$, & ab AP $= \frac{1}{3}s$.

Solidum genitum ex rotatione figuræ APQ super axem AB $= \frac{c}{r}\int xydy = \frac{c}{r}(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}y\sqrt{(a^4 - x^4)})$; at super axem AP $= \frac{c}{2r}\int xxdy = \frac{c}{6r}(aas - x\sqrt{(a^4 - x^4)})$.

(q) AQ $= s = \int(aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)})$ $=$

N.LVIII. 16. Series etiam nostræ inventionis utiliter adhiberi possunt, cum aliæ difficulter hic locum inveniant: Sic posita AB ejusve quadrato = 1, exprimi potest quantitas spatii sBAN, rectæve AZ, vel BR, per seriem

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2.7}+\frac{1.3}{2.4.11}+\frac{1.3.5}{2.4.6.15}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.19}+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.23}+\&c.$$

quantitas vero Curvæ AQR per hanc

$$1+\frac{1}{2.5}+\frac{1.3}{2.4.9}+\frac{1.3.5}{2.4.6.13}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.17}+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.21}+\&c.$$

quarum illam invenio $>$ quam 0. 598 & $<$ quam 0. 601: hanc $>$ quam 1. 308 & $<$ quam 1. 316; sic ut tres istæ lineæ RZ, AZ, AQR, proxime se habeant ut 10. 6. 13. (r) Hujusmodi autem series, quæ diversæ paulo sunt naturæ ab iis, quas Celeberrimus Geometra LEIBNITIUS hinc inde in *Actis* prodidit, & constructu sunt facillimæ, & ad exprimendas quasvis promiscue quantitates, rationales, irrationales & transcendentes pariter accommodæ. Pro reliquis *Vir eximius*, superiori anno, methodum ingeniosissimam profecto & Auctore suo dignissimam præscripsit, ut nihil in hoc genere excellentius excogitari posse existimem.

17. Figura Elastica ARZ mota in fluido secundum directionem AZ, præcedente nunc vertice A, nunc base RZ resistentias patitur quæ ad se invicem sunt ut 4 & 5, sed mota juxta directionem RZ, præeunte jam vertice R, jam base AZ, resistentias subit se habentes ut 3 & 5; ideoque resistentiæ, quas figura patitur mota successive juxta

$= \frac{3}{2aa}\int dx\sqrt{(a^4 - x^4)}) - \frac{1}{2aa}x\sqrt{(a^4 - x^4)}$. Est autem $\int(dx\sqrt{(a^4 - x^4)}) = \int dx\sqrt{(aa+xx)}\sqrt{(aa-xx)}$ solidum quod fit ex ductu frusti hyperbolici in segmentum circuli. Ductus ille intelligendus est, juxta mentem *Gregorii a* STO. VINCENTIO de solido quod nascitur ducendo singulas hyperbolæ applicatas in singulas adjacentes applicatas circuli.

(r) Vide harum Serierum demonstrationem N°. C I. Prop. 56. 57. 58. Vide etiam Num. LXIV.

juxta utramque directionem, præeunte utrobique vertice se habent ut quadrupla RZ & tripla AZ. (f). N.LVIII.

18. Superest una ex palmariis proprietatibus curvæ nostræ tertiæ constructionis, quam antehac supremis tantum labris tetigi, quæ est quod eadem una repræsentet curvaturam lintei a pondere infusi liquoris expansi. Nimirum erecto verticaliter super BR plano ARφ, rectaque Aφ horisontaliter constituta, si lamina elastica AQR [continuata, si vis, ab altera parte usque in φ] sensim derigescere, & in omnibus suis partibus flexilis fieri intelligatur ad instar corii, linteive, quod affixum hinc inde in punctis A & φ intra se velut culeum contineat liquorem aliquem, qui totam ejus cavitatem ARφ repleat: Dico futurum, ut linteum pondere fluidi expansum eandem curvaturam AQR retineat, aut si non habeat, acquirat; cujus asserti veritatem, etiam non considerata in specie natura curvæ AQR, facile possem demonstrare (t). Sed suffecerit attigisse sequentia.

(f) Resistentia basis RZ ad resistentiam curvæ secundum axem motæ, est [Vide Num. LVI. pag. 568.] ut x ad $\int(dx^3 : ds^2) = \int(a^4 - x^4)dx : a^4 = x - x^5 : 5a^4$, ac posito $x = a$, ut a ad $a - \frac{1}{5}a$, vel ut 5 ad 4.

At si figura moveatur secundum RZ, resistentia basis AZ est ad resistentiam figuræ, ut y ad $\int(dy^3 : ds^2) = \int(x^6 dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) = \frac{3}{5}\int(xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)} - \frac{1}{5}x^3\sqrt{(a^4 - x^4)} : a^4 = \frac{3}{5}y - x^3\sqrt{(a^4 - x^4)} : 5a^4$, quæ ratio, posito $x = a$, fit ratio y ad $\frac{3}{5}y$, aut 5 ad 3.

Igitur cum resistentia curvæ motæ secundum AZ, sit ad resistentiam RZ, ut 4 ad 5, & resist. RZ ad resist. AZ, ut RZ ad AZ, & resist. AZ ad resist. curvæ motæ secundum RZ, ut 5 ad 3, erit, compositis rationibus, resistentia prima ad ultimam ut 4RZ ad 3AZ.

(t) Data est N°. XLVIII. Not. a, pag. 483 & 484, æquatio generalis curvarum in quas flectitur filum cujus singula puncta innumeræ potentiæ perpendiculariter urgent. Hæc erat $pdyds = aaddx$, quæ, quia ds constans dat $dxddx = -dyddy$, reducitur ad hanc $-pdxds = aaddy$, vel $pdxds = aaddy$, posita origine in A, non in R, ut ponebatur N°. XLVIII. Potentiæ p in nostro casu, cum sint columnæ fluidi quarum altitudines PQ, & fluidorum pressiones sint altitudinibus eorum proportionales, per applicatas PQ [x] commode designabuntur, unde æquatio fiet $xdxds = aaddy$, quæ ipsissima est quam supra ad Elasticam invenimus

N.LVIII. α. Si loco rectæ RZ concipiatur firmus paries, qui affixam habeat unam lintei extremitatem in R, portioque lintei RQ a pariete & portione reliqua subito abrumpi intelligatur, excutietur hæc portio a pondere inclusi fluidi juxta eam directionem, quæ cum pariete RZ angulum faciat, cujus tangens sit ad sinum totum, sicut EF est ad Ei. Hinc totum linteum, disruptis subito in A & R vinculis, excutitur juxta angulum semirectum (*u*).

β. Si ex AB abscindatur Aσ, quæ ad AB sit ut 1 ad $\sqrt{\sqrt{2}}$, & applicetur $\sigma\rho$, erit per ρ ducta recta semirectum cum pariete angulum constituens, & curvæ perpendicularis, & linea directionis totius lintei, & simul axis æquilibrii impulsionum: at non transibit per concursum rectarum AB, RB, lintei extremitates A & R tangentium (*x*); ut nec in Velaria id contingere existimandum est, [cum secus curvæ hæ ex algebraicarum deberent esse numero ut attendenti satis patet], quanquam hoc olim incogitanti mihi & certis de causis festinanti inter alias regulas, quas biennio abhinc

$tdxds = aaddy$, si nempe tensiones t viribus tendentibus x proportionales statuantur.

(*u*) N°. XLVIII. Not. *f*, media directio omnium pressionum, quæ curvam urgent perpendiculariter, inventa est bisecare angulum quem tangentes extremæ comprehendunt, atque efficere cum axe RZ angulum, cujus tangens sit ad sinum totum ut $ds - dy$ ad dx: hoc est, in casu præsenti, ut $aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)} - xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ ad dx, aut ut $aa - xx$ ad $\sqrt{(a^4 - x^4)}$ vel, dividendo per $\sqrt{(aa - xx)}$, ut $\sqrt{(aa - xx)}$ [EF] ad $\sqrt{(aa + xx)}$ [Ei]. Sit $x = 0$, & habebis angulum semirectum, cujus nempe tangens æqualis Sinui toti.

(*x*) Recurrit error, quem N°. XLVIII. Not. *g*, pag. 486 animadvertimus. Nondum potuit Auctor sibi persuadere mediam directionem inter innumeras perpendiculares ad Curvam, non esse pariter normalem ad ipsam. Quæsivit ergo, quo in puncto perpendicularis ad curvam cum utroque axe angulum efficeret semirectum, hoc est, quo in puncto esset $dx = dy$, & habuit $xx = \sqrt{(a^4 - x^4)}$ sive $2x^4 = a^4$ aut $x = a : \sqrt{\sqrt{2}}$. Ex eodem fonte manat prava Regulæ 15, N^i. XLVIII, correctio, quam tandem feliciter dedit N°. LXVI, ubi intellexit, obliquam esse ad curvam AQR mediam directionem, quæ per concursum B tangentium extremarum transire demonstrata est N°. XLVIII. Not. a, pag. 484.

hinc de curvatura Veli dedi, exciderit. Quocirca rogandus Lector ut Regulam 15 deleat, lacunamque si velit impleat alio modo facillimo, axem æquilibrii in Velaria inveniendi, nempe faciendo B D [Vide *Fig.* 2. ibidem] æqualem & parallelam ipsi CH, ducendoque DF parallelam HB, quæ erit quæsitus æquilibrii axis, fietque sponte BG = BD vel CH. N.LVIII. Tab. XVIII No. 48.

γ. Vis ponderis impellens linteum AQR juxta dictam directionem ad pondus ejus absolutum se habet ut $\sqrt{2}$ ad 1.

δ. Vis lintei sustinens seu firmitas ejus requisita, ne rumpatur, in omnibus ejus punctis eadem est, & tanta, quanta requiretur in A ad sustinendum linteum, ne labatur; atque æquatur ipsi absoluto ponderi liquoris inclusi (*y*). Linteum igitur æquabilis texturæ æqualiter resistit prementi fluido, secus ac lamina inflexa, quæ in partibus ipsi R propinquioribus debilior est quam in cæteris.

ε. Tandem & hoc addamus, quod inter omnes figuras isoperimetras eidem rectæ A φ insistentes, Elastica A R φ illa est, quæ habet centrum suum gravitatis longissime remotum ab A φ: sicuti Funicularia est illa, in qua centrum gravitatis ipsius curvæ ab eadem maxime distat (*z*). Notare hic igitur convenit affinitatem miram, quæ ab una parte Funiculariæ & Velariæ, ab altera Elasticæ & Curvæ Lintei ab incluso liquore expansi intercedit.

Superesset nunc, ut retenta vulgari extensionum hypothesi speculationes nostras promoveremus ulterius, indagando quales Curvæ prodeant, si Lamina Elastica proprio pondere absque appenso onere flectatur: Si flectatur ab utroque simul: † Si non

sit

(*y*) Tensio fili, sive lintei, ostensa est N°. XLVIII. Not. a, constans & $= aa =$ AR φ = ponderi totius fluidi. Vis vero quæ secundum mediam directionem premit, est ad Tensionem aa [Vide Not. k. pag. 486] ut $\sqrt{(2ds - 2dy)}$ ad $\sqrt{ds}$, hoc est, in hoc casu, ut $\sqrt{((2aa - 2xx)dx : \sqrt{(a^4 - x^4)})}$ ad $\sqrt{(aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)})}$ vel ut $\sqrt{(2aa - 2xx)}$ ad $\sqrt{aa}$; quæ ratio, ubi $x = 0$, reducitur ad hanc $\sqrt{2aa} : \sqrt{aa}$, vel $\sqrt{2} : 1$.

(*z*) Sequitur ex notissimo Mechanices Axiomate, quo fertur centrum gravitatis tantum descendere quantum potest.

† Harum quæstionum solutiones vide

N.LVIII. ſit uniformis craſſitiei aut latitudinis, ſed exempli gratia, triangularis aut alterius cujuſvis figuræ; & vis flectens applicata, tum in cuſpide tum in baſi ejus: Nec non qualem Lamina curvaturam habere debeat, ut ab appenſo onere, vel proprio pondere, vel ab utroque ſimul in rectam extendatur, * [quod uſui veniret in attemperandis brachiis bilancium & ſtaterarum, ubi requiritur ut centra motus & appenſionum jaceant in directum:] item, qualis figura danda laminæ, ut per inflexionem acquirat datam curvaturam; & mille ejuſmodi alia. Quarum Curvarum omnium proprietates characteriſticas, & aliquarum etiam conſtructiones exhibere poſſum, quas ſecundi tertiive generis mechanicas eſſe deprehendo. Sed pleraque nondum digeſſi, nec uni vacat agere omnia. Præterea & Lectorum noſtrorum induſtriæ quædam relinquenda videntur, quibus hinc ampla occaſio inventum noſtrum perficiendi ſuppeditatur.

vide in elegantiſſimis Diſſertationibus Celebb. *Danielis* BERNOULLI & *Leon.* EULERI in *Comment. Acad. Petropol.* Tom. III. pag. 62. & 70.

* Vide N°. CVII. Art. XX.



N°. LIX.

N°. LIX.

JACOBI BERNOULLI
SOLUTIO
PROBLEMATIS LEIBNITIANI
De Curva Accessus & Recessus æquabilis a puncto dato, mediante rectificatione Curvæ Elasticæ.

FElicitatem inventi præcedentis commendare potest solutio elegantissimi Problematis *Leibnitiani*, de invenienda *linea*, *per quam descendens grave æqualiter æqualibus temporibus a dato puncto recedat, vel ad illud accedat* (a): quod laudatissimo suo Auctori ita placuit, ut non tantum ad ejus tentamen Amicos pariter & Adversarios aliquoties in *Actis* provocaverit [Vide *An.* 1689, *Apr. pag.* 198, & 1690, *Mai. p.* 229, & *Jul. pag.* 360,] sed & ipse strenue in illo desudarit, testibus nonnullis Curvæ proprietatibus, quas *Gallorum Diario* inseri curavit, ut ex relatione *Fratris* habeo, qui tamen illas nominare mihi non potuit. Multus etiam fuit in eodem ipse *Frater*, dum *Parisiis* ageret, sed omni sua Methodo Tangentium inversa aliud nil effecit, quam ut Problema ad hanc æquationem differentialem reduceret, $(xdx+ydy)\sqrt{y}=(xdy-ydx)\sqrt{a}$, ad quam tamen etiam *Acta Erud. Lips. 1694. Jun. p. 276.*

(a) Hanc Isochronam Paracentricam vocavit LEIBNITIUS.

No. LIX. etiam nullo labore pervenitur ([b]). Plenariam vero illius solutionem, sive constructionem, nec ipse, nec quisquam alius dare potuit. Nuper, cum præcedens schediasma pararem *Lipsiam*, partemque inventi cum figuris ipsis jamjam chartæ consignassem, scrutinium hujus Lineæ suscepi, occasione novorum Theorematum quæ ibi dedi pro radiis circulorum osculantium in Spiralibus [quorum tamen investigatio & ipsa incidenter tantum fiebat; præcipua enim inventi capita sub calamo demum mihi nascebantur,] mox etiam, post pauca conamina optatum finem consecutus sum ([c]), ubi hoc perquam singulare mihi accidit, ut absoluta

([b]) Sit $A\theta\omega\alpha$ curva quæsita, sintque $A\gamma = x$, $\gamma\alpha = y$, ideoque $A\alpha = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, ejusque differentiale $\alpha\beta = (xdx + ydy).\sqrt{(x^2+y^2)}$, quod recessus est momentaneus corporis a puncto A, dum scil. spatiolum $\delta\alpha = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ describit, quemadmodum percurrendo $A\varpi$ initiolum curvæ, ipsa longitudine $A\varpi$ ab A recedit. Sint illi recessus $\alpha\beta$, $A\varpi$ æquales, & ideo, per conditionem curvæ, æqualia sunt tempora, quibus $A\varpi$, $\delta\alpha$ percurruntur; consequenter hæc spatiola $A\varpi$, vel $\alpha\beta\ [(xdx + ydy) : \sqrt{(x^2 + y^2)}]$, & $\alpha\delta\ [\sqrt{(dx^2 + dy^2)}]$ sunt proportionalia celeritatibus corporis in A & α. Hæ vero celeritates, ex lege descensus gravium, sunt ut radices altitudinum ex quibus grave descendit, hoc est ut radices altitudinum iA $[a]$, ex qua grave in A descendit, & $iA + \alpha\gamma$, $[a + y]$ ex qua grave in α descendit; habemus itaque hanc æquationem $(a + y)(xdx + ydy)^2 : (xx + yy) = a(dx^2 + dy^2)$, vel $ax^2dx^2 + 2ayxdydx + ayydy^2 + yxxdx^2 + 2yyxdydx + y^3dy^2 = axxdx^2 + axxdy^2 + ayydx^2 + ayydy^2$, quæ, demtis utrinque æqualibus, transposito termino $2ayxdydx$, & extracta radice quadrata, reducitur ad istam $(xdx + ydy)\sqrt{y} = (ydx - xdy)\sqrt{a}$; quæ tamen, ob indeterminatarum permixtionem, vix potest construi.

([c]) Eligantur itaque commodiores indeterminatæ, quibus tamen inventis, puncta curvæ determinentur. Sit, v. g. $A\iota = t$, $\iota\zeta = z$, & erit $\alpha\gamma = tz : a$, propter $A\iota : A\alpha = \iota\zeta : \alpha\gamma$, nec non $\alpha\beta = dt$, & $\beta\delta = tdz : \sqrt{(aa - zz)}$, cum sit $A\zeta\ [\sqrt{(aa - zz)}] : A\iota\ [a] = \iota\iota\ [dz] : \iota\lambda\ [adz : \sqrt{(aa - zz)}]$, & $A\iota\ [a] : \iota\lambda\ [adz : \sqrt{(aa - zz)}] = A\delta$ vel $A\alpha\ [t] : \beta\delta\ [tdz : \sqrt{(aa - zz)}]$. Igitur cum Nota superiori ostensum sit $\alpha\beta : \alpha\delta = \sqrt{iA} : \sqrt{(iA + \alpha\gamma)}$, vel $\alpha\beta^2 : \alpha\delta^2 = iA : iA + \alpha\gamma$, vel convertendo $\alpha\beta^2 : \beta\delta^2 = iA : \alpha\gamma$, erit $dt^2 : \frac{ttdz^2}{aa - zz} = a : \frac{tz}{a}$, quæ reducitur ad $dt : \sqrt{t} = adz : \sqrt{(aaz - z^3)}$, ubi jam separatæ sunt indeterminatæ,

soluta analysi animadverterem, curvam Elasticam, quæ qualemcunque tantum occasionem huic tentamini dederat, illam ipsam esse, cujus rectificatione altera construi posset (d). Nam quanquam idem exequi liceat, mediante quadratura spatii alicujus algebraici, alterum tamen construendi modum præferendum censeo, tum quod generaliter facilius in praxi rectificentur curvæ, quam quadrentur spatia, tum præsertim quod ipsa natura [siquidem convenientem tensionis legem observet] illum præscripsisse videatur. No. LIX.

CONSTRUCTIO. Descripta itaque curva Elastica tertiæ constructionis [*Fig.* 3.] cæterisque positis, ut prius, applicetur in utroque quadrante circuli BL, LG, recta $\iota\zeta$ æqualis ipsi Ag, seu tertiæ proportionali ad AB & AE [hic in dextro tantum quadrante ducta apparet, ut linearum confusio vitetur] & ex ducta Aι [productaque si sit opus] abscindatur Aα æqualis tertiæ proportionali ad rectam AB & portionem curvæ AQ in sinistro, vel φRQ in dextro quadrante; eritque punctum α in curva quadam A$\chi\omega n$, ita comparata ut grave per illam latum [si prius ex altitudine iA deciderit] æqualibus temporibus æqualiter ad punctum A accedat, aut ab illo recedat. Cujus constructionis demonstrationem [ut Celeberrimum Problematis Auctorem, aliis occupatissimum, examinandi labore sublevem] hic appono.

tæ, atque integrando ulterius $2\sqrt{t} = \int(adz : \sqrt{(aaz - z^3)})$, unde liquet, rem reductam esse ad quadraturam curvæ, cujus abscissa z, ordinata $a^2\sqrt{a} : \sqrt{(aaz - z^3)}$.]

(d) Quod si vero, ulterioris reductionis gratia, fiat $z = uu : a$, erit $adz : \sqrt{(aaz - z^3)} = 2audu : a\sqrt{(au^2 - u^6 : a^3)} = 2aadu : \sqrt{(a^4 - u^4)}\sqrt{a}$ Igitur $2\sqrt{t} = \frac{2}{\sqrt{a}}\int(aadu : \sqrt{(a^4 - u^4)})$, vel $\sqrt{at} = \int(aadu : \sqrt{(a^4 - u^4)})$. Est autem [N°. præc. Not. *q*.] $\int(aadu : \sqrt{(a^4 - u^4)})$ = arcui AQ vel φRQ curvæ elasticæ, facta nimirum AE $= u$. Igitur est $\sqrt{at}$ [$\sqrt{(a . A\alpha)}$] = AQ vel φRQ, & Aα = AQ$^2 : a$ vel φRQ$^2 : a$, tertia proportionalis ad AB, AQ vel φRQ, quando assumpta est $\iota\zeta$ [$z = uu : a$] tertia proportionalis ad AB, AE. Unde sequitur Auctoris constructio. Vide Num. sequentem Nota (a).

No. LIX. DEMONSTRATIO. Descriptus intelligatur centro A circulus $\beta\delta$, abscindens ex applicata $A\alpha$ Elementum $\alpha\beta$, & ex curva Elementum $\alpha\delta$, cui concipiatur in vertice portiuncula isochronos $A\varpi$. Jam ratio $\beta\delta$ ad $\alpha\beta$ composita est ex sequentibus quinque rationibus:

$\beta\delta$: Elem. periph. $G\iota\,[\iota\lambda] = A\alpha : A\iota$

Elem. per. $G\iota\,[\iota\lambda]$: Elem. $\iota\zeta\,[\iota\kappa] = A\iota : A\zeta$, ex nat. Circuli.

Elem. $\iota\zeta\,[\iota\kappa]$: Elem. AE $= 2AE : AB$, per constr. & princ. Calc. inf. parvor.

Elem. AE : Elem. AQ $[\varphi RQ] = A\zeta : AB$, ex nat. curvæ AQ ut collig. ex Cor. 2. Constr. III. præced.

Elem. AQ $[\varphi RQ]$: $\alpha\beta = AB : 2AQ\,[2\varphi RQ]$ per constr. & princ. Calc. inf. parvor.

unde facta divisione per communes rationum antecedentes & consequentes, $\beta\delta : \alpha\beta = A\alpha : AB + AE : AQ\,[\varphi RQ,]$ & $\beta\delta^2 : \alpha\beta^2 = A\alpha^2 : AB^2 + AE^2 : AQ^2$ vel $\varphi RQ^2\,[\iota\zeta : A\alpha$, per constr.$]$ $= A\alpha^2 \times \iota\zeta : AB^2 \times A\alpha = A\alpha \times \iota\zeta : AB^2 =$ [ob similitudinem Triangulorum $A\alpha\gamma$, $A\iota\zeta$] $A\iota \times \alpha\gamma : AB^2 = \alpha\gamma : AB\,[Ai]$, componendoque $\alpha\delta^2 : \alpha\beta^2 = \alpha\gamma + Ai : Ai$; & proinde $\alpha\delta : \alpha\beta = \sqrt{(\alpha\gamma + Ai)} : \sqrt{Ai} =$ celeritas acquisita in α : celer. acquis. in A = [ex natura descensus gravium] $= \alpha\delta : A\varpi$ [per hypoth. quia æqualibus tempusculis transiri supponuntur]. Ergo $\alpha\beta = A\varpi$. Ergo grave per hanc Curvam latum æqualiter æqualibus temporibus a puncto A recedit. Q. E. D.

Quæ hic præcipue observanda veniunt, sunt sequentia:

1. Si grave altius vel humilius, quam ex i, decidere supponatur, puta ex τ, non opus est nova Elastica: Sufficit hæc una omnibus Curvis isochronis describendis. Omnes enim inter se similes sunt, determinanturque, faciendo tantum, ut Ai ad $A\tau$, sic $A\alpha$ ad aliam $A\alpha$ abscindendam ex eadem $A\iota$. Estque ipsa curva Schematis nostri constructa pro gravi tanquam ex τ, non i, decidente.

2. Sed & infinitæ dantur aliæ, quas grave ex eadem altitudine

τA delapsum ita permeare potest, ut æquabiliter ad punctum aliquod accedat vel recedat; at illud continuo diversum ab A; nec nisi per unicam curvam ex eadem altitudine, respectu ejusdem puncti, accessus vel recessus æquabilis effici potest. (e) No.LIX.

3. Curva nostra Isochronos initium capit in ipso puncto A, cujus respectu motus æquabilis est, & terminatur in puncto n ejusdem cum illo altitudinis; utraque extremitate tangit horizontalem rectam An (f). Unde flexum contrarium habere constat. Quod si ex altera parte statuatur huic similis & æqualis Curva $A\lambda\theta\psi$, & grave dimittatur ex n cum celeritate, quam acquirere potest cadendo ex altitudine æquali ipsi τA, illud primo descendendo ad ω, mox reascendendo, æquabiliter ad A accedet, indeque pergendo continue per alteram $A\lambda\theta\psi$ ab eodem puncto A eadem ratione elongabitur.

4. Tangens curvæ in locis intermediis, velut α, reperitur, si ducta $A\mu$ perpendiculari ad $A\alpha$, fiat, ut $\sqrt{A\tau}$ ad $\sqrt{\alpha\gamma}$; ita $A\alpha$ ad $A\mu$; ducta enim $\alpha\mu$ curvam tanget: quod vel ex usu, quem præstare debet curva facile infertur (g).

5. Recta An quadrupla est rectæ $A\theta$. (h)

6. Si in Elastica punctum Q assumatur tale, ut tertia proportionalis ad subtangentem Pp & rectam AB æquetur curvæ AQ, invenie-

Hhhh 2

(e) Imo vero infinitæ dantur, ut observarunt LEIBNITIUS N°. LXIV, & HUGENIUS N°. LXV, agnovitque Author N°.LXVI. Scil. in integratione æquationis $dt:\sqrt{t} = adz:\sqrt{(aaz - z^3)}$, [Nota (c)] omissa est constantis additio. Integralis autem completa $2\sqrt{t} + \sqrt{b} = \int(adz:\sqrt{(aaz - z^3)})$ pertinet ad infinitas diversas curvas, prout alia atque alia assumitur quantitas b. Vide Num. LXVI.

(f) Vide Notam sequentem.

(g) Est enim $A\alpha : A\mu = \alpha\beta : \beta\delta =$ [Vide Not. c] $\sqrt{\tau A}$ aut hic $\sqrt{\tau A} : \sqrt{\alpha\gamma}$. Igitur si sit $\alpha\gamma = 0$, id quod locum habet ubi $A\alpha$ cadit in AG, erit etiam $A\mu$ infinities minor ipsa $A\alpha$, adeoque curva tangit rectam $A\alpha$, seu AG. Hujusmodi sunt puncta A & n, quæ Noster initium & finem curvæ vocavit, licet ipsa revera interminata sit, & infinitos flexus atque sinus habeat. Vide rursus Num. LXVI.

(h) Est enim $An = AR\phi^2 : AB$ [per constr.] $A\theta$ vero $= AQR^2 : AB$. Ergo

No. LIX. venietur ejus ope punctum χ portionis $A\chi\theta$, quod omnium maxime distat a perpendiculari $A\theta$ (i).

7. Sin punctum Q ponatur tale, ut tangens Qp æquetur curvæ φRQ, illo mediante habebitur in altera punctum ω, omnium infimum, & remotissimum ab horizontali $A\eta$ (k).

8. Tandem & hoc advertendum est, quod ex propositi Problematis constructione proclive jam colligere sit, quales suppositiones faciendæ, ad reducendam æquationem $(x\,dy + y\,dx)\sqrt{y} = (y\,dx - x\,dy)\sqrt{a}$. Nam si loco x & y (l) assumantur duæ aliæ indeterminatæ t & z (m), ponendo $ay = tz$, & $ax = t\sqrt{(aa - zz)}$; prodibit æquatio, in qua separari possunt indeterminatæ t & z cum suis differentialibus a se invicem; quod sufficit ad constructionem deinde, saltem per quadraturas, expediendam. Duo enim in hoc calculo adhuc præcipue desiderari videntur, quæ si semper fieri possent, omnia reperta essent; unum ut differentialia secundi aliorumve generum ad differentialia primi redu-

Ergo cum sit $AR\varphi = 2AQR$ erit $A\eta = 4A\theta$.

(i) Tangens in puncto χ, quod est ab Axe AL remotissimum, rectæ $\alpha\gamma$ parallela est, & dat Triangulum $A\alpha\mu$ Triangulo $A\alpha\gamma$ simile. Igitur $\alpha\gamma^2 : A\gamma^2 = A\alpha^2 : A\mu^2 =$ [Not. g] $= Ai : \alpha\gamma$, vel, componendo, $\alpha\gamma^2$ $[ttzz : aa] : A\alpha^2\ [tt] = Ai\ [a] : Ai + \alpha\gamma\ [a + tz : a]$; unde elicitur $t\ [AQ^2 : a] = (a^4 - aazz) : z^3$ [quoniam $z = uu : a$] $= (a^4 - u^4)\ a^3 : u^6 = a^3 : Pp^2$. Est enim [N°. præc. Nota (c)] $Pp = u^3 : \sqrt{(a^4 - u^4)}$ atque ideo $Pp^2 = u^6 : (a^4 - u^4)$. Igitur cum sit ad punctum χ, $AQ^2 : a = a^3 : Pp^2$, vel $AQ^2 = a^4 : Pp^2$, est etiam $AQ = aa : Pp$, sive AQ tertia proportionalis ad tangentem Pp & rectam AB.

(k) Tangens autem in puncto ω, quod ab Axe AG maxime distat, ipsi parallela est & efficit Tr. $A\alpha\mu$ simile Triang. $A\alpha\gamma$. Est igitur $A\gamma^2 : \alpha\gamma^2 = A\alpha^2 : A\mu^2 = Ai : \alpha\gamma$, vel componendo $A\alpha^2\ [tt] : \alpha\gamma^2\ [ttzz : aa] = Ai + \alpha\gamma\ [a + tz : a] : \alpha\gamma\ [tz : a]$; unde deducitur $t = [\varphi RQ^2 : a] = aaz : (aa - zz) = a^3 uu : (a^4 - u^4)$ [scribendo nimirum $uu : a$ pro z] $= Qp^2 : a$. Namque est [N°. præc. Nota (c)] $Qp = aau : \sqrt{(a^4 - u^4)}$ Est igitur ad punctum ω, $\varphi RQ^2 : a = Qp^2 : a$, vel arcus $\varphi RQ =$ tangenti Qp.

(l) $A\gamma$ & $\gamma\alpha$.

(m) $A\alpha$, & $\alpha\zeta$.

reducantur; alterum, ut in æquationibus differentialibus primi generis, indeterminatæ, si invicem permixtæ sint, a se mutuo separentur, ut unaquæque cum sua differentiali peculiarem æquationis partem constituat; hoc est, ut reperiatur methodus inversa tangentium. Pro utroque dedi regulas quasdam [pluresque sine fine dare possem] similes illis, quas *Frater* Parisiis apud *Marchionem* HOSPITALIUM deposuit, quibus methodum inesse initio existimarat. At statim sensi, illas non continere nisi artificia quædam particularia, quæ methodum appellare non ausim; utpote qualem non magis dari posse arbitror, quam dari potest universalis methodus pro construendis æquationibus algebraicis quorumvis promiscue graduum. Illa enim [cujus olim in *Actis* mentio facta est] qua pono indefinite $o = a + bx + cy + exy +$ &c. & quæro deinde ejus ope lineæ tangentem, vix aliter quam in speculatione succedere videtur. Quod dictis fidem faciat, hoc esto, quod præsens Problema, quanquam ut apparet haud admodum difficile, nullius regulæ, methodive hactenus repertæ ope, solvi a quoquam potuerit. No. LIX.



N°. LX.

JACOBI BERNOULLI
CONSTRUCTIO CURVÆ
Accessus & Recessus æquabilis,
Ope Rectificationis Curvæ cujusdam algebraicæ:
Addenda nuperæ solutioni Mensis Junii.

Acta Erud. Lips. 1694. Sept. p. 336

TRiplex præcipue modus habetur construendi curvas mechanicas, sive transcendentes. Primus, sed ad praxin parum idoneus, fit per curvaturas spatiorum curvilineorum. Melior est, qui instituitur per rectificationes curvarum algebraicarum; accuratius enim & expeditius rectificari possunt curvæ, ope fili vel catenulæ ipsis circumplicatæ, quam quadrari spatia. Eodem loco habeo illas constructiones, quæ peraguntur absque ulla rectificatione & quadratura, per solam descriptionem curvæ alicujus mechanicæ, cujus puncta, licet non omnia, infinita tamen, & quantumvis proxima, geometrice inveniri possunt, qualis esse solet Logarithmica, & si quæ sint ejus generis aliæ. Optimus vero modus, sicubi haberi possit, ille est, qui peragitur ope alicujus curvæ, quam Natura ipsa, absque arte, motu quodam celerrimo & quasi instantaneo ad nutum Geometræ producit; cum præcedentes modi requirant curvas, quarum delineatio, sive per motum continuum, sive per plurium punctorum inventionem, ab Artifice instituatur, communiter vel lenta vel impedita nimis existit. Ita constructiones illas Problematum, quæ

quæ Hyperbolæ quadraturam vel Logarithmicæ descriptionem No. LX. supponunt, cæteris paribus, posthabendas censeo iis, quæ ope Catenariæ peraguntur, seu curvæ, quam suspensa catena sponte sua citius induerit, quam reliquis ipse describendis primam manum admoveris.

Curva Accessus & Recessus æquabilis, ob solam proponentis Viri commendationem, mereri videtur ut de constructionibus secundum omnes tres modos illi adornandis simus solliciti. Constructio primi modi per quadraturas, quam in nupera solutione insuper habui, ob jam dictam rationem, institui potest, sumendo in *Fig.* 3. rectam EN, non, ut ibi, ipsi Au, sed ipsi iu æqualem; iterumque curvilineo AEN æquale rectangulum AO; hujus enim latus AP nuperæ curvæ AQ adæquabitur; sic ut sumpta ad AB & nunc inventam AP tertia proportionali Aα, habeatur punctum α in optata curva (a). Tertii modi constructio, quæ fieret mediante linea Elastica AQ, quam solam ibi tetigi, sine dubio fieret optima, si natura alicubi tensiones viribus tendentibus simpliciter proportionales effecisset: at quia nullus forte invenitur Elater, qui hanc tensionis legem præcise observet; nec si reperiatur, illud certo constet; idcirco nec isti fidere satis tutum: præstatque recurrere ad secundum construendi modum, & quærere curvam algebraicam, cujus rectificatione scopum assequamur. Talem ex voto sese sistit curva quatuor dimensionum quæ hac æquatione exprimitur $xx + yy = a\sqrt{(xx - yy)}$, quæque circum axem BG [$2a$] constituta formam refert jacentis notæ octonarii ∞, seu complicatæ in nodum fasciæ, sive lemnisci, *d'un nœud de ruban* Gallis. Hujus enim, tum altera medietas, curvæ Elasticæ ARφ, tum super nodo A intervallo indeterminatæ AE abscissa medietatis portio minor, minori AQ, major

(a) Sit AE $= u$, Ag $= uu : a$, gl $= \sqrt{(aa - u^4 : aa)} = \frac{1}{a}\sqrt{(a^4 - u^4)}$; & cum sit gl : Al = Ai : iu, erit iu $= a^3 : \sqrt{(a^4 - u^4)}$ = EN. Atque ideo mixtilineum AEN $= \int(a^3du : \sqrt{(a^4 - u^4)})$ = AO : consequenter AP $= \int(aadu : \sqrt{(a^4 - u^4)})$ = [N°. præc. Not. d] $= \sqrt{at}$ seu $\sqrt{AB.\ A\alpha}$. Igitur Aα = AP^2 : AB, tertia proportionalis ad AB, AP.

No. LX. major majori Elasticæ portioni ϕRQ æquatur. Unde quoque ratio constat, illam ad propositi Problematis constructionem adhibendi (b).

Cæterum, sicut infinitæ lineæ mechanicæ a curvæ circularis aut parabolicæ rectificatione, seu logarithmicæ descriptione dependent; ita præter curvam accessus & recessus infinitarum aliarum, & partim etiam ipsius Elasticæ constructio [ut infra apparebit] a rectificatione memoratæ algebraicæ quatuor dimensionum derivatur. Et ausim asseverare in materia constructionis mecha-

(b) Ostensum est N°. præc. Not. (d) constructionem curvæ quæsitæ pendere ab integratione quantitatis $aadu : \sqrt{(a^4 - u^4)}$. Hæc, ut reducatur ad rectificationem curvæ algebraicæ, consideranda est quasi elementum curvæ, ejusque quadratum dividendum, si potest fieri, in duo alia quadrata, quorum radices sint integrabiles; ut integralia exprimant coordinatas curvæ algebraicæ. Commode autem accidit quadratum $a^4du^2 : (a^4 - u^4)$ dividi posse in duo $(a^4 - 4aauu + 4u^4)\, du^2 : (2a^4 - 2aauu)$, & $(a^4 + 4aauu + 4u^4) du^2 : (2a^4 + 2aauu)$ quæ simul juncta efficiunt $a^4du^2 : (a^4 - u^4)$, quorumque radices $(aa - 2uu)\, du : \sqrt{(2a^4 - 2aauu)}$, & $(aa + 2uu)\, du : \sqrt{(2a^4 + 2aauu)}$ possunt integrari. Sunt enim harum integralia, seu coordinatæ Curvæ, $u\sqrt{(aa - uu)} : a\sqrt{2}$ quæ dicatur y, & $u\sqrt{(aa + uu)} : a\sqrt{2}$, quæ vocetur x. Nunc, ut habeatur æquatio inter coordinatas; ope istarum $u\sqrt{(aa - uu)} : a\sqrt{2} = y$ & $u\sqrt{(aa + uu)} : a\sqrt{2} = x$, eliminetur u, primum eas quadrando, $aauu - u^4 = 2aayy$, & $aauu + u^4 = 2aaxx$ atque addendo, $2aauu = 2aayy + 2aaxx$ sive $uu = yy + xx$; quo patet u designare subtensam Curvæ ab origine A exeuntem: Deinde pro uu substituendo valorem ejus, in æquatione $aauu + u^4 = 2aaxx$, ea sic reducitur ad $aa(xx + yy) + (xx + yy)^2 = 2aaxx$, vel transponendo $(xx + yy)^2 = aaxx - aayy$, aut radicem extrahendo $xx + yy = a\sqrt{(xx - yy)}$, quæ ipsa est Lemniscatæ æquatio; cujus itaque constat arcum, quem subtendit recta AE $= u$, æqualem esse quantitati $a\int(aadu : \sqrt{(a^4 - u^4)})$, quæ etiam exprimit arcum AQ, vel ϕRQ Elasticæ. Igitur Lemniscata potuit pro Elastica adhiberi ad constructionem Isochronæ, hoc solum discrimine quod recta AE, quæ istius erat abscissa, illius esse debeat subtendens. Vide omnino Num. CIII. Art. 2. Cæterum dedit *Joh.* Bernoulli *Act. Erud.* 1724, Aug, pag. 356, elegantissimam regulam pro reducendis quadraturis quibuscunque ad rectificationes curvarum algebraicarum.

mechanicarum, hanc inter cæteras immediate sequi præcedentes; No. LX. adeo ut constructio, quæ per nullam priorum succedit, proxime vel per hujus curvæ, aut per lineæ hyperbolicæ aut ellipticæ, aut duarum simul rectificationem tentanda sit. Cujus rei ratio est, quod post differentialium formulas, $aadz : \surd(aa - zz)$, $zzdz : \surd(aa - zz)$, $aadz : \surd(aa + zz)$, $zzdz : \surd(zz - aa)$, quæ ope quadraturæ circuli & hyperbolæ integrantur, simplicissimæ fere videantur hæ expressiones, $zzdz : \surd(z^4 - a^4)$, $aadz : \surd(z^4 - a^4)$, $aadz : \surd(a^4 - z^4)$, $zzdz : \surd(a^4 - z^4)$, & similes; quarum prima, mediante lineæ hyperbolicæ, secunda & tertia curvæ nostræ lemniscatæ, quarta ejusdem & ellipticæ rectificatione integrantur. Etenim si indeterminata z applicetur ad hyperbolam æquilateram [cujus axis transversus est $2a$] ex ipsius centro, satisfaciet arcus vertici & applicatæ interceptus pro prima formula (c). Et si eadem z [aut tertia proportionalis ad z & a, ubi z major quam a] ex nodo subtendatur curvæ lemniscatæ, inserviet subtensus arcus pro duabus mediis (d). Et si denique ex centro ellipsis [cujus axis minor est $2a$, major $2a\surd 2$] ipsa z abscindatur in minore & per sectionis terminum recta agatur majori parallela, designabit intercepta parallelis portio ellipticæ, truncata respondente portione curvæ lemniscatæ, inte-

(c) Per eandem analysin, qua usi sumus Nota præc, decomponatur quadratum $z^4dz^2 : (z^4 - a^4)$, in alia duo $zzdz^2 : (2zz - 2aa) + zzdz^2 : (2zz + 2aa)$, quorum radices $zdz : \surd(2zz - 2aa)$ & $zdz : \surd(2zz + 2aa)$ erunt coordinatarum y & x elementa, ipsarumque integralia $\surd(\frac{1}{2}zz - \frac{1}{2}aa)$ & $\surd(\frac{1}{2}zz + \frac{1}{2}aa)$ coordinatæ y, x. Igitur quadrando ac duplicando $zz - aa = 2yy$, & $zz + aa = 2xx$, atque addendo $2zz = 2xx + 2yy$, vel $zz = xx + yy$; [unde patet z esse curvæ subtendentem;] vel subtrahendo $2aa = 2xx - 2yy$, vel $yy = xx - aa$, quæ est æquatio ad hyperbolam æquilateram. Vide rursus Num. CIII. Art. 2.

(d) Ostensum est Nota (b), Arcum Lemniscatæ, cujus parameter a, subtensa u, æqualem esse $\int(aadu : \surd(a^4 - u^4))$. Quare si $u = z$, erit dictus arcus $= \int(aadz : \surd(a^4 - z^4))$. Si vero $u = aa : z$, erit dictus arcus $= -\int(aadz : \surd(z^4 - a^4))$.

No. LX. integrale quartæ formulæ $zzdz : \surd(a^4 - z^4)$ (e): Unde cum eadem, *in citata Fig.* 3, existente $AE = z$, elementum denotet applicatæ AP vel EQ in Elastica (f), patet hanc applicatam æquari differentiæ duarum portionum curvæ ellipticæ & lemniscatæ; ideoque manifestum, quomodo Elastica per rectificationem utriusque confici possit. Et quoniam Lemniscatæ portio, ut supra monui, Elasticæ portioni AQ adæquatur, liquet etiam, ellipticam ipsam adæquari aggregato AQ + AP; quæ non inelegans harum Curvarum proprietas existit.

(e) Est enim $\int(zzdz : \surd(a^4 - z^4)) = \int((aa + zz)\, dz : \surd(a^4 - z^4)) - \int(aadz : \surd(a^4 - z^4))$. Hic autem ultimus terminus $aadz : \surd(a^4 - z^4)$ est arcus lemniscatæ, cujus subtensa $= z$. Et $\int((aa + zz)\, dz : \surd(a^4 - z^4)) = \int(dz \surd(aa + zz) : \surd(aa - zz))$ æqualis arcui ellipsis. Notum enim est, si a & c sint ellipsis semi-axes, abscissa z, arcum esse $= \int(dz \surd(aa - zz + cczz : aa) : \surd(aa - zz))$. Fiat igitur $-zz + cczz : aa = zz$, aut $cc = 2aa$, vel $c = a\surd 2$, & patet arcum ellipsis, cujus axes sunt $2a$ & $2c = 2a\surd 2$, respondentem abscissæ z [posita origine earum in centro] esse $= \int(dz \surd(aa + zz) : \surd(aa - zz))$. Igitur $\int(zzdz : \surd(a^4 - z^4))$ = arcui ellipsis $[\int(dz \surd(aa + zz) : \surd(aa - zz))]$ minus arcu lemniscatæ $[\int(aadz : \surd(a^4 - z^4))]$. Vide iterum Num. CIII. Art. 2.

Cæterum quantitas $z^m dz : \surd(a^4 \pm z^4)$ integrari potest, absolute, quotiescunque m est numerus ex serie imparium [affirmativorum aut negativorum] alternatim excerptus $\pm 3, \pm 7, \pm 11, \pm 15$, &c. Integrabitur autem, concessa circuli vel hyperbolæ quadratura, ubi $m = \pm 1$, vel ± 5, vel ± 9, &c.

(f) N°. LVIII, pag. 592, vel Nota (a) pag. 591.

N°. LXI.

N°. LXI.

G. G. L. *

NOVA
CALCULI DIFFERENTIALIS APPLICATIO,

Et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione.

Memini jam a me insinuatum in his *Actis*, ut rectarum ordinatim sumptarum concursu hactenus noto, ita & concursu curvarum lineas formari. Sed placet rem non parvi ad Geometriam augendam momenti exponere distinctius; nam ne in rectis quidem concurrentibus, tota ejus vis fuit perspecta. In genere igitur hoc Problema ad communis Geometriæ leges revocare hic docebo: *Lineis* [rectis vel curvis] *propositam tangentibus, positione ordinatim datis, invenire propositam*; vel quod eodem redit; *Invenire lineam, quæ infinitas lineas ordinatim positione datas tangit.* Cujus usus cum latissime pateat, calculum in eam rem peculiarem jamdudum excogitavi, vel potius huc peculiari ratione applicui nostrum differentialem, compendio non contemnendo. Scilicet quemadmodum CARTESIUS, loca Veterum calculo exprimens, æquationes adhibuit quæ cuivis curvæ puncto conveniunt; ita nos æquationes hic adhibemus infinities ampliores, quæ cuilibet puncto cujuslibet curvæ in serie ordinatim sumptarum curvarum comprehensæ, accommodantur. Itaque x & y abscissa quidem & ordinata, seu coordinatæ, esse intelliguntur cujusvis ex dictis curvis, sed speciatim tamen accipiuntur de curva ex ipsarum concursu formata, seu ipsas tangente; utili quodam æquivocationis characteristicæ genere. Coefficientes a, b, c, in æquatione cum ipsis x & y usurpatæ, significant quantitates in

Acta Erud. Lips. 1694. Jul. p. 311.

Iiii 2 eadem

* *Gothofredi Guilielmi* LEIBNITII.

No. LXI. eadem curva constantes, alias quidem *insitas* [nempe parametros,] alias vero *extraneas*, quæ situm curvæ [adeoque verticis axisque] definiunt. Sed comparando curvas seriei inter se, seu transitum de curva in curvam considerando, aliæ coefficientes sunt *constantissimæ*, seu *permanentes*, [quæ manent non tantum in una, sed & in omnibus seriei curvis,] aliæ sunt *variabiles*. Et quidem ut *seriei curvarum lex* data sit, necesse est unicam tantum in coefficientibus superesse variabilitatem, adeoque si in *primaria* pro omnibus curvis *æquatione*, naturam earum communem explicante, plures extent variabiles, necesse est dari alias *æquationes accessorias*, coefficientium variabilium dependentiam inter se exprimentes, quarum ope omnes variabiles ex æquatione primaria tolli possint, præter unam. Cæterum pro concursu duarum linearum proximarum, sua intersectione punctum curvæ quæsitæ [quam & tangere intelliguntur,] determinantium, manifestum est, concurrentes quidem, adeoque lineam ex concursu formatam tangentes, esse geminas; intersectionis autem seu concursus punctum esse unicum, adeoque & ordinatam ei respondentem unicam esse: cum alioqui in investigatione solita linearum propositam tangentium, rectarum vel curvarum [velut circulorum, parabolarum &c.] ex datæ curvæ ordinatis quærendarum, ordinatæ geminæ, tangentes unicæ concipiantur. Itaque quoad præsentem calculum, quo ipsæ ex tangentibus rectis vel curvis positione datis investigantur ordinatæ, [contra quam in communi] manent ordinatæ x & y in hoc transitu [a proximo ad proximum] invariatæ, adeoque sunt indifferentiabiles; at coefficientes [quæ in communi calculo indifferentiabiles censentur, quia constantes,] quatenus hic variabiles sunt, differentiantur. Notabile est autem, si omnes insitæ coefficientes sint permanentes, curvæque adeo ordinatim concurrentes sint congruæ inter se; perinde fore, ac si intelligantur esse vestigia ejusdem lineæ motæ, curvaque eorum concursu formata lineam motam perpetuo durante motu tanget. Unde in hoc casu oritur connexio quædam cum generatione *Trochoeidum*; nam & basis, super qua volvitur generatrix Trochoeidis, generatricem durante motu tangit.

Calculus autem ita instituetur: Assumatur aliquis angulus rectus fixus, cujus crura utcunque producta constituere intelligantur duos axes relationis curvarum, seu axem cum axe conjugato; in quos demissæ normales ex puncto curvæ quocunque erunt ordinata, x, & ordinata conjugata, seu abscissa, y; uno verbo, *coordinatæ*, x & y; quarum relationem ex datis quærendo habebitur *æquatio* [1], quam paulo ante appellavimus *primariam*, cum sit cuilibet cujuslibet curvarum ordinatim sumptarum puncto communis. Quod si æquationi [1] insunt plures coefficientes variabiles, ut b, c, dabitur earum dependentia per secundariam æquationem [2], unam vel plures; atque ita ex æquatione [1] tollendo coefficien-

ficientes variabiles, præter unam b, prodibit æquatio [3]. Hanc æquationem differentiando, ut prodeat æquatio [4], cum in ea sola affutura sit differentialis ipsius b, evanescet differentialitas, adeoque habemus æquationem [4] ordinariam, cujus ope ex æquatione [3] tollendo variabilem residuam b, habebitur æquatio [5], in qua præter x & y tantum supererunt coefficientes invariabiles [ut a] quæ erit æquatio ad curvam quæsitam concursu seriei linearum formatam, adeoque *ad seriei linearum tangentem communem.* No. LXI.

Sed & aliter institui potest calculus, prout facilitas invitabit, non tollendo statim variabiles, sed servando. Nempe datis, æquatione [1] primaria, & æquatione [2] secundaria [una vel pluribus, pro explicanda dependentia coefficientium variabilium inservituris;] differentientur, æquatio [1], ut prodeat [3], & æquatio [2], ut prodeat [4] [una vel plures, si pro æquatione 2 affuerint plures.] Ita habebimus plures quantitates differentiales, sed tamen habebimus & æquationes sufficientes ad eas tollendas; & quidem modo tolli possint differentiales quantitates usque ad unam, etiam residua ista evanescet per se, & sic prodibit æquatio [5] ordinaria, seu carens quantitate differentiali; quam conjungendo cum æquationibus [1] & [2] tolli poterunt variabiles omnes, & prodibit æquatio [6] naturam exprimens curvæ quæsitæ, linearum concursu formatæ, quæ erit eadem cum æquatione [5] calculi prioris.

Hac jam methodo solvi possunt innumera Problemata sublimioris Geometriæ, hactenus non habita in potestate, pertinentiaque ad tangentium conversam; ex quibus nonnulla in specimen indicabo, magnæ utique generalitatis. Veluti data relatione inter AT & Aθ [*Fig.* 1] resegmenta axium per curvæ tangentem CT facta, invenire curvam CC. Nam rectæ curvam tangentes ordinatim positione dantur, adeoque & curva quæsita, quippe quæ earum concursu formatur. Vel si dato puncto axis T, detur lineæ datæ EE punctum E, sic ut juncta TE, si opus producta, quæsitam curvam CC tangat, patet ex dictis curvam CC præscripta hic methodo haberi. Similiter data relatione inter AP & Aπ, resegmenta axium facta per curvæ perpendicularem PC, licet invenire curvam CC: nam ob rectas Pπ ordinatim positione datas, etiam datur linea FF formata per earum concursum; hujus vero evolutione describetur curva CC quæsita. Unde hic quidem infinitæ curvæ satisfacientes dari possunt, omnes scilicet *parallelæ* inter se, quæ ejusdem lineæ evolutione *condescribuntur*; & data relatione inter AP & Aπ dari potest *curva quæsita* non tantum satisfaciens, sed & *transiens per punctum datum*. Interim hoc casu curva CC non semper est ordinaria, quoniam scilicet non ipsamet, sed ipsius per evolutionem generatrix rectarum positione datarum concursu formatur. Certe cum ipsa curva formatur concursu, habetur

No. LXI. determinata, nec in arbitrio est punctum, per quod transeat; quæ distinctio utilis est in hac doctrina.

Sed exemplum calculi dabimus in Problemate itidem generali, ad aliquam tamen specialem lineam applicato: *Data relatione perpendicularis* PC *ad proprium ab axe resegmentum* AP, *invenire lineam* CC [*Fig.* 2]. Patet enim datis positione punctis P, nempe centris circulorum, & radiis PC datis magnitudine [ob datam relationem ad AP] *dari ordinatim circulos lineam* CC *tangentes*, adeoque lineam ipsam circulorum concursu formatam haberi posse, id quod jam verbulo indicaveramus olim in *Actis* 1686, *mense Junio*, *pag.* 300, sub schediasmatis finem. Itaque centro P, radio PC magnitudine dato, describatur circulus CF. Ut ergo methodum paulo ante positam hic applicemus: ex puncto circuli quocunque F agantur normales ad crura anguli recti PAH, seu coordinatæ FG, y, & FH, x [quæ in casu concursus duorum circulorum incidunt in CB, CL]. Sit AP, b, & PC, c; fiet ex natura circuli [1] $xx + yy + bb = 2bx + cc$, æquatio primaria omnibus nostris circulis & cuique cujusque puncto communis. Quoniam autem datur relatio inter AP & PC, dabitur curva EE, cujus ordinata PE æquetur PC; hæc curva ponatur [exempli gratia] esse parabola, cujus parameter a, & fiat [2] $ab = cc$, quæ æquatio secundaria exhibet relationem seu dependentiam inter c & b. Hujus ope tollendo c, ex æquatione 1, fiet [3] $xx + yy + bb = 2bx + ab$; patet autem in æquat. 1, præter coordinatas x & y, adesse coefficientes c, b, a; ex quibus c & b sunt in uno circulo constantes, & c quidem est circulo insita, cum ejus radium designet; b est extranea, quippe situm centri designans; ambæ variatis circulis sunt variabiles; sed a est constantissima, sive permanens, cum non unius tantum circuli omnibus punctis, sed & pro omnibus circulis nostris in æquatione maneat eadem. Reducta jam æquatio 3 ad unam coefficientem variabilem b, differentietur secundum b [solam in ea differentialem] & fiet $2bdb = 2xdb + adb$, seu [evanescente db] fit [4] $b = x + \frac{1}{2}a$, [qui calculus in casu unius differentiabilis in effectu coincidit cum methodo vetere *de maximis & minimis* a FERMATIO proposita, ab HUDDENIO promota, sed quæ tantum est corollarium nostræ.] Jam ope æquat. 4, tollendo residuam coefficientem variabilem b ex æquat. 3, fiet [5] $ax + \frac{1}{4}aa = yy$ quæ est æquatio ad curvam CC quæsitam. Idque indicio est eam esse parabolam, ipsi datæ AE congruentem, sed paulo tantum aliter sitam; continuata enim CC vertice suo V incidet in axem AP, sed supra datæ AE verticem A, ita ut distantia verticum AV sit communis lateris recti pars quarta. Si alteram calculandi rationem malis, per plures differentiales; resumptæ æquationes 1 & 2 differentientur, & ex 1 fiet [3] $bdb = xdb + cdc$, sed ex 2 fiet [4] $adb = 2cdc$ quarum [3 & 4] ope, tollendo dc, evanescet simul & db, & fiet

[5]

[5] $b = x + \frac{1}{2}a$, ut paulo ante. Unde jam per 1, 2, 5, tollendo c & b coefficientes variabiles; prodibit [6] $ax + \frac{1}{4}aa = yy$, pro æquatione lineæ quæsitæ, ut ante.

Atque ita docuimus, data relatione perpendicularis PC ad proprium ex axe resegmentum AP, exhibere lineam CC, quia ordinatim dantur circuli lineam tangentes. Sed data relatione rectæ tangentis TC ad proprium ex axe resegmentum AT [seu circulis normalibus ad lineam ordinatim datis] invenire lineam CC, alterius est methodi; & *constructione tractoria* talis linea haberi potest, a nobis in his *Actis Sept. anni superioris* explicata *. Hujus autem præsentis methodi nostræ maximus præterea est usus ad complura alia Problemata Geometriæ superioris, aut etiam ad mechanica vel physica applicatæ. Cum enim id agitur, ut figura formetur, in quovis puncto dato suæ lineæ terminantis præstans aliquid desideratum, persæpe consequimur quæsitam formando ipsam concursu linearum, quarum quævis in aliquo puncto satisfacit, ipsomet scilicet puncto concursus. Hac ratione jam olim in schediasmate de *Lineis Opticis* inveni modum lineas exhibendi, quæ radios ordinatim positione datos, seu a datæ figuræ speculo venientes, reddant convergentes, aut divergentes, aut parallelos. Formatur enim talis linea ellipsium concursu; si radii debeant fieri convergentes; eademque methodus valet, si reddendi sint paralleli aut divergentes.

P. S.

Solutionem suam Problematis *Bernoulliani*, mense nupero Maio, una cum objectione Anonymi *Actis Eruditorum* insertam, *D. Marchio* HOSPITALIUS Auctor defendere non distulit, ostenditque, ut intellexi, Anonymum, si calculum suum ad finem perduxisset, ipsummet solutionis datæ successum fuisse deprehensurum. Cæterum Anonymus ille aliam solutionem non dedit, neque id secundum Analysin vulgarem facile præstari potest. Nostra autem nova, adeoque & Dni. *Marchionis* ac Dominorum BERNOULLIORUM methodus, non hoc tantum, sed &, quemadmodum jam mense Julio 1693, *in Actis* pag. 313, est admonitum, innumera similia solvit, sive absolute pro re nata, sive per quadraturas. Et generale Problema sic concipi potest: *Data ratione inter duas Functiones invenire lineam:* Data ratio intelligitur, quæ est inter duas datas, velut *m* & *n*. *Functionem* voco portionem rectæ, quæ ductis ope sola puncti fixi & puncti curvæ cum curvedine sua dati rectis, abscinditur.

T..es

* Vide constructionem *Bernoullianam* N°. LVII, & N°. CIII. Art. 19.

No.LXI. Tales sunt: [*Fig.* I] Abscissa AB vel Aβ, ordinata BC vel βC; tangens CT vel Cθ; perpendicularis CP vel Cϖ; subtangentialis BT vel $\beta\theta$; subperpendicularis BP vel $\beta\varpi$; per tangentem resecta AT vel Aθ; per perpendicularem resecta AP vel Aϖ; corresecta PT vel $\varpi\theta$; radius osculi seu curvedinis CF; & aliæ innumeræ.

No. LXII.

JACOBI BERNOULLI DE METHODO TANGENTIUM INVERSA,

Quousque tum in communis, tum in reconditioris Geometriæ potestate sit & non sit.

Conferenda cum Schediasmate Leibnitiano *Mensis* Julii, 1694.

Act. Erud. Lips. 1694. *Oct.* p. 391.

Elegantia sunt, quæ hic dedit Vir Eximius de Applicatione Calculi differentialis ad partem Methodi Tangentium inversæ, quæ consistit in constructionibus curvarum ex data relatione duarum *Functionum*, quas appellat, ad se invicem. Et cum ad profectum scientiæ conducat nosse, quousque hæc etiam per vulgarem Geometriam possint effici; observandum est, quod quotiescunque Functiones illæ, quas inter ratio data, hoc est, algebraica supponitur, tales sunt, ut curvam necessario poscant algebraicam [quod fit, ubi rectæ curvæve quæsitam tangentes ordinatim positione dantur, ut cum ex data relatione inter reseg-

N.° 58. 59. & 60.

Fig. 3.

curva accessus

receptus aequabilis

N.° 61.

Fig. 2.

resegmenta axium AT & Aθ, [*Fig.* 1] aut inter perpendiculares CP & resegmentum AP, quæritur Curva.] Problema quoque semper in potestate communis Geometriæ sit futurum, ut non opus sit differentialium calculo uti, nisi pro illis curvis, quas data relatio non semper algebraicas arguit; quod speciatim in ipso exemplo Celeberrimi Auctoris ita manifestum fit: Sit invenienda Curva CC, cujus perpendicularis PC ad resegmentum ab axe AP habeat relationem datam, velut eam quam habent coordinatæ Parabolæ AE, hoc est, [ob communem rationis terminum AP,] ut PC sit æqualis PE. Intelligantur centris P & (P) radiis perpendicularium PC (PC), duo circuli describi intersecantes sese citra curvam in F, erunt per hypothesin PC (PC), hoc est, PF, (P) F, singulæ respondentibus PE (PE), æquales; unde & reciproce, dato quovis citra curvam puncto F, [hoc est, datis A (B), (B) F, rectis,] duæ ex illo satisfacientes rectæ FP, F (P) ad axem inflecti possunt, eo propiores futuræ sibi & perpendicularibus PC quo punctum F curvæ propius assumptum fuerit; adeo ut hoc in ipsamet curva accepto [rectis AB, BF, coordinatis ejus existentibus] omnes PC, PF in unam perpendicularem PC, ut & puncta P & (P) in unum P coalitura sint, ipsaque æquatio ab AP denominata duos æquales valores acquisitura: unde quæsitum vulgari arte consequendi constat. Nempe positis A (B) $= x$, (B) F $= y$, AP $= b$, PF $= c = \surd ab =$ PE, ut emergat æquatio $bb - 2bx + xx + yy = ab$, operatio sic se habebit:

$bb - 2bx + xx + yy = ab$	$bb - 2bx + xx + yy = ab$
2 1 0 0 1	1 0 — 1 — 1 0
$2bb - 2bx = ab$	$bb - xx - yy = 0$
seu $b = x + \frac{1}{2}a$	sive $b = \surd(xx + yy)$

quare $x + \frac{1}{2}a = \surd(xx + yy)$; hoc est, $ax + \frac{1}{4}aa = yy$, æquatio pro curva quæsita, eadem cum *Leibnitiana*. Et memini, cum *Frater* olim e Galliis redux ipsum hoc Problema, ut difficile quippiam ibi habitum, mihi proposuisset, me constructio-

 nem

No. LXII.

No. LXII. nem generalem e vestigio hanc dedisse. Super curvæ AE [cujus ordinatæ AP, PE, relationem datam exhibent] subtangentiali PD, ceu diametro, describatur semicirculus PCD, in qua adaptetur PC = PE, erit C punctum in optata curva CC, eique perpendicularis adaptata PC ([a]). Similiter etiam data relatione inter resegmenta axium per tangentem AT, Aθ, [hoc est, data curva AQ, cujus in T applicata TQ sit æqualis Aθ] Curva CC generali constructione reperitur, ut ne calculo quidem opus sit: Ducta enim tangente datæ curvæ QR, reperiatur ad AR & AT tertia proportionalis AB, abscindenda in axe ad partes R, occurretque erecta super ipso perpendicularis BC positione datæ tangenti Tθ in puncto quæsitæ curvæ C ([b]): ubi commodum recordor *Fraterni Problematis in Januario 1692*, pag. 33. inserti ([c]), quod nostri tantum specialis casus est, in quo curva, cujus coordinatæ datam relationem exhibent, circulus existit super axium conjugatorum concursu descriptus; unde facillima constructio emergit, quæ fit, abscindendo tantum [vide Figuram 4, ibidem] in subtensa anguli recti ED partem EB vel DB, quæ sit tertia proportionalis ad ED & crus illi oppositum FD vel FE. Non secus vero etiam, datis positione curvis Lineam

([a]) Sit F curvæ quæsitæ punctum, FT tangens ejus, F(P) perpendicularis, & ductis PO, EN parallelis ipsis FT, AP, erit (P)T: (P)F = (P)P:(P)O = EN:(E)N [nam ob (P)F = (P)(E) & PF = PE est etiam (P)O = (P)F — FP = (P)(E) — PE = N(E)] = (P)D:(P)(E) vel (P)F. Igitur (P)T = (P)D. Quamobrem tangentis FT terminus est in D. Descripto itaque super PD semicirculo, est punctum F in ejus peripheria; applicetur ideo perpendicularis PF = PE, & habebitur punctum F.

([b]) Sit C(θ)(T) tangens vicinissima tangenti CθT, & ducantur ordinata (T)(Q) = A(θ), atque QM, θt ipsi AT parallelæ, cumque sit TQ = Aθ & (T)(Q) = A(θ) erit M(Q) = θ(θ). Jam vero est AB:BT = Cθ:CT = θt:T(T) = θt:θ(θ) + θ(θ):T(T) = AT:Aθ vel QT + M(Q):MQ = AT:QT + QT:TR = AT:TR; Ergo dividendo est AB:AT = AT:AR. AB igitur est tertia proportionalis ad AR, AT.

([c]) Supra N°. XLVI. pag. 470. Applicatio autem præsentis constructionis ad casum illum nihil habet difficultatis.

lineam quæsitam tangentibus, ipsa communis Geometriæ ope reperitur. Sic aliquando solvi vulgari methodo *Problema Ballisticum* de definienda Curva quam tangant omnes parabolæ, a globo in singulis mortarii elevationibus constante vi exploso, descriptæ. Sic etiam reperio lineam, quæ tangat seriem paraboloidum ejusdem gradus, circa eundem axem constitutorum, at vertices diversos, parametrumque intervallo verticis & extremitati axis æqualem habentium, perpetuo rectam esse ([d]). Porro, quo pacto, communis Geometriæ beneficio, ex data duarum Functionum relatione, tertia sit elicienda, & speciatim ex data relatione coordinatarum, id est, ex ipsa data curva, radius osculi, [supponendo in æquatione duas vel tres radices æquales; prout osculum spectatur ut concursus, vel duorum radiorum circulorum tangentium inæqualium, vel trium radiorum unius secantis circuli,] id jam in *Additamento citato Problemati Mensis Januarii* 1692, pagina 34 *, & in *Lucubrationibus Mensis Martii*, 1692 †, & *Junii* 1693, de *Natura osculorum* ††, abunde ostendimus: idemque etiam per præcedentem constructionem potest effici. Cum enim detur curva, punctumque in ea, per hypothesin, adeoque subperpendicularis, adeoque positione radius osculi, isque extremitate sua tangat curvam evolutam, dabuntur quoque resegmenta axium conjugatorum per hunc radium. Ergo per præcedentem dabitur Evoluta. Ergo & radius osculi dabitur longitudine. Quomodo vero ex data coordinatarum una & radio osculi, ipsa vicissim curva indaganda sit, hoc quidem communis Geometriæ vires transcendit; nec enim dantur positione osculantes circuli. Dependet autem Problema a *constructionibus Elasticarum*: Descripta namque curva, cujus applicata reciproce proportionetur radio osculi, si ad ipsam, ceu ad Lineam Tensionum, construatur Elastica, erit hæc quæsita, ut No.LXII.

Kkkk 2 ex

([d]) Vide Num. LXVII, Nota VII, & *Analysim inf. parvorum*, Sect. VIII, Art. 146, atque Sect. IX, Art. ult. [209].

* Supra pag. 471.

† Supra N°. XLVII, pag. 473. seq.

†† Supra N°. LVI., pag. 559. seq.

No.LXII. ex nuperis *Mense Junio* 1694 publicatis colligere est *. Sed tandem illud in genere tenendum (quod initio innui) omnia Problemata, quibus promiscue algebraicæ & transcendentes Curvæ satisfaciunt, Geometriæ reconditiori propria esse, frustraque tentari per communem: eorum vero alia construi per simplices *quadraturas* aut *rectificationes*; alia per *inflexiones Elaterum*, ut præcedens; alia saltem per *tractiones*, ut cum quærenda proponitur curva, ex data relatione rectæ tangentis ad proprium ex axe resegmentum; cujus constructionem in casu relationis constantis (qualem *Frater* proposuerat) An. 1693, *Mense Junio* ** dedimus, facile tamen accommodandam ad casum cujusvis relationis datæ variabilis, modo loco rectæ, super qua fili describentis extremitas protruditur, substituatur Curva cujus ordinata æquetur excessui fili supra tangentem datam. Nemo vero hic existimet, omnem Methodum inversam his exhaustam esse, ut pote quæ non debet acquiescere in qualicunque curvarum constructione, sed primario rimari, quot quibusque in casibus sint futuræ algebraicæ, aut secus, ac tum ad cujus gradus quadraturas referantur: quod in modo laudato Problemate Dnus. *Marchio* HOSPITALIUS & ego præstitimus. Ad hoc vero præstandum requiritur, ut in æquatione litteræ indeterminatæ cum suis differentialibus a se mutuo separentur, quod nec semper fieri potest, nec si possit, universali methodo consequi licet: & quemadmodum datis æquationibus algebraicis quibusvis, multiplicatione ex ipsis composita facile habetur; data vero composita, invenire componentes difficillimum & sæpe impossibile, ut nulla huic negotio universalis regula præscribi possit, particulares vero infinitæ, quarum bonam partem collegit HUDDENIUS: ita quoque Methodus directa tangentium ubique facilis, inversa generalis nulla, ejusque loco tantum particulares dari possunt regulæ, quarum qui plures collegerit, is optime de hac Methodo meruisse censebitur. Ad directam Methodum pertinet hoc Problema, quod

* N°. LVIII. Art. I. §. 7. pag. 583.

** Supra N°. LVII. pag. 574. Vide etiam Num. CIII. Art. 19.

quod tentari potest: *Datis* [Fig. 2] *tribus Curvis algebraicis* G, H, I, *& quarta* K, *quam formant intersectiones rectarum* HK, IK, *tangentium curvas* H & I *in iisdem punctis, in quibus tangens curvæ* G *ipsas secat, quærere tangentem quartæ* K (f). No. LXII.

(f) Sit [*Fig.* A] G*hi* tangens curvæ G, tangenti GHI proxima, secans curvas H, I, in *h*, & *i*, ex quibus eductæ tangentes *hk*, *ik*, sese mutuo secent in *k*, quod erit punctum curvæ K ipsi K vicinissimum, adeoque K*k* tangens est quæsita, quam ponimus occurrere rectæ GH (productæ, si opus est) in L, unde ducatur LT parallela ipsi IK, nec non ad HK normalis LP, istique parallela KN, quam sumere licet pro arcu circuli centro H per K descripti. Demittatur etiam ad IK vel LT perpendicularis KQ, cujus pars perexigua KO haberi potest pro arcu circuli centro I per K descripti. Denique sint R, S, centra circulorum osculantium curvas datas in H, & I, ducanturque radii RH, R*h*, nec non SI, S*i*, atque recta IM ipsi H*h* parallela. Quibus positis, erit HL : IL = HT : KT [ob sim. Tr. HLT, HIK] = HT : LT + LT : KT = HK : KI + LP : KQ [ob sim. Tr. rectang. LTP, KTQ] = HK : KI + KN : KO [ob sim. Tr. KLP, K*k*N, & KLQ, K*k*O] = HK : KI + KN : KH + HK : KI + KI : KO = $HK^2 : KI^2$ + KN : KH + KI : KO = $HK^2 : KI^2$ + H*h* : HR + IS : I*i* [ob sim. Tr. H*k*N, R*h*H, & IKO, SI*i*] = $HK^2 : KI^2$ + IS : HR + H*h* : I*i* = $HK^2 : KI^2$ + IS : HR + H*h* : IM + IM : I*i* = $HK^2 : KI^2$ + IS : HR + GH : GI + HK : KI [ob sim. Tr. GH*h*, GIM, & IM*i*, IKH,] = $HK^3 : KI^3$ + IS : HR + GH : GI. Sunt autem dati hi omnes termini HK, KI, IS, HR, GH, GI. Dantur ideo rationes $HK^3 : KI^3$, IS, HR, GH : GI. Datur itaque ratio HL : IL quæ ex illis componitur & dividendo, datur ratio HI : HL. Datur autem HI: quare datur HL, atque ideo punctum L. Sed & datur punctum K. Datur ergo tangens KL.

Id Problema, ratione haud multum dissimili, solutum dedere Viri Celeb. *Joh.* Bernoulli *Act. Erud. Lipſ.* 1695. Febr. pag. 65, & *Marchio* Hospitalius, *ibid.* Jul. pag. 307.

N°. LXIII.

SOLUTIONES PROBLEMATIS HOSPITALIANI

De Curva æquilibrationis,

Auctore JAC. BERNOULLIO.

PROBLEMA.

Acta Erud. Lipf. 1695. Febr. p. 65. AB vel AC eſt pons arrectarius verſatilis circa A: BDH vel CDP funis extremo pontis alligatus, ambiens trochleam D: P, pondus annexum funi & æquilibrium ubique cum ponte conſtituens, ut pons, minima ſuperaccedente vi attolli demittique poſſit:

Quæritur, qua curva hoc liceat conſequi?

PRIMA SOLUTIO.

Ductæ intelligantur BK, CR, CF, AE perpendiculares ipſis AB, AC, AD, & CD, & vocentur AB, vel AC, *a*; AD, *b*; BD, *c*; DH, *f*; nec non applicata quæſitæ curvæ QM, *y*; & portio funis SQ, *z*; item pondus P, *p*; & pondus pontis, *q*. Quo facto, erit, per principia Statica vulgo nota, Potentia ſuſtinens pontem in K: Potent. ſuſt. in R = AB [AC]: CF; & Pot. in R: Pot. obliq. in D = AE: AC; quare ex

æqual.

æqual. perturb. Pot. in K [$\frac{1}{2}q$]. Pot. in D $=$ AE : CF $=$ [ob Triang. similia AED & CFD] AD : CD $= b : c - z$; unde Potentia sustinens pontem AC in D $= (cq - qz) : 2b$. Ex altera parte, dum grave P conatur descendere per elementum curvæ PQ, velocitas ejus in perpendiculo est QN; seu dy, & velocitas potentiæ sustinentis grave, QO, seu dz; ideoque $dz : dy = p : \frac{pdy}{dz} =$ Pot. sust. grave P $=$ [per hyp.] Pot. sust. pontem AC $= (cq - qz) : 2b$, hoc est, $2bpdy = cqdz - qzdz$; integrataque æquatione, $4bpy = 2cqz - qzz$. N. LXIII.

2. *Aliter, sine differentialium calculo.*

$AC^2 + AD^2 - CD^2 = 2DAF$, id est, $aa + bb - cc + 2cz - zz = 2b$ in AF, id est, [ob $cc = aa + bb$] $AF = (2cz - zz) : 2b$. Ergo pondus pontis q in $\frac{1}{2}$ AF, sive quantitas ascensus perpendicularis centri gravit. ejus $= (2cqz - qzz) : 4b$. Quantitas vero descensus isochroni appositi gravis P est py; quare $py = (2cqz - qzz) : 4b$, seu $4bpy = 2cqz - qzz$; ut antea.

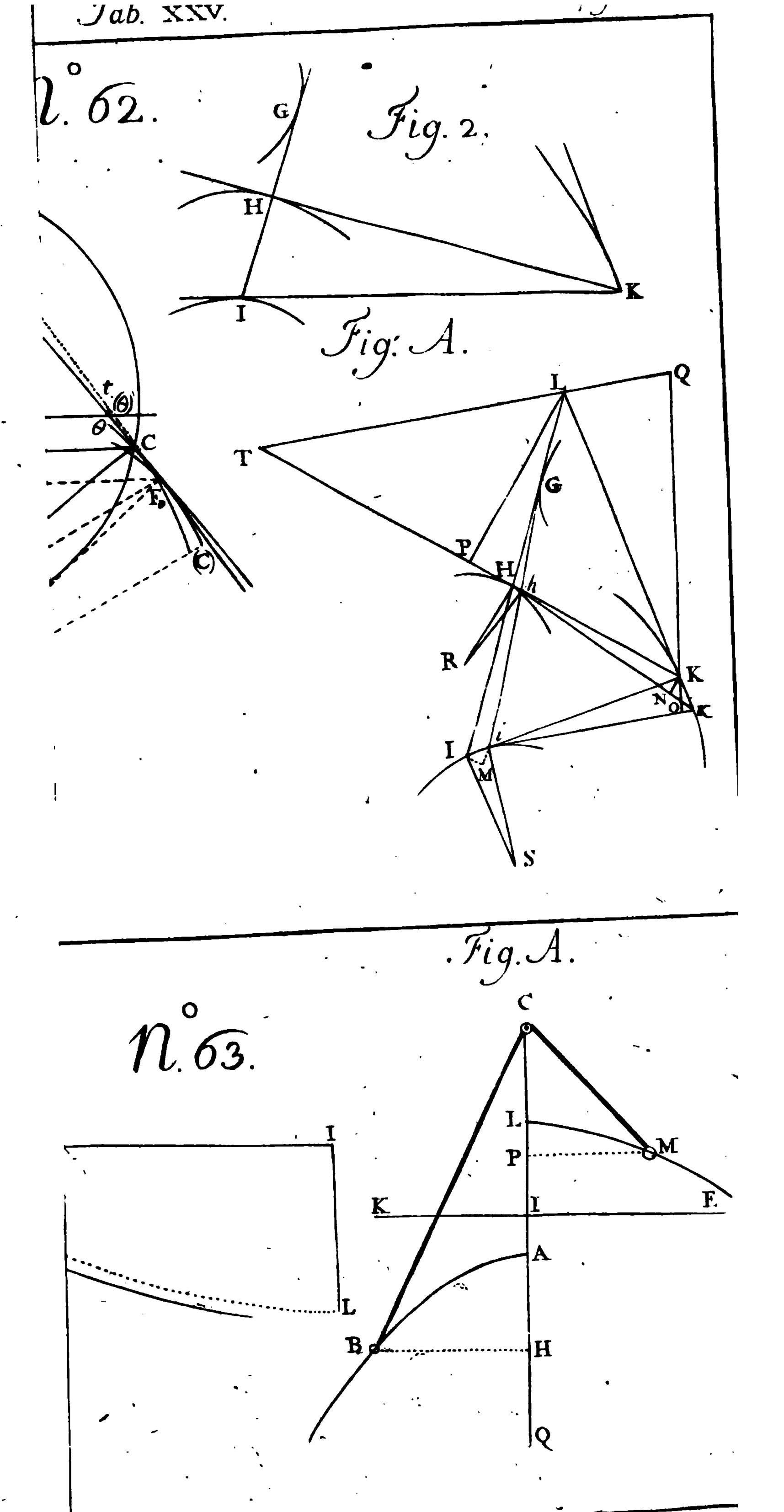
Constr. Factis angulis rectis AHI & HIL, sic ut HI æquetur ipsi BD, IL vero sit longitudinis arbitrariæ, modo non excedat alterius semissem; describatur per puncta L & H Parabola LNH, cujus vertex L & axis IL. In hac sumptum sit quodvis punctum N, per quod transeant rectæ NM, NP, parallelæ ipsis HA, HI; factaque HG $=$ HM, centro D, radio DG, arcus describatur GPO secans NP rectam in P. Erit punctum hoc in optata curva HQ. Grave P ei imponendum ad pontis pondus habet rationem compositam ex ratione DB ad duplam AD, & ejusdem DB ad duplam IL. Hinc grave P semper excedere debet semissem ponderis ipsius pontis. Dimidio vero potest minui, si in extremitate pontis C alia intelligatur trochlea, quam funis CD amplectatur. (a)

(a) Animadvertit Cel. *Joh.* BERNOULLI Frater Auctoris curvam op-

N.LXIII. tatam HQ cycloidalem esse genitam ex rotatione circuli super æqualem circulum. Videatur ejus animadversio in solutionem Dni. *Marchionis* HOSPITALII *Act. Erud. Lips.* 1695, Febr. pag. 60. seq. Interim mihi temperare non possum, quin elegantissimam ejus & generalissimam solutionem adjungam. Problema sic generaliter sibi proposuit. *Data in plano verticali curva quavis* AB [Fig. A], *quæritur in eodem plano altera curva* LM, *ita ut duo pondera data* B, M, *communi funiculo* BCM *trochleam fixam* C *ambienti alligata, & curvis ubicunque imposita, semper sibi mutuo æquilibrentur.* Illudque ita solvit. „ Pro principio, inquit, assumo notissimum illud axioma staticum; In omni motu gravium æquilibratorum, centrum gravitatis neque ascendit, neque descendit, sed perpetuo manet in eadem altitudine horizontali. Ut hoc ad præsens negotium applicetur, curva quæsita debet habere proprietatem talem, ut duo pondera M, B habeant, in quovis situ, semper eundem horizontalem axem æquilibrii. Per ductam itaque verticalem CQ agatur utcunque horizontalis KIE [quæ constantem axem æquilibrii denotet,] fiatque ut pondus datum M ad pondus datum B, ita distantia brevissima IH [quæ data est ob curvam datam AB] ad quartam IP, quæ ad partem contrariam sumenda est, & ducenda parallela PM, quæ secabit arcum centro C & radio CM [differentia funiculi totius & partis datæ CB] descriptum in puncto M, quod erit ad curvam optatam. Hoc enim modo fit, ut centrum gravitatis commune ponderum B & M semper existat in linea horizontali KIE, quæ cum ad arbitrium ducta, ita duci potest, ut curva optata transeat per quodlibet punctum datum, &c.



N°. LXIV.



N°. 62.
Fig. 2.
G
H
I
K
Fig. A.
L
Q
T
G
P
H
h
R
K
N
O
K
I
M
S
t
(θ)
θ
C
E
(C)
Fig. A.
N°. 63.
C
L
M
P
K
I
F
A
B
H
Q
I
L

N°. LXIV.

G. G. L. *

CONSTRUCTIO
PROPRIA PROBLEMATIS
DE CURVA ISOCHRONA
PARACENTRICA.

Ubi & generaliora quædam de natura & calculo differentiali osculorum,

Et de constructione linearum transcendentium, una maxime geometrica, altera mechanica quidem, sed generalissima.

Accessit modus reddendi inventiones transcendentium linearum universales, ut quemvis casum comprehendant & transeant per punctum datum.

A Celeberrimo Viro *Jacobo* BERNOULLIO, Matheseos apud Basileenses Professore, in *Actis mensis Junii* nuperi †, velut invitatus; præsertim circa Problema a me olim, cum nondum nostra calcu- *Acta Erud. Lipſ. 1694. Aug. p. 364*

* *Gothofredi Guilielmi* LEIBNITII. † N°. LIX. pag. 601.

N. LXIV. landi methodus frequentari cepisset, propositum, responsionem defugere nolui, tametsi & valetudo vacillans & aliæ multiplices causæ excusare me fortasse possent. Et quidem profundius ista meditari non licet, aut demonstrationes introspicere; minime tamen dubito, pro explorato acumine *Viri*, vera attulisse. Quo constituto, libenter agnosco non facile in specialium Problematum solutione apud Geometras pulchriora repertum iri. Quædam tamen annotabo, quæ mihi primo aspectu sese obtulere, nec novo studio indigebant. Theoremata pro inveniendis radiis circulorum osculantium * elegantia & utilia sunt; utorque similibus vel expresse, vel potius virtualiter, ipsa calculi nostri natura jubente, quoties generatricem evolutoriam vel oscula quæro lineæ non nisi differentialiter, seu per tangentium proprietatem datæ; tunc enim ut ex duabus incognitis generatricem determinantibus unius [altera sublata] valor, per ipsas *x*, *y*, *dx*, *dy* lineæ differentialiter datæ, generaliter habeatur, utique veniendum est ad differentio-differentiales; quæ tamen cessant in applicatione, quia *dy* : *dx* per ordinarias explicatur. Sed & pro centris, non minus ac radiis, circulorum osculantium Theoremata generaliora formari possunt, quæ certorum elementorum æqualitate non indigent. Tale hoc est [cujus Corollaria sunt, quæ Vir Clarissimus attulit,] Radius osculi est ad unitatem, ut elementum unius coordinatæ est ad elementum rationis elementorum alterius coordinatæ & curvæ. *Rationem* autem hic sumo pro re homogenea unitati vel numero, quæ oritur ex divisione antecedentis per consequens. Item: Distantia centri osculantis circuli ab ordinata curvæ est ad unitatem, ut tertia proportionalis elementorum abscissæ & curvæ est ad elementum rationis elementorum abscissæ & ordinatæ. Et quod notatu dignum est, possunt hæc indagari sine meditatione figuræ; nempe ex calculo solo a nobis proposito: quærendo scilicet æquationem localem ad rectam curvæ normalem, eamque differentiando secundum quantitates in ea geminatas, methodo a me præscripta in *Actis Aprilis*, 1692, & nuper † illustrata. Nempe sit [*Fig.* 1] abscissa AB, *x*; ordinata BC, *y*; vel contra; & elementum curvæ sit *dc*. Et CP ad curvam perpendicularis axi occurrat in P; sumaturque in ea punctum quodcunque G, unde ad axem normalis GF ducatur. Jam sit AF, *f*; & GF, *g*; fietque [cum signa ita postulabunt] $g + y$ ad $f - x$ ut dx ad dy, seu fiet $g + y = (f - x)\, dx : dy$, quæ est æquatio localis ad rectam indefinite productam, curvæ normalem. Verum, quia jam duarum hujusmodi rectarum quæritur intersectio, differentianda est hæc æquatio; hoc tantum observato, ut *g* & *f*, ob commune punctum concursus, considerentur velut coincidentes in utraque recta, adeoque indiffe-

* N°. LVIII. pag. 578.

† N°. LXI.

differentiabiles. Et fiet $dy = (f - x)\, d(dx : dy) - dx dx : dy$; seu N. LXIV. $dcdc : dy$ [tertia proportionalis ipsis dy, dc] est ad $d(dx : dy)$ [elementum rationis inter dx & dy] ut $f - x$ ad unitatem: quod est posterius Theorema ex iis quæ paulo ante adduxi. Quod si rationem inter dx & dy vocemus r, fiet dx ad $rdr : (1 + rr)$ [elementum quoddam pro dicta ratione logarithmicum] ut distantia a coordinata nempe $f - x$ est ad unitatem (a). Iisdem positis, radius osculi vocetur q, fiet $q dy : dc = f - x$; & differentiando fiet $qd\,(dy : dc) = - dx$ seu fiet q ad 1, ut $- dx$ ad $d(dy : dc)$ vel q ad 1, ut dy ad $d(dx : dc)$ quod est Theorema prius. Et omnino variari ista possunt infinitis modis, constituique pro usu Problematum; potissima tamen elegantioraque consignari prodest ad scientiæ incrementum. Et latent sane in istis, quæ egregios usus habere possunt.

De *Elastro* in universum quidem dici, opinor, potest: tensionem esse proportionalem vi tendenti. Sed cum in solidi contenti mutatione tensio consistat, non solet tota in longitudinem refundi; ut si fingamus pilas inflatas in lineam positas esse, vicinamque vicinæ nodo quodam alligari, ac totum funem ex illis compositum intendi; manifestum est, funis extensionem in longitudinem non fore proportionalem tensioni aeris inclusi in pilis, seu vi tendenti. Quæ causa etiam est, quod de lamina elastica non, æque ac de catena, certi aliquid constitui potest. Itaque recte *Clarissimus Vir* generalia dedit pro quacunque tensionis lege.

Cum varios modos construendi transcendentes lineas examinassem olim, omnium absolutissimum esse repereram, qui fieret inventione punctorum quotcunque per meras quantitates ordinarias seu algebraicas, supposita tantum una quantitate constante transcendente pro punctis omnibus: cum alias perpetuo transcendentibus novis sit opus pro puncto quovis. Et hoc modo usus eram ad catenariæ constructionem. Is igitur valde probatur *Celeberrimo Viro* pagina 271 *: dolendum tamen censet, quod non sit universalis; etsi enim succedat in his, quæ pendent a logarithmis vel quadratura hyperbolæ, non tamen adhiberi posse, ubi quadratura circuli vel altior alia requiritur. Cum vero mihi secus videatur, omninoque arbitrer pro circuli dimensione, imo & pro altioribus, simile aliquid fieri posse; ad promotionem scientiæ interest, ut res nonnihil declaretur. Nempe

 quod

(a) Nempe, per mox demonstr. $f - x : 1 = \frac{dc^2}{dy} : dr$. Sed $dc^2 : dy^2 = (dy^2 + dx^2) : dy^2 = dy^2 : dy^2 + dy^2 : dx^2 = 1 + rr$. Ergo $dc^2 : dy = (1 + rr)\, dy$, & $(f - x) : 1 = (1 + rr)\, dy : dr = (1 + rr)\, rdy : rdr = (1 + rr)\, dx : rdr$ [est enim $rdy = dx$] $= dx : \frac{r\,dr}{1 + rr}$.

* Pag. 591.

N. LXIV. quod pro quadratura hyperbolæ præstat sectio rationis, seu inventio mediarum proportionalium, id pro circulari præstat sectio anguli. Itaque loco logarithmicæ adhiberi potest *Linea sinuum* [nostro more explicata] vel Linea tangentium, aliaque similis. Nempe sumatur quadrans circuli ABCGA, [*Fig.* 2] cujus basis BC est sinus totus, altitudini BA utcunque productæ in E, tanquam axi, ordinatim applicentur sinus recti, hoc modo: Arcus quadrantis bisecetur in G; & segmenta AG, CG rursus bisecentur in H & K; & segmenta AH, HG, GK, KC denuo bisecentur, eodemque modo pergi intelligatur. Porro similiter altitudo EB bisecetur in (G); & E (G), B (G) in (H) & (K) atque ita porro: tum ipsæ rectæ a punctis sectionum ad axem ductæ, ut GL, HM, KN seu sinus angulorum GBA, HBA, KBA, [quos cum basi comprehendunt radii a punctis sectionum arcus ad centrum ducti] ordinatim applicentur respondentibus punctis sectionum altitudinis; seu transferantur in (G) (L); (H) (M); (K) (N); & sinus totus BC, in B (C); & linea E (M) (L) (N) (C) erit linea sinuum. Atque ita, si ordinatæ velut (M) (H) sint ut sinus angulorum [velut ABH], abscissæ E (H) erunt ut anguli, seu ut arcus, [velut AH]. Et, siquidem tota altitudo EB sit æqualis arcui quadrantis, abscissæ erunt arcubus dicto modo respondentibus æquales. Igitur linea hæc sinuum per puncta describi potest, non minus ac logarithmica. Ipsa autem semel descripta, dataque una sola quantitate constante, quæ est ratio diametri ad circumferentiam; seu data ratione arcus quadrantis AGC, ad radium BC; adeoque data ratione arcus AGC ad altitudinem BE [cujus ratio ad BC pro arbitrio sumpta est,] patet, ope lineæ sinuum descriptæ, arcum circuli quemvis dari; adeoque & segmenti cujusque circularis vel sectoris quadraturam. Quemadmodum autem in logarithmica datur unica illa quantitas requisita, si detur figuræ descriptæ tangens; ita in linea sinuum idem est. Nam si ordinatæ sint sinus, & abscissæ sint proportionales arcubus, erunt elementa abscissarum proportionalia arcuum elementis. Jam elementum arcus est ad elementum sinus, ut radius ad sinum complementi. Ergo in figura sinuum dicta, erit elementum abscissæ ad elementum ordinatæ, id est, erit subtangentialis quæcunque T (G) ad ordinatam GL seu sinum, in ratione composita radii AB ad arcum quadrantis AGC, & altitudinis BE ad BL sinum complementi; & ipse arcus quadrantis erit ad radium, ut BE altitudo lineæ sinuum est ad T (G) subtangentialem quadraginta quinque graduum sinui respondentem. Porro quemadmodum lineæ transcendentes, id est, æquatione algebraica, seu certi gradus, inexplicabiles, nempe de gradu in gradum transeuntes, describi possunt sectione rationis & anguli; ita manifestum est, innumerabiles alias hujusmodi per puncta constructiones posse excogitari linearum transcendentium, quas ad alias quadraturas, itemque ad tangentium inversam methodum, seu differentialium primi gradus constru-

constructionem profuturas ex dictis intelligi potest. Atque ita ad novum velut Pelagus meditationum aditus patet, quod rite ingredienti præclara dabit; cum in his vera consistat connexio Analyseos algebraicæ atque transcendentis. Qua occasione noto obiter, quod *Vir Clarissimus* in mei gratiam algebraicas se inposterum vocaturum ait, quas ante geometricas vocaverat, non ita a me accipi, quasi mihi nescio quam in his affectationem imputet; sed quod rationes meas non improbet, quibus inductus statuo, quicquid exactum est geometricum esse, mechanicum vero quod fit appropinquando; nec minus peccasse CARTESIUM hæc Geometria excludendo quæ ipsius Analysi non subjiciebantur, quam Veteres CARTESIO peccasse erant visi, qui lineas supra rectam & circulum ad mechanicas retulerant. N. LXIV.

Nota, quam *Vir Clarissimus* adhibet pagina 271 *, unde intelligatur, an quadratura figuræ ordinariæ ope logarithmicæ exhiberi possit, quod scilicet res tum demum succedat, cum ordinata figuræ quadrandæ est subtangentialis algebraicæ; non videtur universalis; nec nisi pro illis est, quæ simpliciore ratione per logarithmos construuntur. Nam eo casu, quo hæc nota locum habet, logarithmus ordinatæ ad alteram illam curvam algebraicam dicta subtangentiali præditam, erit æqualis rationi, quam ordinata quadratricis seu summatricis habet ad constantem; scilicet in quadratrice sit ordinata y, in quadranda t, in altera algebraica v; abscissa utrobique sit x, & in algebraica ad v sit subtangentialis q; sitque $ady = tdx$; & t detur per x, & ob notam præscriptam sit $q = aa : t$, erit ex natura subtangentialis $dx : q = dv : v = tdx : aa = dy : a$. Ergo log. $v = y : a$. Sit jam in exemplo ad instantiam apto $t = x + aa : x$, fiet $y = xx : 2a + a$ log. x ([b]). Ergo si nota ipsa esset universalis, deberet dari algebraica v, cujus logarithmus esset $xx : 2aa +$ log. x ([c]); seu logarithmus rationis inter quantitates algebraicas v & x ([d]) deberet esse quantitas algebraica $xx : 2aa$ indefinite, in quibuscunque v vel x; quod fieri nequit. Invenire autem, utrum quadratura fieri possit per logarithmicam, vel etiam per dimensiones conicas, alterius est Analyseos, quam a methodo tangentium inversa distinguo. Et quod ad hanc attinet, agnosco me proposuisse, inter alias, viam per æquationem generalem $a + bx + cy$ &c. ad curvam indefinitam; cujus usum non contemnendum puto, praxi ipsa & speciminibus edoctus. Sed contractionibus quibusdam, aliaque industria opus est.

* Pag. 591.

([b]) Integrando scil. æquationem $dy [= tdx : a] = xdx : a + adx : x$.

([c]) Quoniam log. $v = y : a$.

([d]) Nempe log. $v -$ log. $x = xx : 2aa$.

N. LXIV. Ad seriem quam Professor Clarissimus exhibet pagina 274 * pro exprimenda quantitate $y = \int (xxdx : \sqrt{(1 - x^4)})$ perveniri etiam potest simplici expressione potentiæ binomii. Nam $(1 + b)^e = 1 + \frac{e}{1} b + \frac{e.(e-1)}{1.\ 2} bb + \frac{e.(e-1)(e-2)}{1.\ 2.\ 3} b^3$ &c. quod si fit $= 1 : \sqrt{(1 - x^4)}$ erit $e = -1 : 2$ & $b = -x^4$, unde explicando seriem $1 + \frac{e}{1} b$ &c. & proveniens multiplicando per $xxdx$, habebitur valor ipsius dy: unde fiet $y = \frac{1}{3.\ 1} x^3 + \frac{1}{7.\ 2.\ 1} x^7 + \frac{1.\ 3}{11.\ 4.\ 1.\ 2} x^{11} + \frac{1.\ 3.\ 5}{15.\ 8.\ 1.\ 2.\ 3} x^{15}$ &c. Ego sane, compendii causa, utor hoc artificio post NEWTONUM etiam ad series meas, cum unica irrationalis calculum ingreditur; quia sic sublatio ejus evitatur. Quanquam & post exaltationes [prolixius licet] ad idem perveniri possit, methodo a me præscripta.

Venio jam ad Problematis mei solutionem, seu *lineæ* [quam voco] *Isochronæ paracentricæ* a me propositæ constructionem, occasione curvæ elasticæ a Viro Clarissimo feliciter inventam, & ipsa ejus evolutione exhibitam; qua me invitare videtur, ut meam quoque solutionem prodam. Fecissem multo ante, si satis vacare liceret his laboribus. Jam enim ante complures annos habui, & quidem paulo post Isochronam simplicem inventam ([e]), quando & publice proposui quærendam hanc paracentricam paulo difficiliorem. Sed plerumque viam reperisse contentus, prosecutione abstinere cogor. Adeo ut ad ipsius Catenariæ constructionem vix demum, diu post repertam ejus analysin, me accinxerim; cum scilicet amici urgerent. Apparebit autem, meum processum non tam ab eo, quod feliciter extrinsecus oblatum est, quam ex ipsius rei natura statim per se provenisse. Et quanquam adeo non improbem constructionem datam, ut laudem potius, quippe quæ ad rem difficilem Auctori aditum dedit; nec iis assentiar, qui peccatum dicunt, composito magis modo præstari quod potest simpliciore, [neque enim peccatum est, quod perfectissimum non est,] cum tamen mihi sese obtulerit constructio satis expedita per rectificationem curvæ ordinariæ, hanc velut toto genere simpliciorem illa, quam Vir Clarissimus dedit, paucis designare voluit. Nam ipse curvam quandam construit, quadratura seu dimensione ejus figuræ, cujus ordinata est $axx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$. Et hujus quadratricis transcendentis [quam ob usum Elasticam vocat] rursus dimensionem adhibet, ut solvatur Problema quæsitum:

* Pag. 596.

([e]) Cujus constructionem vide N°. XXXIX. pag. 421.

tum: atque ita curvam a me propositam efficit per solutionem transcen- N.LXIV.
dentalem secundi generis. Sed cum curva sit ipsamet nonnisi generis primi, quia tantum ad ejus constructionem requiritur quadratura figuræ cujus ordinata est $\sqrt{(a^4 - x^4)} : a$ (f); ideo lineam quoque quæsivi algebraicam, cujus rectificatione quæsitum commode præstaretur. Quomodo autem hæ duæ quadraturæ conicis dimensionibus respondeant, alias ostendam. Adest enim peculiaris pro talibus Analysis. Sane si quadranda esset figura ordinatarum $\sqrt{(a^4 + x^4)}$ [quæ signo tantum a dicta differt] per extensionem curvæ hyperbolicæ res præstaretur (g). Sed nunc ad propriam constructionem Problematis propositi progrediamur.

Quæritur qualis sit [*Fig.* 3.] linea *Isochrona paracentrica* 1C 2C 3C, in qua moto gravi, quod descendit ex altitudine H, accessus & recessus, respectu centri cujusdam A, seu puncti fixi, sit æquabilis; adeoque elementa distantiarum ab A sint elementis temporum proportionalia. Distantiæ AC repræsentent tempora t; ex 1C agatur 1C1θ, normalis ad A2C, erunt 1θ2C, ut elementa temporum dt. Arcus curvæ appellentur c; elementa eorum, dc, tanquam elementa spatiorum, quæ grave percurrendo absolvit. Sunt autem [ex generalissima motus lege] elementa spatiorum in ratione composita velocitatum & temporis elementorum. Velocitas vocetur v. Hinc [1] dc ut vdt. Distantia inter horizontes punctorum H & A, seu HA, vocetur a. Porro, ex lege motus gravium, velocitates sunt in duplicata ratione altitudinum HB. Sit AB, x, & HB erit $a + x$ [nam varietates signorum pro talibus in ipso litteræ valore comprehendo, nec in calculo moror, cum omnia eodem modo proveniant] fiet [2] vv ut $a + x$, & per 1 & 2 fit dc ut $dt \sqrt{(a + x)}$ seu ad implendam legem homogeneorum [3] $dc = dt \sqrt{(aa + ax)} : a$. Jam centro A, radio si placet AH, describatur circulus HKM, axem AB secans in K, & AC in M. Et arcus KM [qui vocabitur m] repræsentet angulum conversionis rectæ ACM circa A; itaque, 1M 2M, seu dm, erit ipsius

(f) Pendet enim Isochronæ Paracentricæ constructio [N°.LIX.Not.d, p.603.] ab integratione hujus quantitatis $aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, cujus integralis est $\frac{3}{2aa} \int (dx \sqrt{(a^4 - x^4)}) - \frac{x}{2aa} \sqrt{(a^4 - x^4)}$. Pendet igitur constructio ab integratione hujus $dx \sqrt{(a^4 - x^4)}$.

(g) Quadratura figuræ, cujus ordinata $= \sqrt{(a^4 + x^4)} : a$, pendet manifesto ex dimensione parabolæ cubicæ, cujus scil. abscissa x, ordinata $x^3 : aa$. Id monitus LEIBNITIUS agnovit, dixitque „ sibi visum fuisse, „ cum ista sub manibus olim haberet, „ videre connexionem cum dimen„ sione curvæ hyperbolicæ; sed ta„ lia tunc resumere non licere." Procul dubio memoria lapsus erat Vir Celeberrimus.

N. LXIV. sius arcus circuli, sive motus angularis, seu vertiginis, elementum. Itaque sit 1C 1θ $= tdm : a$. Est autem quadr. 1C 2C æquale quadr. 2C 1θ + quadr. 1θ 1C. Ergo [4] $dcdc = dtdt + ttdmdm : aa$ [5] = [per æqu. 3] $dtdt + xdtdt : a$. Ergo [6] $dt : t = dm : \sqrt{ax}$. Ex M ad axem agatur normalis ML, & AL vocetur z, fiet [7] $ax = zt$, nempe ob triangula similia ALM, ABC. Et per 6 & 7 fit [8] $dt : \sqrt{at} = dm : \sqrt{az}$. Jam ex proprietate tangentium circuli est [9] dm ad dz ut a ad $\sqrt{(aa - zz)}$ id est, ut AM ad ML, radius ad sinum anguli KAM. Et ex 8 & 9 fiet [10] $dt : \sqrt{at} = adz : \sqrt{(a^3z - az^3)}$. Unde summando $2\sqrt{at} = aa\int(dz : \sqrt{(a^3z - az^3)}) + b$; ubi b est quantitas constans pro arbitrio assumpta. Id enim licet inter summandum, quoties non vetamur Problematis conditionibus. Quod cum non satis observari videam, monere hoc loco volui, quoniam interest ad solutionum generalitatem. Nam infinitæ satisfaciunt curvæ, iisdem manentibus punctis H & A, sed quæ variari possunt pro variata recta b, adeo ut curva quæsita [quantum judico] reperiri possit, quæ transeat, per punctum datum (h). Nunc superest absolvenda quadratura $\int(dz : \sqrt{(a^3z - az^3)})$ id est, [si AN sit media proportionalis inter AL & AK] invenienda est area figuræ, cujus ordinata sit ad AH, ut quadratum ab AH ad rectangulum sub AN & LM.

Hanc quadraturam ita efficiemus: In HK, sumatur LW æqualis ipsi EK diagonali ab AH vel AE, & juncta MW, sumatur Aβ in AK, si opus producta, quæ sit ad AN in duplicata ratione MW ad WL, seu EK. Et ipsis Aβ ordinatim ad angulos rectos applicentur βγ, quæ sint ad LM [respondentes] ut rectangulum NAL ad quadratum ab EK. Et per puncta γ describatur linea Aγ, cujus extensione in rectum habebitur quadratura paulo ante dicta. Nempe triplum rectanguli sub curva Aγ & recta AH, dempto quintuplo dimidii rectanguli sub AN & LM [$= \frac{4}{5}\sqrt{(a^3z - az^3)}$] dabit Figuræ supra dictæ ab A incipiendo sumptæ [cujus ordinatæ sunt reciproce proportionales dictis rectangulis sub AN & LM] aream; quam applicando ad a prodibit recta $aa. \int(dz : \sqrt{(a^3z - az^3)})$ (i).

Hæc

(h) Vid. Num. LXVI. Art. IV.

(i) Est enim $EK = LW = a\sqrt{2}$, $MW = \sqrt{(3aa - zz)}$, $AN = \sqrt{az}$; adeoque cum sit $EK^2 : MW^2 = AN : A\beta$, erit $A\beta = \frac{3}{2}\sqrt{az} - \frac{zz}{2aa}\sqrt{az}$, & cum sit $EK^2 : NA \times AL = LM : \beta\gamma$, erit $\beta\gamma = \frac{z}{2aa}\sqrt{(a^3z - az^3)}$. Igitur longitudo curvæ Aγ, vulgari modo computata, invenietur $= \int((3a^2 - 5z^2)dz : \sqrt{(a^3z - az^3)})$, ex cujus triplo in a [AH] ducto, si subducatur $\frac{4}{5}\sqrt{(a^3z - az^3)}$, remanebit $\int(a^3dz : \sqrt{(a^3z - az^3)})$, id quod differentiatio manifestat. Sufficiat hæc Synthesis. Analysin enim quid necesse est quærere, post Methodum generalem *Bernoullianam*, quam citavimus N°. LX, Nota b, in fine pag. 610.

Hæc recta sumatur cum recta constante b; [signis tamen, prout casus postulant, variatis], provenientis dimidium vocetur p. Ergo per æqu. 10 fit $\sqrt{at} = p$ seu [11] $t = pp:a$. Et cum p habeatur ex z & a, habebitur ex illis & t, seu AC. Ergo & x, seu AB, per æqu. 7. Cum ergo ex assumpta AL, seu z, quacunque habeatur AB magnitudine, adeoque & positione, at AC magnitudine; habebitur AC etiam positione, seu dabitur punctum C. Nam centro A, radio AC magnitudine dato, describatur circulus, cui ex B normaliter ad AB educta occurret in puncto C, quod est in curva Isochrona paracentrica quæsita. Delineationes variabunt pro casibus, quam in rem & b assumpta variari debet. Nam quod arbitratur *Vir Clarissimus* (l), non nisi unam lineam quæsitam dari ad idem punctum A, & ad eandem altitudinem H; id rogo, ut denuo expendat: mihi enim visum est infinitas haberi posse, ita ut assignari regulariter queat, quæ per datum punctum transeat; exceptis punctis horizontalis rectæ transeuntis per A. Quin &. supra A talis linea intelligi potest. Tantum vero ipsius acumini & profundæ harum rerum notitiæ tribuo, ut quod, re rite expensa meisque rationibus consideratis, secunda meditatione statuet, plurimum apud me ponderis sit habiturum. N.LXIV.

Interim quemadmodum rationem universalem hic aperui per quam solutiones Problematum differentialium redduntur generales; quæ neglecta, ni fallor, obstitit quo minus Vir Clarissimus hic omnes lineas quæsito satisfacientes complecteretur: ita dabo modum mechanicum quidem, sed tamen ob universalitatem & praxeos commoditatem non contemnendum, cujus ope *quæcunque lineæ quæsitæ transcendentes differentialiter datæ per punctum datum* [*quando id fieri potest*] *duci possunt*, idque tam exacte, quam quis volet, licet non, ut geometricus supra declaratus exemplo lineæ sinuum per puncta vera, sed tantum per veris proxima incedat. Habetque hunc usum, ut de linearum possibilitate, forma, & natura, multa etiam ante veram solutionem cognoscere possimus. Quin & ad differentio-differentiales cujuscunque gradus applicari potest. Nempe, in exemplo præsente, datum sit punctum 1C, per quod ducenda linea Isochrona paracentrica CC, in qua grave lapsum ex altitudine H æquabiliter recedat a centro A; quæritur punctum aliquod aliud proximum 2C, ita ut recta 1C 2C sit latus polygoni, curvæ succedanei? Præter rectam A1M, in quam [si opus productam] incidit 1C, ducatur alia, quantum satis vicina A2M, ad eas partes ad quas ducere volumus lineam CC, & ad A2M agatur ex 1C perpendicularis 1C 10. Et in A10 [si opus producta] sumatur ad eas partes, ad quas ducitur linea 1C 2C, recta ipsi AH æqualis 10 1P; unde perpendiculariter educatur 1P 1Q ad easdem quas dixi partes.

(l) N°.LIX. Cor.2. p.605. Vide ibi Notam (e) & Num.LXVI. Art.IV.

N. LXIV. partes. Bisecta AB in ω, centro ω, radio ωH, descriptus circuli arcus secet AE, si opus productam, in R; seu brevius quæratur AR media proportionalis inter AH & HB. Denique centro 1C, radio æquali ipsi AR, descriptus arcus circuli secet 1P 1Q in 1Q, & juncta 1C 1Q, secabit ipsam A 2 M, si opus productam, in puncto quæsito 2C. Eodemque modo ex puncto 2C quæretur 3C, & ita porro. Et sic habebitur polygonum 1C 2C 3C &c. lineæ quæsitæ succedaneum, seu linea Mechanica Geometricæ vicaria (m); simulque manifeste cognoscimus, possibilem esse geometricam per datum punctum 1C transeuntem, cum sit limes, in quem polygona continue advergentia evanescunt. Ita simul & seriem quantitatum ordinariarum habemus transcendenti quæsitæ advergentem.

Quæ ad tangentium conversam de cætero meditati sumus, alio loco, Deo volente, proferemus: multa enim diversissima itinera non sine successu exploravimus, tametsi prosequi satis non vacet. Pro radicibus æquationum omnino dari puto methodum generalem, neque imaginarias moramur. Itaque quod inde colligit Vir Doctissimus *, hactenus probo, ne miremur, si in Transcendentibus intra paucissimos annos non omne præstitum est quod vellemus; quando in ipsa Analysi ordinaria, seu algebraica, circa radices æquationum, seu valores incognitarum analyticos, nemo gradum quarto altiorem absolvit, nec VIETA, vel CARTESIUS in eo negotio quicquam majorum inventis adjecerunt.

Postremo ne disceptatiunculæ pristinæ inter nos, circa numerum radicum osculationis, monitorumque *Viri Clarissimi* plane obliviscar †. Equidem quod initio scripseram, cum materiam hanc Geometris proponerem, adhuc mihi verum videtur; quando scilicet circulus lineam osculatur, duos contactus, seu quatuor intersectiones in unum abire; adeoque adesse quatuor radices æquales. Interim verum quoque est, si quis modo circulum reperiat lineæ in tribus punctis coeuntibus occurrentem, habere osculantem. Nam quartum punctum eo ipso adest, etsi ejus non fiat mentio. Cujus rei ratio est, quod nunquam circulus lineam ad easdem partes cavam secat in tribus punctis, quia simul secet in quarto. Si vero circulus lineam secet in tribus tantum punctis; oportet in arcum lineæ, in

(m) Est enim, [ob parallelas Cθ, PQ] CQ : θP = CC : 1θ2C vel 2θ3C. Atqui, ex constructione CQ = AR = mediæ proportionali inter AH & HB = $\sqrt{(aa+ax)}$, & θP = AH = a, ac quæ quasi infinite parva sumitur, CC = dc, nec non 1θ2C aut 2θ3C = dt. Igitur analogia supra posita analytice exprimitur sic, $\sqrt{(aa+ax)} : a = dc : dt$, unde $dc = dt\sqrt{(aa+ax)} : a$, quæ est æquatio 3, pag. 633.

* N°. LIX. pag. 607. Item N°. LXII. pag. 622.

† N°. LVI. Art. 2. pag. 559.

in punctis interceptum, cadere punctum flexus contrarii. Et tamen nihilominus in ipsomet puncto flexus possumus pro osculante concipere quatuor intersectionum coincidentiam, seu duos ab eodem latere curvæ contactus circulares, unum ante, alterum post punctum flexus, seu unum in concava, alterum in convexa parte arcus ex duabus partibus hujusmodi compositi; qui contactus continue convergentes tandem in ipso flexu coibunt. Et revera flexus contrarius est punctum extremum commune, in quo duæ lineæ, una concava, altera convexa, [unam totam constituentes] se tangunt. Coincidunt ergo duo contactus seu quatuor intersectiones in omni osculo. Sed si de intersectionibus rectæ cum linea quæratur, tria tantum puncta intersectionum coincidentia, vel contactum cum intersectione coeuntem, nempe in ipso puncto flexus, non vero duos contactus, concipere licet (*). N.LXIV.

(*) Vide Num. LXVI. Art. 3. sub finem.

N°. LXV.

EXCERPTA

Ex Epistola C. H. Z.

ad G. G. L. *

PRincipium, quo usus est *Clarissimus Matheseos Professor* BERNOULLIUS, verum puto, & bene adhibitum, quod radii qui curvedinem metiuntur, sint in ratione contraria virium rem elasticam flectentium. Puto tamen non tantum superficiem externam extendi, sed & internam contrahi (a). Magnum admodum postulatum est, figurarum. *Act. Erud. Lips.* 1694. Sept. p. 339

* *Christiani* HUGENII *de Zuylichem* ad *Goth. Gul.* LEIBNITIUM.

(a) Vide Num. seq. Art. 1. potissimum autem Num. CII.

No. LXV. rarum curvilinearum quadraturas tanquam datas assumere. Ego me nihil admodum egisse putarem, si Problema aliquod huc tantum reduxissem, excepta tamen Circuli & Hyperbolæ quadratura. Præstat linearum curvarum rectificationes tanquam semper in potestate existentes assumere, quod etiam Tibi probari video.

De reliquo *Clarissimus* BERNOULLIUS videtur mihi tantum [*Fig.* 1] determinasse figuram, ubi tangentes extremitatum sunt parallelæ, cum arcus Elastici A termini per chordam EF junguntur. Sed si arcus sit ut in B, vel C, vel D, aut extremitates non chorda, sed recta rigida HI jungantur, figuræ determinandæ supersunt ([b]). Subtile etiam fatebor inventum consensus inter figuram elasticam & lintei vel veli a liquoris pondere pressi, si modo demonstratum videam ([c]). Alioqui cogor sustinere assensum, quia & ipsum Auctorem circa figuram veli sententiam mutasse video, & demonstrare possum, velum ex numero finito rectarum æqualium compositum [ut *in Fig.* 2] aliam a vento quam a pondere figuram accepturum, cum tamen *Bernoulliana* sententia sit eandem esse velariam cum catenaria: oporteret ergo discrimen evanescere in casu infiniti.

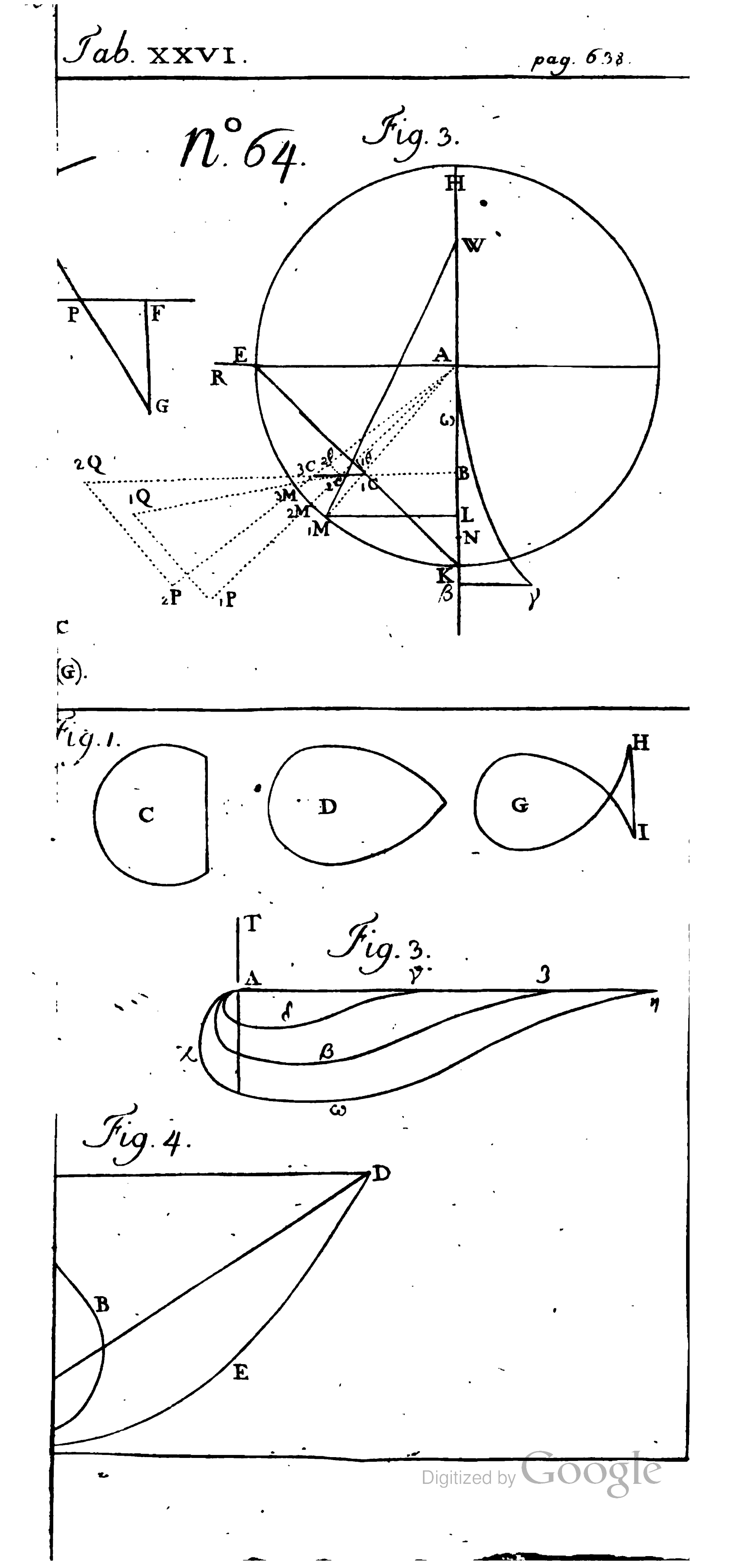
Præstat haud dubie Isochronam tuam Paracentricam construi, ut a Te fieri scribis, rectificatione lineæ ordinariæ, vel saltem talis cujus puncta possint construi, quam per lineæ Elasticæ extensionem, quæ ipsamet nondum est constructa.

Quod ait *Clarissimus* BERNOULLIUS ([d]) unicam tantum esse paracentricam ut Aχωη, [*Fig.* 3.] respectu ejusdem puncti, vel centri A, post descensum ex TA, ejus contrarium manifeste video, Tibique assentior dari infinitas, ut Aβζ, Aδγ, &c. easque sumo usque ad rectam Aι inclusive ([e]). Quin imo supersunt adhuc aliæ Curvæ determinandæ, si scilicet æqualiter accedendum sit ad punctum C, linea autem incipiat vel ab A, directe supra C, vel ad latus a D. Quo casu lineæ ut ABC, DEC infinitos facient gyros circa C [*Fig.* 4].

G. G. L. *ADDITIO.*

Puto *in Figura prima* ex *Bernoulliana* determinatione arcus A etiam duci posse determinationem arcuum B, C, D, G, assumendo lineæ partem, aut eam producendo; sed hoc tamen distincte admoneri operæ pretium fuit. Rationi consentaneum est principium determinandæ figuræ Elasticæ,

([b]) Vide Num. seq. Art. II.
([c]) Vide Num. LVIII. Art. III. Cor. 18. pag. 597. Not. *t*.
([d]) No. LIX. Cor. 2. pag. 605.
([e]) Vide Num. seq. Art. 4.



n°. 64.
Fig. 3.
H
W
P
F
G
E
A
R
B
L
N
K
2Q
1Q
3C
1C
3M
2M
1M
2P
1P
C
(G).
Fig. 1.
C
D
G
H
I
T
Fig. 3.
A
Fig. 4.
D
B
E

No. LXV. rarum curvilinearum quadraturas tanquam datas assumere. Ego me nihil admodum egisse putarem, si Problema aliquod huc tantum reduxissem, excepta tamen Circuli & Hyperbolæ quadratura. Præstat linearum curvarum rectificationes tanquam semper in potestate existentes assumere, quod etiam Tibi probari video.

De reliquo *Clarissimus* BERNOULLIUS videtur mihi tantum [*Fig.* 1] determinasse figuram, ubi tangentes extremitatum sunt parallelæ, cum arcus Elastici A termini per chordam EF junguntur. Sed si arcus sit ut in B, vel C, vel D, aut extremitates non chorda, sed recta rigida HI jungantur, figuræ determinandæ supersunt ([b]). Subtile etiam fatebor inventum consensus inter figuram elasticam & lintei vel veli a liquoris pondere pressi, si modo demonstratum videam ([c]). Alioqui cogor sustinere assensum, quia & ipsum Auctorem circa figuram veli sententiam mutasse video, & demonstrare possum, velum ex numero finito rectarum æqualium compositum [ut *in Fig.* 2] aliam a vento quam a pondere figuram accepturum, cum tamen *Bernoulliana* sententia sit eandem esse velariam cum catenaria: oporteret ergo discrimen evanescere in casu infiniti.

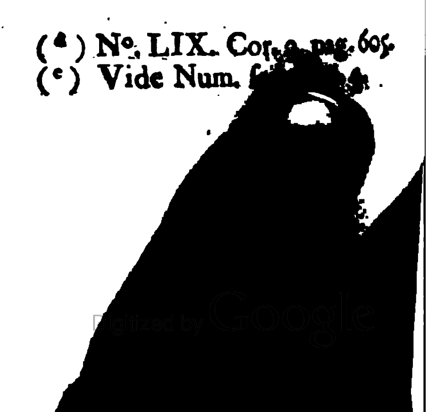
Præstat haud dubie Isochronam tuam Paracentricam construi, ut a Te fieri scribis, rectificatione lineæ ordinariæ, vel saltem talis cujus puncta possint construi, quam per lineæ Elasticæ extensionem, quæ ipsamet nondum est constructa.

Quod ait *Clarissimus* BERNOULLIUS ([d]) unicam tantum esse paracentricam ut Aχωη, [*Fig.* 3.] respectu ejusdem puncti, vel centri A, post descensum ex TA, ejus contrarium manifeste video, Tibique assentior dari infinitas, ut Aβζ, Aδγ, &c. easque sumo usque ad rectam At inclusive ([e]). Quin imo supersunt adhuc aliæ Curvæ determinandæ, si scilicet æqualiter accedendum sit ad punctum C, linea autem incipiat vel ab A, directe supra C, vel ad latus a D. Quo casu lineæ ut ABC, DEC infinitos facient gyros circa C [*Fig.* 4].

G. G. L. *ADDITIO.*

Puto *in Figura prima* ex *Bernoulliana* determinatione arcus A etiam duci posse determinationem arcuum B, C, D, G, assumendo lineæ partem, aut eam producendo; sed hoc tamen distincte admoneri operæ pretium fuit. Rationi consentaneum est principium determinandæ figuræ Elasticæ,

([b]) Vide Num. seq. Art. II.
([c]) Vide Num. LVIII. Art. III. Cor. 18. pag. 597. Not. z.
([d]) N°. LIX. Cor. 2. pag. 605.
([e]) Vide Num. [illegible]



N°. 64. Fig. 3.

H W P F E R A G 2Q 1Q 3C 2C 1C 3M 2M 1M B L N K 2P 1P

Fig. 1.

C D G H I

T

Fig. 3.

A 1 2 3

Fig 4.

D E

Elasticæ, quod vires flectentes sint curvedinibus proportionales; potest- No. LXV.
que ad Hypotheseos aptæ modum assumi, tametsi non prorsus sit exploratum, quo usque natura eo utatur, cum fingi possint constitutiones corporum, ubi res aliter procedat. Præclara sunt monita de diversis Isochronarum paracentricarum speciebus & constitutionibus; omnes tamen mea constructione comprehenduntur. Et licet ipsam lineam rectam A visus sum excludere, quia in ea nullus revera fit descensus vel ascensus, quia tamen in ea potest concipi descensus vel ascensus ut infinite parvus, seu evanescens, haberi potest pro limite, seu ultima harum linearum. Problemata curvarum transcendentium ad quadraturas reducere, magna quidem ad solutionem præparatio est; fateor tamen [seposita mea generali constructione tractoria] præstare rem reduci ad linearum jam constructarum reductiones; quod & ego, quoties opus, feci, faciamque.

No. LXVI.

JACOBI BERNOULLI EXPLICATIONES, ANNOTATIONES ET ADDITIONES

Ad ea quæ in Actis superiorum annorum de Curva Elastica, Isochrona Paracentrica, & Velaria, hinc inde memorata, & partim controversa leguntur; ubi de Linea mediarum directionum, aliisque novis.

I. CUm ea quæ superioribus annis variis speciminibus meditata exhibui, Prælustribus Geometrarum Duumviris Dno. HUGENIO & Dno. LEIBNITIO digna visa fuerint, *Act. Erud. Lips.* 1695. Dec. p. 537

Mmmm 3

N. LXVI. rint, quæ peculiari submitterent examini; ubi nonnulla approbarunt, quædam occultius dicta conjecturis suppleverunt, alibi scrupulos invenerunt, alibi etiam dissensum apertum testati sunt; statui secundas meditationes primis superaddere, & quid de singulis mihi videatur, ordine & candide exponere, ut & Celeberrimorum Virorum desideriis satisfieret, & puriores veritatis scintillæ ex abditis illis naturæ recessibus in dies magis ac magis emicarent. Præmiseram in *Actis* Mensis Junii 1694 * Solutioni curvæ Elasticæ Theoremata quædam de radiis circulorum osculantium, quæ tum nobis solis & paucis aliis, quibuscum Frater nostra communicaverat, perspecta credebam. Respondit Celeberrimus LEIBNITIUS sequente Augusto **, se jam antea similibus, vel expresse, vel tacite usum fuisse: & vero nemo est, qui nesciat, illum etiam multo majora dedisse, & dare potuisse. At quantum ad hæc Theoremata, fateor me dubitandi rationes habuisse. Sciebam enim, Virum acutissimum a Flexionum contemplatione non plane abstinuisse, cujus & ipse in privatis ad me litteris olim mentionem fecit, & ad quam solutionis meæ significatione jam Mense Junio 1691 † facta invitari potuit. Videbam etiam non modo ipsummet principii a me adhibiti Auctorem fuisse, sed & insuper calculum huic superstructum, [sola parte excepta, quæ Theorema dictum concernit] tam simplicem esse, tamque facilem, prout ex analysi quam subjungo palam fiet, ut summe in ipsum fuissem injurius, si credidissem cognovisse Theorema, nec solutionem dedisse. In lamina curvata AQRSYV, [*Fig.* I] cujus elementum constans sit SQ, vectem concipio fulcro Q innixum, in quo laminæ crassities QY brevioris, ipsaque laminæ curvatæ portio QA longioris brachii vicem gerat; unde quia brachium brevius QY, & pondus longiori appensum Z constanter manent eadem, perspicuum fit, vires tendentes fibram SY [hoc est in vulgari hypothesi ipsam tensionem Yy] proportionari rectæ QP distantiæ fulcri a linea directionis ponderis AP. Et

* Supra N°. LVIII. pag. 578.
** N°. LXIV. pag. 628.
† N°. XLII. pag. 451.

Et quoniam, ob similitudinem Triang. YyQ & RQn, ubi etiam RQ longitudo elementi laminæ constans fingitur, dicta Yy reciproce proportionatur ipsi Qn, quam patet esse radium osculi, sequitur ipsam Qn, sive z, quoque reciproce proportionari ipsi QP, seu x; adeoque constans quoddam spatium $\frac{1}{2}aa = xz$; hoc est, per Theorema nostrum, $\frac{1}{2}aa = xdxds : ddy$, seu $aaddy = 2xdxds$, & facta summatione $aady = xxds$, quadrandoque $a^4dy^2 = x^4ds^2$, subtrahendo $(a^4 - x^4)\ dy^2 = x^4ds^2 - x^4dy^2, = x^4dx^2$, ac denique extrahendo radicem $dy\sqrt{(a^4 - x^4)} = xxdx$ seu $dy = xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$; quæ ultima est æquatio, e qua constructio mea, & cætera, quæ dedi, fere omnia fluunt; inque cujus investigatione nihil, ut apparet, Geometras morari potuit, nisi forte transitus ab xz ad $xdxds : ddy$, quem proin illos latuisse non absque veri specie concludebam. Sed utcunque sit de novitate hujus Theorematis, de altero certe, quo dixi, radiis osculorum reciprocas rectas axi applicatas spatium quadrabile efficere *, nemo litem movebit: estque hoc tanto præstantius illo *Barrowiano* de subtangentibus eidem applicatis, quanto osculorum, quam tangentium consideratio rarior hucusque extitit. Huic addo nunc, quod explicabo alias †, easdem reciprocas ipsi curvæ in rectam extensæ applicatas perpetuo spatium circulabile efficere; quod non minus memorabile Theorema est, & sæpe magnum usum habere potest in secundis differentiis æquationum ad primas reducendis. At hæc ὡς ἐν παρόδῳ. Radios, qui curvedines metiuntur, esse in ratione contraria virium tendentium [verius tensionum], quod ambo Viri Celeberrimi me pro principio assumpsisse opinantur, ex æquatione primo inventa $\frac{1}{2}aa = xz$ cognoscitur, & est conclusio potius quam principium, prout diserte inter Corollaria retuli, vide Corollarium 6 constructionis primæ, & Corollarium quartum constructionis tertiæ **. Principium autem quo usus sum, quodque sumit punctum quodlibet superficiei concavæ curvati elateris N.LXVI.

* Supra pag. 583. 584.
† Vide Num. CIII. Art. X.
** Supra pag. 583, & 593.

N. LXVI. teris pro hypomochlio vectis alicujus, ipsum illud est, quod jam olim adhibuit Acutissimus LEIBNITIUS in Schediasmate *De Resistentia solidorum* Mense Julio 1684; adeo ut si dubium fuisset visum Dno. HUGENIO, putanti non tantum superficiem externam extendi, sed & internam contrahi, id objectum oportuisset Dno. LEIBNITIO, non mihi, qui decennio post ab Auctore principii illud mutuatus fui. Fateor autem, quod cum primum olim aspexissem hoc Schediasma, idem mihi scrupulus subortus fuerit; propterea quia quicquid extensionis, etiam compressionis capax esse debet. Et hæc ratio quoque est, cur aliam Problematis constructionem quæsierim, prius quam moneret Vir Illustris, quæ ita habet. [*Fig.* 2.] Sit Linea Tensionum AB, & Linea compressionum AC, quam quidem verosimile est esse tantum continuationem prioris AB, cum vires comprimentes nihil videantur esse aliud, quam vires negative tendentes, hoc est, tendentes in partem contrariam; uti compressio nihil aliud est, quam negativa tensio; adeo ut hinc constet, Lineam Tensionum ultra verticem A flecti debere in partem oppositam, atque ex parte C habere asymptoton parallelam axi AE, cum utique nihil ultra totam sui longitudinem comprimi possit; unde simul omnia Paraboloidea, ac Hyperboloidea, ipsamque Lineam rectam, hinc excludi manifestum fit. Utcunque vero se res habeat, sive curvæ AB, AC ejusdem, sive diversarum curvarum partes existant; intelligantur ductæ in angulis DAH & QAE duæ oppositæ Hyperbolæ Cubicæ BG, βC, intersecantes curvas AB & AC in B & C, ita ut AD in DB^2 & AE in EC^2 æquentur eidem constanti solido; hinc alteri ipsarum applicetur $FG = DB + EC$, ad habendum punctum G; tum fiant aliæ duæ Hyperbolæ, quarum abscissæ in applicatarum quadrata ductæ æquentur majori minorive solido, & inveniatur novum punctum G. Omnia denique sic inventa puncta G connectantur Curva AG, quæ est illa, ad quam Elastica eo modo construenda est, quem Mense Junio 1694, pagina 265 *, præscripsimus; prorsus ac si ipsa AG,

* Supra pag. 580. 581.

AG, non AB, tensionum curva foret; faciendo nimirum quadratum AK = spatio AIR, & rectangulum AN = indefinitæ ejus portioni AFG, ac tum describendo circuli quadrantem LPM secantem rectam NO in P, &c. (a) Puncta enim sic inventa S vera N. LXVI.

(a) Concipiatur laminæ crassities VX [$= c$] divisa in S, in partes duas, extensam unam [SV $= f$], compressam alteram [SX $= g$]; Sic ut S spectari debeat tanquam hypomochlium, circa quod in æquilibrio constitutæ sunt tres potentiæ, nempe pondus in A appensum [quod dicatur $2cc$], resistentia fibrarum tensarum, & resistentia compressarum, quarum loco fingantur una extensa rV in superficie convexa, & una compressa qX in concava superficie laminæ elasticæ. Quoniam vero pars extensa est ad compressam ut SV [f] ad SX [g], fingi debet fibræ rV crassities ad crassitiem fibræ qX in eadem ratione, ita ut f & g repræsentent etiam crassitudines fibrarum rV, qX. Tensioni Vv fibræ rV, & compressioni Xx fibræ q X proportionales sint B D in linea tensionum & EC in linea compressionum; hoc est; quia vis AD [z] fibram, cujus longitudo est b, extendere valet quantitate B D $= t$, eadem vis fibram rV, vel sS [ds] extendet quantitate V v $= tds : b$, & vis AE [u], quæ potis est fibram b comprimere quantitate E C $= \tau$, comprimet fibram qX vel sS [ds] quantitate Xx $= \tau ds : b$. His positis, cum nisus, quibus rV resistit tensioni & qX tensioni, simul agant contra nisum ponderis appensi in A; erit momentum tam fibræ rV, quam fibræ qX [quæ momenta facile ostenduntur æqualia] dimidium momenti ponderis in A. Est autem hujus momentum compositum ex pondere [$2cc$] & vecte Sp [x]. Momentum autem fibræ rV componitur ex ejus crassitie [f], vecte S V [f], & vi tendente AD [z]. Ac pariter momentum fibræ q X componitur ex ejus crassitie [g], vecte SX [g], & vi comprimente AE [u]. Igitur $ccx = ffz = ggu$. Est etiam Vv [$tds : b$] ad Xx [$\tau ds : b$], vel t ad τ, ut SV [f] ad SX [g]; atque ideo BD [t], EC [τ], & BD + EC seu FG [$t + \tau = \theta$] sunt inter se ut f, g, & c. Substituendo igitur t, τ, & θ pro f, g, c, erit $\theta\theta x = ttz = \tau\tau u$. Quare ratio virium, tendentis AD, & comprimentis A E, determinatur per hyperbolam cubicam B G, β C, cujus natura est ut sit $ttz = \tau\tau u$, vel $AD \times DB^2 = AE \times EC^2$. Et AF [x], cum sit $= ttz : \theta\theta$, determinatur applicando ad hyperbolam B G rectam FG $= \theta =$ BD + E C. Præterea similia Triang. VSv, snS dant Vv [$tds : b$] : VS [f vel $ct : \theta$] $=$ sS [ds] : Sn [$dxds : ddy$]. Unde fit $\theta dxds = cbddy$, quæ eadem est æquatio quam N°. LVIII, Nota (c), p. 581; habui-

N. LXVI. vera erunt fulcra vectium, junctaque lineam constituent AST, quæ inter partes convexas & concavas curvati elateris media est; ipsius vero internæ ac externæ superficiei puncta habentur, si per S ducantur curvæ perpendiculares SV & SX, quæ se habeant in ratione rectarum BD & CE, ac simul sumptæ æquent crassitiem laminæ. Pondus in A appendendum duplum esse debet ejus quod requiritur in Q, ad vectem in QTY suffultum hypomochlio in T & affixum portioni laminæ YZ eo usque deprimendum, donec Yπ ad IR fiat sicut YZ ad spatium AIR seu AK. Excessus longitudinis convexæ superficiei αV supra concavam αX ad crassitiem laminæ rursum hic est, sicut arcus LP ad AL. Quinimo generalis hæc est natura *condescriptarum*, ut ipsarum vel aggregatum vel differentia ad arcum circuli reduci possit; quod etiam Fratri observatum video nupero Augusto, ubi hæc fusius exponit. Ex dictis autem constare potest, quod si Curvæ tensionum AB & compressionum AC essent similes & eædem curvæ, ac circa eundem axem DAE similiter dispositæ, sic ut positis AD, AE æqualibus, ipsæ DB & EC etiam æquales essent, puta si BAC foret vel linea recta, vel ex genere Paraboloidum &c. constructio prorsus conveniret cum illa, quam jam Mense Junio 1694 dedi, excepta sola quantitate appendendi ponderis, & quod linea fulcrorum AS, quæ ibi in parte concava curvati Elateris concipitur, hic inter illam & convexam præcise media est, & utrique condescribitur, existente ubique SV = SX.

II. Quid statuendum porro sit de figuris Elaterum a Dno. Huge-

habuimus, nisi quod illic *r*, hic *t* scribatur. Unde sumpta, non AB, sed AG pro curva tensionum, eadem fluit constructio quæ data est N°. LVIII, pag. 580, & ea omnia sequuntur quæ præsenti constructioni subjungit Noster.

Multa sunt quæ me movent ut suspicer non valde absimilem ab ista fuisse Auctoris analysin. Nollem tamen id affirmare, ne ipsi affingere videar solutionem non uno defectu laborantem, qualis est substitutio illa fibræ rV quo omnibus fibris tensis, & fibræ qX pro omnibus compressis. Id cum animadvertisset, Problema iterum considerandum suscepit, N°. CII, quem vide.

HUGENIO, pag. 340, *Fig.* 2. propositis *, jam diserte expli- N.LXVI.
cueram Scholio 5 † constructionis meæ generalis. Sed quia Viros acutissimos de istis etiamnum per conjecturas tantum loqui video, operæ pretium erit totam rem tradere apertius. Si Elater quispiam ABC [*Fig.* 3. *& seqq.*] firmatus in puncto medio, aut nixus aliquo repagulo B, trahatur in extremitatibus A & C a duabus potentiis æqualibus juxta directiones AD, CD, tangentibus extremitatum perpendiculares, curvaturam acquiret conflatam ex partibus ipsius lineæ, quam huc usque contemplati sumus, efficiendo arcum quem appello, vel *diminutum* ut *Fig.* 3; vel *auctum*, ut *Fig.* 4, 5, 6. At si trahatur Elater juxta directiones AC, CA, sibi mutuo oppositas & ad tangentes extremitatum obliquas [quod fit, ubi hæ extremitates aut chorda junguntur, ut in Figuris 3, 4, 5, aut virga rigida, ut in Fig. 6; aut etiam firmis parietibus, ut in Fig. 7, utcunque suffulciuntur] mutabit Elater paululum figuram suam, ut dicto Scholio 5 expresse monui; quod vel hinc colligitur, quia isto casu nullo amplius in B retinaculo opus est ad coercendum Elaterem in statu violentæ tensionis. Interim tamen generalis est solutio pro omnibus, perveniturque ad eandem æquationem supra inventam $aa = 2xz$ seu $aaddy = 2xdxds$, nisi quod in summatione statuendum sit $\int aaddy = aady - abds$, pro 3, & 7 Fig. & $\int aaddy = abds \pm aady$ pro reliquis; designante a ad b rationem Sinus totius ad sinum anguli CAD seu obliquitatis directionis virium comprimentium; quo pacto finalis æquatio [e qua constructiones cæteraque omnia facile deducuntur,] hæc reperitur: $\pm dy = (xx \pm ab)\, dx : \sqrt{(a^4 - (xx \pm ab)^2)}$. (b) Monendum etiam hoc est, quod linteum ejusdem cum Elatere longitudinis inter punctum A & C suspensum & fluido impletum usque in AC,

 ab

* N°. præc. pag. 638.

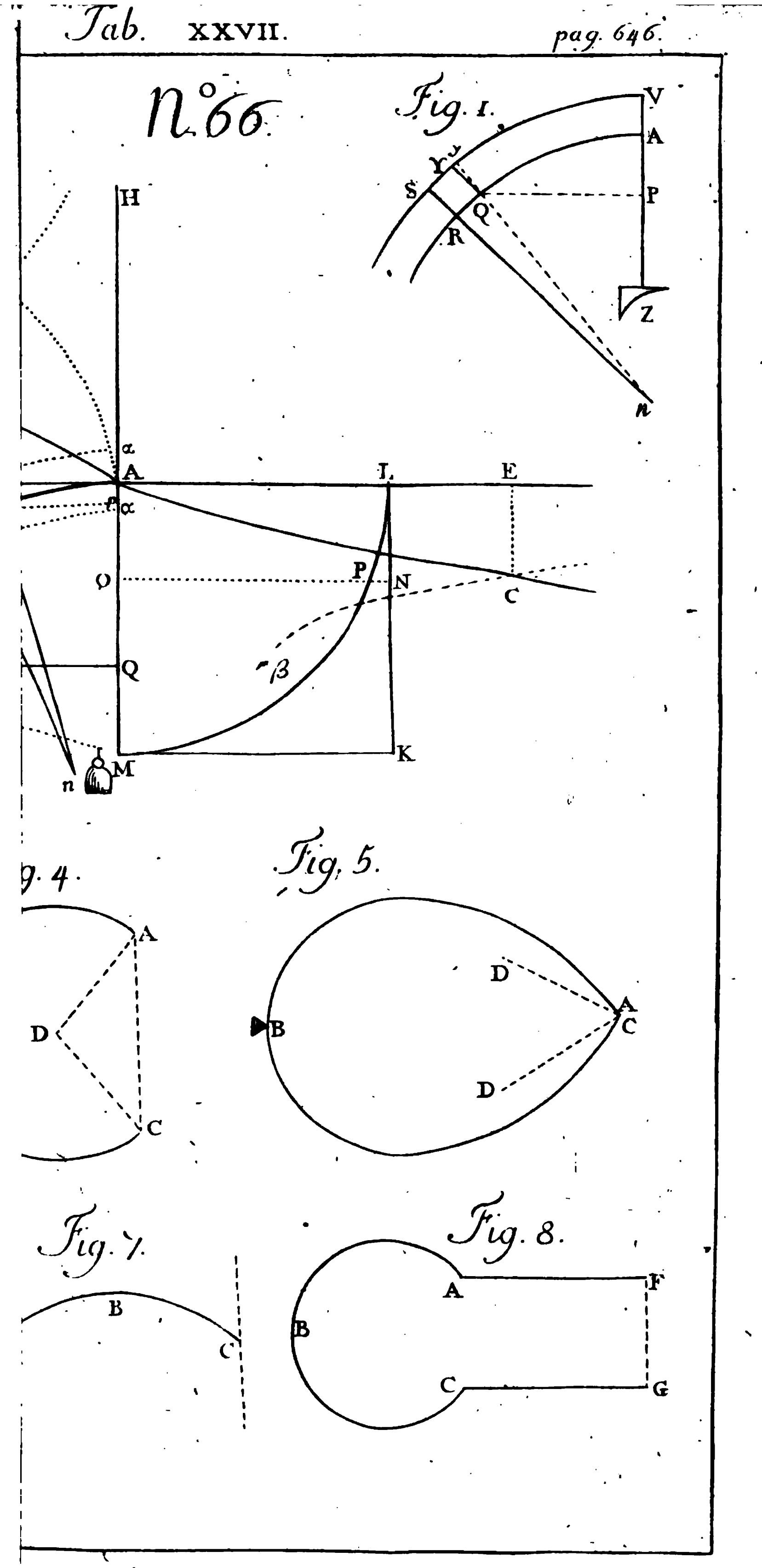
† N°. LVIII. pag. 582. 583.

(b) Hæc enim æquatio ostendit, posito $x = 0$, esse dy ad dx, ut ab ad $\sqrt{(a^4 - aabb)}$ vel ut b ad $\sqrt{(aa - bb)}$. Est autem dy ad dx, posito $x = 0$, hoc est in punctis A & C, ut sinus ang. CAD ad cosinum ejus. Quare hic sinus ad cosinum ut b ad $\sqrt{(aa - bb)}$, atque adeo sinus ang. CAD ad sinum totum ut b ad a.

N.LXVI. ab eoque tensum, eandem & his in casibus figuram induat. Quinimo si Elater A B C cohibeatur chorda FG [ut in Fig. 8,] quæ non ipsi elateri, sed extremitatibus rigidorum brachiorum A F, CG, sit annexa; ac deinde ejus loco concipiatur linteum A B C affixum firmis parietibus A F, C G, atque impletum liquore usque in FG, certum est & tunc eandem utriusque curvaturam fore, quippe quæ portio tantum esse debet resecta ex priorum aliqua. Atque ita plene satisfactum puto utilissimo Problemati, ut ei posthac nihil quicquam desit, quam ut experientiis determinentur in quavis materia veræ tensionum & compressionum leges. Nam constructionum inventio est generalioris considerationis, nec proprie ad solutionem Problematum particularium pertinet.

III. Cæterum num modus construendi transcendentes lineas per meras quantitates algebraicas, assumpta una sola quantitate transcendente, universalis sit, atque etiam in illis curvis locum habeat, quæ nec a circuli quadratura, nec logarithmicæ descriptione dependent, nullibi discussi; tantum dixi, logarithmicam non semper adhiberi posse; quanquam nec prius ita clarum sit, ut omni dubitatione careat: scrupulum enim movet hoc, quod nullæ non rectificabiles curvæ continuo bisecari possunt, ut arcus circulares & logarithmi. Novi equidem quod, data quavis curva algebraica, reperiri possint puncta alicujus transcendentis lineæ per meram Geometriam ordinariam; exempli gratia, per solas bisectiones inscriptarum; sed quæ sit hujus transcendentis natura, sive differentialis æquatio, adeoque data æquatione, qualis assumenda curva algebraica, cujus inscriptas bisecando illa possit construi, repertu arduum & difficile existimo. Nota, quam dedi supra *, qua constet, num curva mechanica ope logarithmicæ construi possit, vera est, sed recte interpretanda; nam si quantitas tdx pluribus constet membris, examinanda sunt non tantum omnia conjunctim, sed & singula seorsim, atque secundum omnes modos possibiles inter se combinata; quoniam hoc casu proprie

* N°. LVIII. pag. 591. 592.


N.° 66.
Fig. 1.
V
A
Y
S
P
Q
R
Z
n
H
α
A
L
E
α
O
P
N
C
Q
β
M
K
n
g. 4
A
D
C
Fig. 5.
D
A
B
C
D
Fig. 7.
B
C
Fig. 8.
A
F
B
C
G

prie non una adest æquatio, sed plures, velut in exemplo quod N. LXVI.
objicitur * $a\,dy = (x + aa : x)\,dx$, quam æquationem [posita $y = s + z$] possum resolvere in has duas: $a\,ds = x\,dx$ & $adz = aadx : x$; quarum hæc cum notam præscriptam habeat, illa absolute integrari possit, constat etiam ex ambabus compositam, ope logarithmicæ construibilem esse (c). Ad series, quas dedi pro summandis quantitatibus $xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ & $aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ per interpolationes *Wallisianas* perveni; easdem tamen etiam obtineri posse per indefinitam potentiam binomii eleganter observavit Celeberrimus D. LEIBNITIUS (d). Iis quæ subjicit hic Vir de numero concurrentium intersectionum in osculis, non habeo quæ reponam; cum non eo dicta putem, ut sententiam meam, cujus veritatem paulatim agnoscere videtur, impugnaret, sed commoda potius explicatióne cum sua conciliaret. Ego profecto mentem mutare prius non possum, quam ad instantiam Parabolæ circulum osculantem in alio præterea puncto intersecantis responsum legero, aut calculum pro quatuor intersectionum concursu militantem in aliquo speciali exemplo videro, similem meo qui trinum tantum concursum supponit (e).

IV. Jam porro ad constructionem accedendum Curvæ accessus & recessus æquabilis, sive Isochronæ, ut Dno. LEIBNITIO appellatur, Paracentricæ, qua mense Junio superioris Anni Problema jam dudum sopitum resuscitavi. Hic illud primo reprehensum video, quod rectificationem curvæ alicujus adhibuerim, quæ & ipsa

Nnnn 3

* Supra N°. LXIV. pag. 627.

(c) Scil. $s = xx : 2a$, & $z =$ log. x. Igitur $y\,[s + z] = xx : 2a +$ log. x.

(d) Vide Num. CI. Prop. 56. 57. 58.

(e) Satis liquet Nostro, cum hæc scriberet, non dum visa fuisse quæ de hac quæstione, jam mense *Aug.* 1695 *Actorum*, candide fassus erat LEIBNITIUS. „Nunc re accuratius considerata, ea quæ Celeb. *Jac.* BERNOULLIUS de numero radicum osculi monuerat, probo, quibus quo minus assentirer antea, non alia causa fuit, quam quod diversæ occupationes cogitationesque effecerant, ut tardius accederem ad rem de integro satis considerandam.

N.LXVI. ipsa ad sui constructionem spatii quadraturam requirit; cum Problema immediate per quadraturam vel etiam rectificationem curvæ ordinariæ confici potuisset. Quod recte quidem; at non dissimulanda fuisset ratio hujus meæ opinionis, quam ibidem pag. 277, & postmodum pag. 336,* expresse addidi. Nempe existimo curvas, quas natura ipsa simplici & expedito motu producere potest, quorumcunque sint generum & graduum, in constructionibus præferendas esse aliis, etiam algebraicis, quas arte vel nullo modo vel difficulter delineamus; cum illud semper in practica effectione operis sit censendum optimum, quod cum summa exactitudine summam quoque facilitatem conjunctam habet. Sed etiamsi quippiam hic peccatum esset, illud tamen sequenti mense Septembri † abunde reparatum a me puto, ubi non tantum constructionem hujus Problematis omnium facillimam per rectificationem curvæ algebraicæ, quam *Lemniscatam* voco, exhibui, sed & generaliter docui, quænam curvæ algebraicæ, in tentandis constructionibus mechanicarum, lineam circularem & parabolicam proxime excipiant; ad quod perquirendum memini Fratrem paulo ante per litteras a D. LEIBNITIO instigatum fuisse. Quod vero constructiones per quadraturas concernit, quas cæteroquin cum Dno. HUGENIO non magni facere soleo, ut hinc inde sum professus, non rejiciendas puto; tum, cum id tantum intenditur, ut in æquatione construenda literæ indeterminatæ cum suis differentialibus separentur a se invicem, quod solum intendebant Illustris cum Fratre HOSPITALIUS, cum primum præsens Problema mihi proposuissent; nec enim reduci Problema ad quadraturas potest, nisi literæ jam separatæ sint, unoque præstito, alterum quoque præstitum habetur. Multo minus autem quadraturæ debuerunt negligi in materia Elasticarum, cum in hypothesi indeterminata Problema aliter confici non potuisset. Sed non demonstratum video, semper alias constructiones haberi posse: BARROVII sane tempore nullæ aliæ fuere notæ, nisi quæ fierent per quadraturas; nec illas prius fastidire ceperunt Geo-

* Supra pag. 603, & 609.

† N°. LX. pag. 608.

Geometræ, quam Celeberrimus D. LEIBNITIUS, elegantissimam Catenariæ constructionem per logarithmicam dedisset. N. LXVI.

Dixeram, unam tantum dari Isochronam respectu ejusdem centri ejusdemque altitudinis, quod quanquam eo sensu quo dictum fuit excusari forte possit, malo tamen melioribus monitis locum dare, fateorque magis congrue dici dari infinitas. Errorem autem sola peperit festinatio; nec enim ignorabam, in summatione differentialium summas absolutas augeri minuive posse constante quadam quantitate b; cum id alias observatum esse, ex generali solutione Elasticarum supra allata & jam mense Junio 1694, pag. 267, Scholio 5 †, prælibata constet: & meminisse potest Lector, inventam mihi fuisse solutionem, cum prolixum satis Schediasma pene finivissem, atque jam scribendo lassatus fuissem; ubi de summa rei certus ad singulas Problematis circumstantias cautius attendere non sustinui. Agnosco itaque, cum Acutissimo D. LEIBNITIO, quod possit assignari Isochrona, quæ per datum quodvis punctum transeat: sed nescio, cur excipiat puncta rectæ horizontalis per ipsum centrum transeuntis, cum similiter nullum eorum sit, per quod non aliqua satisfaciens duci possit. Sit enim ubivis in illa datum punctum C [*Fig.* 9] invenientur puncta Isochronæ convenienter constructioni meæ Mensis Septembris hoc pacto. Sumpto indefinite puncto Q in curva lemniscata AQB, subtendatur ei ex nodo recta AQ, tertiaque proportionalis ad rectas AB & AQ, quæ sit $\zeta\iota$, applicetur semicirculo & jungatur $A\iota$, in qua si abscindatur $A\alpha$ tertia proportionalis ad AB & lemniscatæ portionem AQ, auctam minutamve constante quadam longitudine b, quæ media sit proportionalis inter AB & AC, erit punctum α in quadam Isochrona, quam apparet transituram per datum C punctum (¹). Potest vero

† Pag. 582. 583.

(¹) Nam, per constr. est $A\alpha = (ALQ \pm \sqrt{AC.\,AB})^2 : AB$, vel $\sqrt{A\alpha.\,AB} = ALQ \pm \sqrt{AC.\,AB}$ aut $\sqrt{A\alpha.\,AB} \mp \sqrt{AC.\,AB} = ALQ$. Sed $A\alpha$, N°. LIX, dicebatur t, AB, a, AC sit c, $\zeta\iota = AQ^2 : AB = uu:a = z$, & est ALQ [N°. LX, Nota b, pag. 610] $= \int(aadu : \sqrt{(a^4 - u^4)}) = \int(\tfrac{1}{2}adz\sqrt{a} : \sqrt{(aaz - z^3)})$. Igi-

N. LXVI. vero fieri, ut quæ per diversa horizontis puncta transeunt, non semper sint totidem diversæ lineæ, sed portiones tantum unius ejusdemque. Sciendum enim, terminos quos ipsi assignavi pag. 279, §. 3 *, non esse nisi secundum quid tales; unamque & eandem Isochronam ab utraque horizontis parte in infinitum produci posse, omnes vero in centro A coire, ac inde sub horizonte utrinque per infinitos plexus seu mæandros se diffundere, quales *Fig.* 10, etsi ob spatii angustiam non debita proportione delineati, conspiciuntur; adeo ut grave per curvam latum perpetuas circa A librationes, sed usque & usque ampliores, peragat & post singulas oscillationes horizontalem repetat eamque radat. Cujus rei argumentum est, quod lemniscatæ seu curvæ in se redeuntis portio AQ, quæ longitudinem rectæ $A\alpha$ in *Fig.* 9, determinare debet, intelligi potest non de ipsa tantum solitarie accepta, sed & cum assumpta semel pluriesve integra perimetro lemniscatæ; quo fit, ut in eadem recta $A\alpha$ semper plura plurave puncta, qualia α, reperiri possint. Discimus etiam hinc, Isochronam geometrice non construibilem esse; cum Lemniscata nequeat esse rectificabilis. Statuo enim etiamnum, [ne quid eorum intactum relinquamus, quæ antehac inter nos acta sunt; Vide Mensem Januarium anni 1691, (e), pag. 21,] nullam curvam geometricam

Igitur est $\sqrt{at} \mp \sqrt{ac} = \frac{1}{2}\int(adz\sqrt{a}: \sqrt{(aaz - z^3)})$ aut, $\sqrt{t} \mp \sqrt{c} = \frac{1}{2}\int(adz: \sqrt{(aaz - z^3)})$, & differentiando $dt: \sqrt{t} = adz: \sqrt{(aaz - z^3)}$, quæ est æquatio ad Isochronam Paracentricam N°. LIX., Nota ç, pag. 602. Quod si fiat ζ [z] = 0, erit AQ [u] & ALQ = 0, Quare $\sqrt{A\alpha.AB} \mp \sqrt{AC.AB} = 0$, vel $A\alpha = AC$. Transit igitur Isochrona per datum punctum C.

* Pag. 605. Vide ibi Notam (g).

(e) Vide Num. XLI. pag. 490. Objectio Celeb. LEIBNITII ista fuit: „ Hæreo circa id quod a Dno. BERNOULLIO dictum est, nullius curvæ „ geometricæ in se redeuntis rectificationem generalem esse possibilem. Scio alium Virum Clarissimum „ [is est NEWTONUS, *Prin. Math. Phil. Nat.* Lib. I. Sect. VI Lemm. 28.] „ simili argumento „ probare instituisse nullius areæ curvæ geometricæ in se redeuntis quadraturam indefinitam esse possibilem: visum tamen est Dn. HUGENIO non minus quam mihi, rem „ non esse confectam. Et ni fallor, „ dantur instantiæ, quibus tamen hujus-

cam in se redeuntem rectificationem admittere; quod quia memini me potuisse demonstrare, valde scire cupio quales sint instantiæ, quas in contrarium adduci posse scripsit D. LEIBNITIUS Mense Septemb. 1691, pag. 437. Sed & hoc ex dictis consequitur, quod Isochronæ, quæ supra horizontalem assurgunt, non possunt circa centrum A in spiras convolvi, ut conjecit Acutissimus D. HUGENIUS; cum secus partes inferiores cum Isochronis nostræ constructionis communes habere, adeoque horizontalem per A extensam simul & secare & tangere deberent, quod impossibile. Memini tamen me reperisse, quod ejusmodi spiræ circa centrum A prodirent, si ipsum simul poneretur centrum gravium, & quod eo casu curvæ constructio ope duarum Spiralium *Archimedeæ* & logarithmicæ facile peragi posset (h). N. LXVI.

V. Sed

„ hujusmodi argumenta applicari possunt.

Vide autem quæ regesserit LEIBNITIUS, N°. LXXI, & Auctoris nostri responsionem N°. LXXII. Art. 2.

(h) Sit BMmC [*Fig. A*] Spiralis Isochrona, sic dicta quod grave illam describens, velocitate initiali in B tali, qualem acquireret labendo ex altitudine AB [a], æquabiliter accedit ad centrum C gravium. Sitque $BC = b$, $BP = x$, $Pp = MN = dx$, arcus $BR = u$, & $Rr = du$; atque erit $Mm = CM \times Rr : CR = (b - x) du : b$, & $Mm = \sqrt{(MN^2 + Nm^2)} = \sqrt{(dx^2 + (b-x) du^2 : b^2)}$ Hoc spatium percursum si dividatur per velocitatem, quæ, juxta doctrinam GALILÆI, ponitur proportionalis radici quadratæ altitudinis AP, [$a + x$] ex qua grave in M descendit, habebitur tempus quo percurritur Mm, quod, quia BMm ponitur Spiralis Isochrona, statui debet proportionalis accessui MN [dx] corporis ad centrum. Fiat igitur $\sqrt{(dx^2 + (b - x) du^2 : b^2)} : \sqrt{(a+x)} = dx : \sqrt{a}$, & erit $du = bdx\sqrt{x} : (b - x)\sqrt{a}$, vel [ponendo $x = zz : b$] $du = \sqrt{\frac{b}{a}} \times (2zzdz : (bb - zz)) = \sqrt{\frac{b}{a}} \times (-2dz + 2bbdz : (bb - zz))$; cujus integralis [omissa constantis additione, quæ nihil nisi situm curvæ mutaret] est $u = \sqrt{\frac{b}{a}} \times (-2z + \text{Log.} \frac{b+z}{b-z})$. Igitur arcus BR [$u$] est ad differentiam duorum arcuum, quorum alter est $= \text{Log.} \frac{b+z}{b-z}$, alter $= 2z$, ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{a}$. Id quod sic potest construi. Assumpta abscissa quacunque $BP = x$, descripta sit, in circulo b f g, cujus radius $cb = CB = b$

N. LXVI. V. Sed ut ad reliqua meletematum nostrorum capita transeamus, atque aliquid etiam adjiciamus de *Curva Velaria*, quam eandem esse statui cum catenaria, sciendum, me nunquam mutasse sententiam, sed tantum distinxisse casus. Dixeram, Mense Maio

$= b$, Spiralis *Archimedea* bel, fiatque ut peripheria bgh [c], vel quæ ipsi æqualis est subtangens Spiralis in b, ad diametrum [$2b$], ita media proportionalis inter CB & BP [$\sqrt{bx} = z$] ad bd $= 2bz : c$, & centro c descriptus circulus d e secet Spiralem in e, ac radius cef per e ductus abscindet arcum bf $= 2z$. Est enim, ex demonstratis ab ARCHIMEDE, bc [b] : bgh [c] $=$ bd [$2bz : c$] : bf $= 2z$. Descripta pariter intelligatur Spiralis $\iota\beta\zeta\kappa$ logarithmica, semirectangula, hoc est quam radii sub angulo 45° secent: fitque radius $\kappa\beta = CB$ [b], & capiantur $\beta\gamma$ & $\beta\delta$ æquales ipsi $z = \sqrt{bx}$, mediæ proportionali inter CB & BP, ut fit $\kappa\gamma = b + z$, & $\kappa\delta = b - z$. Tum centro κ describantur circuli $\gamma\iota$, $\delta\zeta$ Spiralem secantes in ι & ζ, & radii $\kappa\iota\psi$, $\kappa\zeta\theta$, in peripheria $\theta\beta\psi$, centro κ, radio $\kappa\beta$ descripta intercipient arcum $\theta\beta\psi = $ Log. $(\kappa\iota : \kappa\zeta) = $ Log. $\frac{b+z}{b-z}$ [Vid. N°. XLIX. Nota l, pag. 498. Prop. III. Cor. 3.]. Sumatur itaque arcus b f g $= \theta\beta\psi = $ Log. $\frac{b+z}{b-z}$, & quoniam est b f $= 2z$, erit f g $=$ Log. $\frac{b+z}{b-z} - 2z$. Superest igitur tantum ut inveniatur arcus g o, qui sit ad fg, ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{a}$. Id autem nullo negotio perficitur sumendo lp quæ sit ad l i [differentiam radiorum ce, cl quibus arcus fg intercipitur] ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{a}$. Arcus enim pq, centro c descriptus, si secet Spiralem *Archimedeam* in q, radius cqo, abscindet arcum go, qui erit ad fg, ut ut l p ad l i, ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{a}$. Atque ideo, si capiatur, in peripheria BRr, arcus BR $=$ go, ducaturque radius CR, quem secet in M circulus PM, centro C, radio CP descriptus; erit punctum M ad Spiralem Isochronam quæsitam.

Hanc autem infinitos gyros circa centrum C absolvere, ex ejus æquatione $u = \sqrt{\frac{a}{b}}$ (Log. $\frac{b+z}{b-z} - 2z$) liquet. Ubi enim BP [x] evadit æqualis B C [b], tunc z [$\sqrt{bx}$] fit etiam $= b$, atque ($b + z$) : ($b - z$) evadit [$= 2b : 0$] infinita. Hujus itaque Logarithmus $\theta\beta\psi$, vel bfg infinitus. Est autem bf [$= 2z = 2b$] finitus. Igitur arcus f g infinitus; & BR [$fg \times \sqrt{\frac{b}{a}}$] pariter infinitus. Infinities igitur peripheriam BRr describit radius CR, priusquam punctum M ad centrum C pervenerit, hoc est Spiralis Isochrona infinitos gyros circa centrum C describit.

Maio 1692, pag. 203, articulo 1 *, Velum arcuari in circulum, N.LXVI.
si quando ventum sic excipiat, ut hic intra sinum ejus stagnare, totamque suam pressionem in velum exerere cogatur; velut sane manifestum fit in bullis saponariis, quæ flatu oris in perfectas sphæras rotundantur. At hæc pro velis marinis hypothesis tantum fuit, quæ, si veritati minus consona, propterea primarium calculi fundamentum non evertit. Et revera, aut nullus aer intra veli sinum stagnat, sed omnis ad latera veli evadit; aut si quis stagnat, is non nisi partem pressionis, quam ab aere pone insequente partemque motus sui retinente accipit, in velum transfert, illudque proin aliter non afficit, quam faceret, si juxta casum §. 10, ipsemet oblique in velum irrueret, ac reliquum motus sui libere continuare posset. Unde re attentius pensiculata non tantum non sententiam muto, sed jam nullus dubito, velum inflatum omni in casu Funiculariæ curvaturam assumere. Nec moror discrimen, quod fortasse intercederet, si velum ex numero finito rectarum compositum intelligeretur †; cum nihil sit frequentius in natura, quam ut in casu infinite parvorum quantitatum differentia evanescat; nec magis hoc mirandum, quam miramur quod, evanescente base trianguli, evanescit crurum differentia. Approbavit autem in fundamentalibus solutionem ipse Frater, nec approbavit tantum, sed & suam fecit, brevisque inventi historiola hæc est. Cum ineunte Anno 1691 Fratri *Genevam* misissem proportionem hanc solvendam; $ddx : dx = dy^3 : \int dy^3$, qua Velariam comprehendi indicabam, ille ex Patre *Gastone* PARDIES retulit, Velum considerari posse instar funiculi pondere carentis, cui infinitæ lineæ æquidistantes & æque graves insistant; adeoque in Prisma Parabolicum curvari, juxta id quod in *Actis* habetur Mensis Junii 1691, pag. 288 *. Sed monitus diversam esse rationem fluidi impellentis, ac solidi ponderis juxta eandem directionem trahentis vel prementis, mox sententiam mutavit, intuensque velum ceu linteum liquore aliquo

* N°. XLVIII. pag. 484.
† N°. præc. pag. 638.
* Supra N°. XLII. pag. 449.

N.LXVI. impletum, indagare cœpit quænam ejus curvatura foret, si pressio fluidi linteo communicaretur secundum directionem horizontalem sive verticalem; harum enim hypothesium alterutram veram esse persuasum habebat: & cum ne hoc quidem probarem, existimabat saltem lintei hujus, si non veli, curvaturam se dedisse; donec ego, paulo post apertius me explicans, hanc fluidorum naturam esse perhiberem, ut pressionem communicent, nec secundum horizontalem, nec verticalem, sed secundum lineam corpori impulso in quovis impulsus puncto perpendicularem; hac tamen cum differentia, quod ubi fluidum motum suum post impulsum potest prosequi, partem tantum virium in premendo corpore impendat; si vero stagnat alicubi, nec habet quo evadat, omnes suas vires in illud transfundat: hinc velum concipiendum instar funis [*Fig.* 11.] ab infinitis potentiis æqualibus, aut inæqualibus, tracti vel impulsi, quæ cum sint æquales, manifestum esse formari circulum, quemadmodum etiam per calculum inveneram, eoque in hypotheseos assumptæ veritate prorsus confirmabar. Interea dum ille, sub finem Anni 1691, *Parisios* se confert, transmuto proportionem hanc $ddx : dx = dy^3 : \int dy^3$, in æqualitatem $adsddx = dy^3$ (¹), indeque ope methodi cujusdam †, quam pro secundis differentiis ad primas reducendis paulo ante excogitaveram, Funiculariam elicio; mox etiam æquationem tecta solutione Fratri *Lutetiam* mitto, visurus num & sua huc pertingeret. Is vero rem sibi successisse videns, atque jam factus cupidior sciendi quomodo ad hanc æquationem pervenerim; denuo ad Veli contemplationem redit; nec cessat, donec animadverteret, artificium in hoc uno consistere ut singulæ impulsuum directiones in duas alias, horizontalem puta & verticalem resolvantur. Nec mora, protinus inventum prælo committit, ac Mense *Aprili* 1692, *Ephemeridibus Gallicis* curat inseri,

(¹) Etenim, cum sit ddx ad integralem suam dx, ut dy^3 ad suam $\int dy^3$, erit ddx proportionalis ipsi dy^3, id quod, servata homogeneitate, dabit æquationem $dy^3 = adsddx$. Ponuntur enim a & ds constantes.

† N°. CIII. Art. X.

inſeri, & quia ſe ſolum Problema abſolviſſe putabat, me de plenaria reſolutione deſperaſſe ſcribit; neſcius quod illam jam præcedente Martio una cum Regulis uſum inventi concernentibus *Lipſiam* miſiſſem. Corrigere etiam poſtea voluit curvaturam ſuam lintei liquore adimpleti, novamque D. Marchioni HOSPITALIO ſolutionem exhibuit, ſed eam etiamnum erroneam & a mea diverſam. Hanc enim eandem eſſe cum Elaſtica, non minus atque Velariam cum Funicularia, conſtanter ſentio; & quod certum veritatis indicium eſſe poteſt, identitatem hanc, quam initio ex ſpeciali natura curvarum prolixiore analyſi collegi, nunc abſque omni fere calculo duabus lineis oſtendo *. Factum interim fuit, ut uterque principium preſſionis fluidorum ad alia quoque utiliter adhiberemus, ille ad motum muſculorum explicandum, ego ad eximendum mihi ſcrupulum, quem olim habui circa cauſam perpendicularis deſcenſus gravium, Menſe Februario 1686 †. Videbam enim ex eodem fonte rationem peti poſſe, cur materia terreni vorticis juxta directiones æquatori parallelas excuſſa, in circumferentia vorticis, vi ſui elateris, per lineas circumferentiæ perpendiculares repercuti, ac propterea gravia verſus centrum potius, quam per eaſdem directiones, repellere debeat. Quanquam autem in hoc negotio nonnulla fuerunt, quæ initio ut vera aſſumpſimus, demonſtrare vero non potuimus; velut illud primarium, quod legem preſſionis fluidorum ſtagnantium concernit, eorum tamen veritatem omnem nunc a priori cognoſco. Quorſum etiam pertinet aliud, quod me monere cogit veritatis amor. Suppoſueram, initio, axem æquilibrii tranſire per concurſum rectarum extremitates veli linteive tangentium, & eſſe curvæ perpendicularem; ſed cum poſtea certis indiciis cognoſcerem, ambas hujus hypotheſeos partes non poſſe ſimul ſtare; priore repudiata, alteri ceu, ut videbatur, veriſimiliori inhæſi. Quis enim exiſtimaſſet ex infinitis directionibus, quæ omnes curvæ alicui perpendiculares ſunt, ſolum axem æquilibrii, ſeu lineam N. LXVI.

* Vide N°. CIII. Art. XI. † N°. XIX. pag. 239.

N.LXVI. neam directionis mediæ talem non esse? At nunc cum evidentia successit conjecturis, omnino contrarium video, cogorque retractare omnes illas Regulas, Mense Maio 1692, pag. 204 *, & Mense Junio 1694, pag. 275 †, quæ ex priore opinione fluxerunt, dum reliquarum, directionem hanc atque impulsus vim concernentium, veritas inconcussa manet. Quibus, ut ἀβλεψίαν meam utcunque reparem, addo nunc novum aliquod Curvæ genus, determinandæ generaliter huic directioni inserviens, quam ab usu *Lineam mediarum directionum* appello, atque sequenti modo construo, *Fig.* 12. In data quavis curva AB, quam concipio formatam esse a pressionibus, utcunque inæqualibus, fluidi alicujus, seu præterlabentis, seu stagnantis, sunto rectæ AI, BD, ei perpendiculares, tangentes AC, BC, ponaturque AF $= x$, FB $= y$, & AB $= s$; quo facto, si ex perpendiculari BD abscindatur BD $= (x ds^2 + x dy ds) : dx^2$ [quod semper & in omni curva duobus circini ductibus absolvo, speciatim autem in Velaria, seu Funicularia, cujus centrum G, faciendo tantum BD $=$ GF; in Elastica, sumendo BD $= AI^2 : (AI + IF)$] dico fore punctum D ad curvam desideratam ED, quæ talis est, ut ducta quavis BD perpendiculari ad AH & abscindente ex illa portionem AB, secante vero curvam ED in D, juncta CD media sit directio portionis AB, sive axis æquilibrii circa quem hinc inde portio AB impulsiones æqualium momentorum sustinet (*). Cæterum observavit olim Acutissimus D. Leibnitius [vide

* N°. XLVIII. pag. 486.

† N°. LVIII. pag. 598.

(*) Curva AbB [*Fig.* B] formata intelligitur innumerabilium potentiarum pressionibus ad curvam perpendicularibus. Ducantur tangentes AC, BC, bc, & sint potentiarum omnium in arcus Ab, AbB agentium mediæ directiones cD, CD. *Lineam mediarum directionum* ED vocat Noster eam quam perpetuo tangunt mediæ directiones cD, CD; vel quæ formatur per concursum D mediarum directionum infinite vicinarum cD, CD.

Ostendo primum rectam BD, normalem ad curvam AB in puncto B, occurrere mediæ directioni CD in puncto D lineæ mediarum directionum ED. Occurrat enim in puncto d. Et quia cD, CD bisecant [N°. XLVIII.

[vide *Ephemerides Gallicas* Mensis Septembris 1693] quod recta tendentiæ, seu directionis mediæ, mobilis a pluribus potentiis impulsi transeat per commune centrum gravitatis omnium punctorum tendentiæ particularium; quod verum etiam cum potentiæ sunt infinitæ: at tum cavere debet Lector, ne centrum gravitatis loci punctorum, seu lineæ per infinita puncta transeuntis, cum centro ipsorum punctorum confundat; quippe quod, ob interval- N.LXVI.

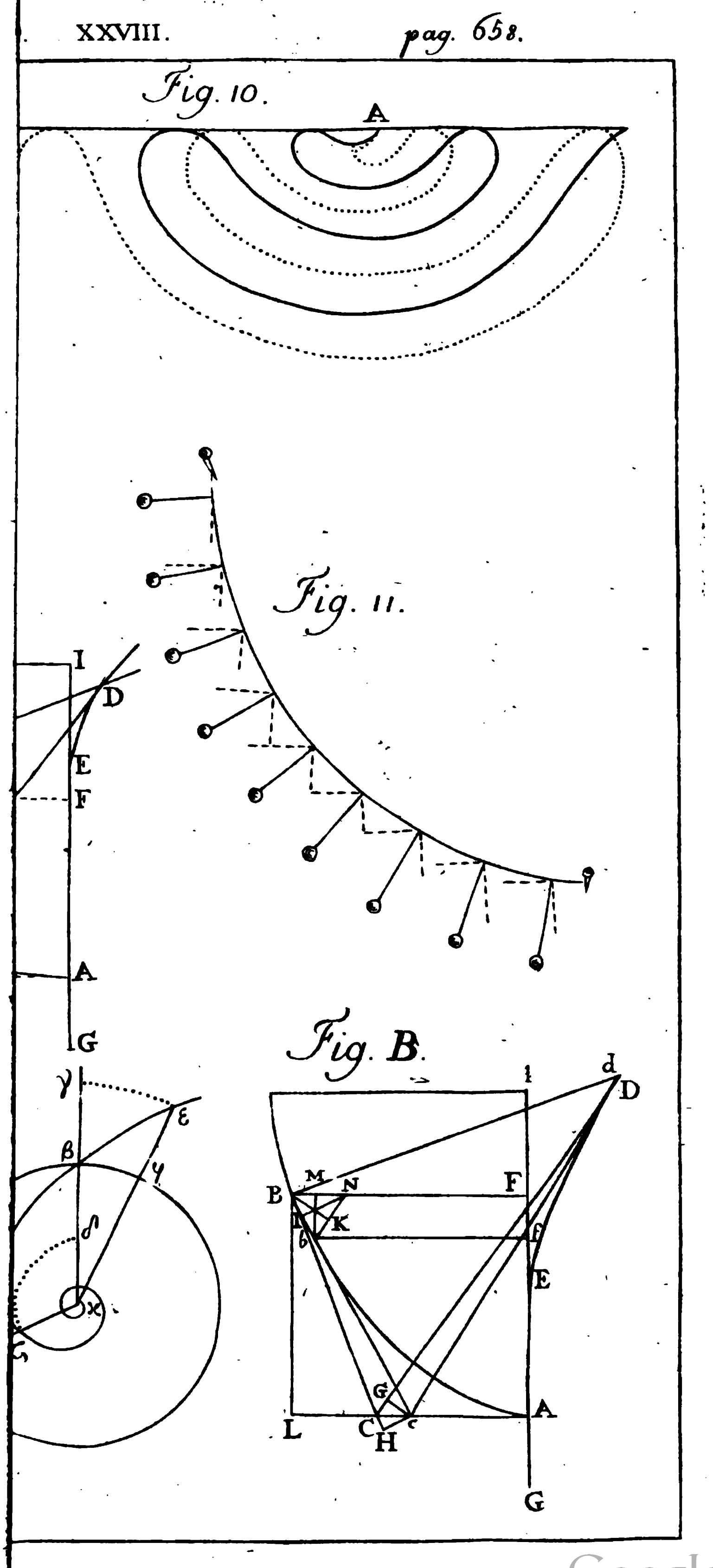
XLVIII. Nota a, pag. 484] angulos Acb, ACB, erit cBC = Acb — ACB = 2AcD — 2ACD = 2cDC. Ergo, si centris B & D describantur per c arcus cH, cG, angulorum cBC, cDC mensuræ, erit Bc : ½cH = Dc : cG, vel alternando Bc : Dc = ½cH : cG. Ducatur bN parallela ipsi cD, & demittatur ex N normalis NI in Bb, eruntque similia Tr. cCH, NBI, nec non bNI, CDB, & cCG, ob æquales angulos cCG, BCD; atque ideo erit cH : cC = NI : NB & cC : cG = bN : NI, & ex æquo cH : cG = bN : NB, & ½cH : cG [= Bc : Dc] = ½bN : BN vel Bb. Est enim Tr. BbN isosceles, cum sit ang. BNb = Nbf = DCA = DCB = NbB. Itaque BK demissa normalis ex vertice B in basin bN ipsam bisecat. Ergo Bc : Dc, quod erat = ½bN : Bb, est = bK : bB, = bI : bN [ob sim. Tr. bBK, bNI] = Bc : cd [ob sim. Tr. bIN, cBd]. Igitur cum sit Bc : Dc = Bc : cd, est cd = cD, hoc est, coincidunt puncta D & d, concursus D mediarum directionum cD, CD quamproximarum, & earundem intersectio d, cum Bd perpendiculari ad curvam. Differt igitur linea mediarum directionum ab evoluta, adeoque media directio non est ad curvam normalis.

Deinde ostendo Bd, vel BD, esse $= (xds^2 + xdyds) : dx^2$, aut simplicius $xds : (ds - dy)$ [æquales enim esse has fractiones liquet, si in prioris denominatore scribas $ds^2 - dy^2$ pro dx^2, & utrumque terminum dividas per $ds + dy$]. Etenim demittendo bM normalem in BN ex b, æqualia fiunt, ob æquales hypothenusas Bb, BN, & communem ang. bBN, Triangula BbM, BIN, adeoque IN = bM $= dx$, & BI = BM $= dy$, atque bI = Bb — BI $= ds - dy$. Ergo sim. Triang. BbM & CBL, nec non bNI & CDB, dant bM vel IN : bB = BL vel AF : BC, & bI : IN = BC : BD; aut, ex æquo, bI $[ds - dy]$: bB $[ds]$ = AF $[x]$: BD $[xds : (ds - dy)]$.

Est autem in Velaria [N°. XLVIII. Nota (e), pag. 485] $ds : dy$ = FG : GA. Igitur BD $= xds : (ds - dy)$ = AF × FG : AF = FG. In Elastica vero [N°. LVIII. Art. 3] est $ds : dy = AI^2 : IF^2$. Igitur BD = AF × $AI^2 : (AI^2 - IF^2) = (AI - IF) \times AI^2 : (AI^2 - IF^2) = AI^2 : (AI + IF)$.

N. LXVI. tervallula punctorum plerumque inæqualia, ab altero est diversum. Quanquam autem peregregium hoc sit Theorema, nullius in re præsente usus esse poterit; cum supponat omnes directiones particulares ex uno puncto divergere; quas hic ex integra linea, Evoluta scilicet, emanare concipimus *. Alia via est, qua idem certo & expedite licet consequi. Jam enim plane assevero me omnia demonstrare posse; facileque fidem impetrabo apud Lectorem, si perpenderit mihi & satis esse perspicaciæ, ut sponte agnoscam cum impegero, & satis quoque ingenuitatis, ut fatear. Sed non omnia hic vacat agere, mallemque hæc cum affinibus aliis, quæ resistentias fluidorum, velocitates corporum motorum in fluidis, &c. concernunt, integro Tractatui reservare, si modo valetudo firmatior, & sufficiens huic elaborando otium concederetur, nec meæ me conditionis necessitas ignobilioribus plerumque studiis adstringeret. Ut tamen certius appareat, me non vana promittere in hac materia; volo hic in veritatis patrocinium, & commodum rei nauticæ, etiam symbolam meam conferre ad discussionem quæstionis illius utilissimæ, de velocitatibus Navium eodem vento in diversas partes velificantium, quæ, superioribus annis, inter D. RENAVIUM Auctorem Theoriæ *de la Manœuvre des Vaisseaux* & D. HUGENIUM agitata fuit; quorum ille velocitates has voluit esse ut sinus angulorum veli navisque, hic ut sinuum radices. Quanquam enim D. HUGENIUS veritati multo propius accedat, uterque tamen, si præcise loquendum sit, navi obliquius latæ velocitatem justo minorem tribuit; quod palpabile fit consideranti, naves in diversas plagas tendentes non iisdem ab eodem vento viribus impelli, [ut tacite supponit HUGENIUS;] cujus rei ratio est, quia navis in tantum se subducit pone insequentis venti impulsui, in quantum propria celeritate, juxta directionem venti promovetur, adeo ut ventus non totali sua celeritate, sed parte tantum celeritatis in navem agat, eo minore, quo rectior est navis cursus; hoc est, ut posita

* Vide Nos. LXXI, & LXXII. Art. 2.


Fig. 10.
A
Fig. 11.
I
D
E
F
A
G
Fig. B.
d
D
M
N
F
B
K
E
G
L
C
H
A
G
γ
ε
β
ψ
δ
x
ζ

posita celeritate venti a, navis rectioris y, obliquioris z, & ratione sinuum angulorum veli navisque $a:b$; ventus ad priorem navem appellat velocitate $a-y$, ad alteram velocitate $a-bz:a$; unde cum vires, quibus naves impelluntur, componantur ex simplici ratione sinuum a & b, ac duplicata velocitatum $a-y$ & $a-bz:a$, atque insuper [in casu maximæ velocitatis navium] resistentiis aquæ, quæ duplicatis navium celeritatibus proportionales sunt, æquentur, erit $yy:zz=a(a-y)^2:b(a-bz:a)^2$; hoc est, quia posito pondere aquæ ad pondus aeris ut p ad a, & superficie proræ ad subtensam veli ut a ad m, reperi olim maximam velocitatem navis $y=a\sqrt{m}:(\sqrt{p}+\sqrt{m})$ *, fiet inde $z=aa\sqrt{bm}:(a\sqrt{ap}+b\sqrt{bm})$; adeo ut emergat $z:y=\sqrt{b}+\sqrt{(bm:p)}:\sqrt{a}+\frac{b}{a}\sqrt{(bm:p)}$, quæ ratio major est ratione *Hugeniana* $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{a}$, & differentiam parit trigesimæ circiter partis totius velocitatis, quod in longiori itinere errorem nimis enormem reddit. Optassem vero, ut aliquando mihi licuisset propius cum desideratissimo D. HUGENIO, at nunc eheu vivis erepto! super his conferre; qui, tum ob loci commoditatem, tum ob profundam rerum cognitionem atque in mechanismis excogitandis solertiam, multa inventis nostris perficiendis, ac in usum rei maritimæ traducendis communicare potuisset. N.LXVI.

VI. Restarent nunc nonnulla Fratris schediasmata examinanda, præsertim illud Mense Octobri 1694, quod constructionem Isochronæ spectat, meque propius tangit. Verum de re ipsa non multa dicenda habeo, nisi quod nobis hic ova, quod aiunt, post prandium apponit, nihilque novi docet, quod non simplicius quodammodo jam præcedenti Septembri a me præstitum* sit. Dixeram, illum multum fuisse in Problemate; quandiu autem ejus solutioni præcise incubuerit, non definio: hoc tantum novi, quod D. Marchio HOSPITALIUS, eo tempore quo Fratrem

 secum

* Vide N°. LVI, Notam u, pag. 562. Aut N°. CIII, Art. XVIII.

VI.

posita [illegible]
tione [illegible]
navem [illegible]
unde cum [illegible]
simplici ratione [illegible]
& $a-bz:a$, [illegible]
vium] [illegible]
portionales [illegible]
$-bz:a)^{2}$; [illegible]
tis ut p ad a, & [illegible]
reperi olim [illegible]
$\sqrt{m}$) *, fiet [illegible]

emergat $z:y$ [illegible]

tio major est [illegible]
rit trigesimae [illegible]
itinere errorem [illegible]
quando mihi [illegible]
NIO, at [illegible]
ob loci [illegible]
nem atque [illegible]
nostris [illegible]
municare [illegible]

VI. [illegible]
da, [illegible]
Isoch[illegible]
[illegible]

[illegible] are-
[illegible] a dy
[illegible] $S:\sqrt{(a^{4}}$
[illegible] $\int \tau dx] = aat:$
[illegible] rentiando $dS =$
[illegible] $a+tt)\sqrt{(aa+tt)}$,
$= a^{4}dt:(aa+tt)$
[illegible] $tt) dx$.

N. LXVI. secum habebat, super æquatione $(xdx+ydy)\sqrt{y}=(xdy-ydx)\sqrt{a}$, bis me per litteras pulsarit; ipseque Frater post suum e Gallia reditum, cum æquationem denuo mihi proponeret, atque simul Problema, ex quo fluxisset, indicaret, sponte fassus sit, se methodo sua, qua BEAUNII Problema aliaque difficiliora solverat, hic nihil efficere potuisse; quod utique satis arguit, rem non semel ipsi antea tentatam fuisse. Calculum suæ constructioni præfigit; ne quis eam, ut inquit, ex mea Mense Junio desumptam existimet; quasi quid esset facilius, quam synthesin meam convertere in analysin, ac perspicere ex illa, quænam lineæ pro indeterminatis sint accipiendæ. Miror autem, cur casu potius quam industria me huc pervenisse scribat; cum initio sui Schediasmatis de sua solutione sic loquatur, ut innuere velle videatur, se filo certæ methodi ad illam perductum fuisse; nisi forte dicere velit, semet arte posse consequi, quod a me non nisi casu invenitur. Qua ipse arte fuerit usus, nolo curiosius inquirere; mihi certe nihil hic casuale, nihil inexpectati accidit; sed hoc ipsum, quod inveni, quærere intendi, certoque consilio, non temere factum est, quod has potius lineas indeterminatas quam alias adhibuerim. Non nego, fortuito mihi natam fuisse occasionem cogitandi primum de Problemate: at si hoc inventum casuale faciat, nihil non casui debebitur, atque, exempli gratia, observatio identitatis Curvæ æquilibrationis cum Cycloide a Fratre facta Mense Februario 1695*, non industriæ alicui, sed casui accepta ferenda est; eo quod; ex fortuito aspectu figurarum D. Marchionis, suspicio cycloidis ipsi oboriri potuit, qualis mihi nata fuit, priusquam Fraternam solutionem legissem. Pergit deinde Frater, ac promittit nobis modum mihi, ut opinabatur, ignotum construendi æquationes differentiales per rectificationes curvarum algebraicarum, quem in eo consistere ait, ut quadratum quantitatis differentialis dividatur in duo alia quadrata, quorum latera, si fieri possit, integrabilia sint; [scilicet hoc omnes norunt, etiamsi non dixisset;] at qui hoc semper & ubique fieri possit, non ostendit; quod tamen vel maxime factum oportuisset, ne lectores meris solutionibus pascerentur, atque etiam existimare possent,

* Vide N°. LXIII. Notam, pag. 626. 627.

poſſent, caſu potius quam induſtria rem hic nobis ſucceſſiſſe. Sicut quoque optandum eſſet, ut vires methodi ſuæ, ſi quam habet, ſeparandi indeterminatas cum ſuis differentialibus a ſe invicem ac conſtituendi per rectificationes, expertus fuiſſet in reſolvenda Iſochrona ſupracentrali, nec non æquatione $xxdx + yydx = aady$, quam ipſe propoſuit Menſe Novembri, pag. 436. Nam modus generalis illa conſtruendi, quem ibidem affert [quique ab illo quem D. LEIBNITIUS jam Menſe Auguſto, pag. 373 * expoſuerat, niſi in ſuperfluis non differt] nullibi quam in ſpeculatione locum habet, cum conſtructiones non verſentur circa quantitatum elementa; & quam primum in praxin transfertur, ceſſat eſſe conſtructio geometrica, & fit mechaniſmus. Sed nec ſeries, alias ſatis ingenioſa, quam nobis dedit, pag. 438 (l), hic in uſum verti poteſt: quod tenendum, ne quis exiſtimet hæc adeo univerſalia eſſe, ut nihil amplius deſiderari poſſit. Quod ſi autem conſtructionibus ſpeculativis, ſaltem earum æquationum, quæ litteras indeterminatas jam ſeparatas habent, acquieſcere velimus, plures aliæ elegantes Theoriæ excogitari poſſunt. Talis eſt conſtructio, quæ fieret per Elaſtra: poſita enim generaliter natura curvæ conſtruendæ $ady = tdx$, ubi t datur per x; dico, ſi qua arte in materiam ea induci poſſit tenſionis lex, ut, dum vires tendentes ſunt ut x, tenſiones ſint ut $a^4dt : (aa + tt)\sqrt{(aa + tt)}\,dx$, fore, ut lamina inde confecta & inflexa curvaturam optatam ſponte ſit acquiſitura (m). Ita determinare licet, qualiter filum aliquod gravari conveniat, ut ab extremitatibus ſuſpenſum deſideratam

* Supra N°. LXIV. pag. 635.

(l) Iſta ſeries hæc eſt $\int ndz = nz - \frac{zzdn}{1.2.dz} + \frac{z^3ddn}{1.2.3.dz^2} \quad \frac{z^4d^3n}{1.2.3.4.dz^3}$ &c. De qua ſerie utiliſſima non ſatis æque ſentire videtur Noſter.

(m) Oſtenſum eſt [N°. LVIII. Not. c, pag. 581], ſi ſint τ tenſiones, quas inducunt laminæ elaſticæ vires tendentes x, curvam elaſticam deſignari per æquationem $dy = Sdx : \sqrt{(a^4 - SS)}$, ubi $S = \int \tau dx$. Comparetur hæc æquatio cum propoſita $dy = tdx : a$, & erit $t : a = S : \sqrt{(a^4 - SS)}$, adeoque $S [= \int \tau dx] = aat : \sqrt{(aa + tt)}$, & differentiando $dS = \tau dx = a^4dt : (aa + tt)\sqrt{(aa + tt)}$, adeoque $\tau = a^4dt : (aa + tt)\sqrt{(aa + tt)}\,dx$.

N.LXVI.

N.LXVI. curvam repræsentet. Verbo, huc referri possunt omnes illi constituendi modi, qui certam aliquam conditionem prærequirunt in materia, qua posita, natura ipsa spontaneo motu quæsitum exhibeat. *

Hæc vero omnia, ne sequius accipiantur, unice in veritatis præsidium hic allata moneo, & ut illi, qui historica inventorum narratione delectantur, sciant quid quantumque singulis tribuendum sit; minime vero ut aliorum reperta vel sugillem & elevem, aut mea contra nimium quantum extollam. Præstat enim hic sentire cum COLUMBO, qui amicis detectionem novi Orbis sibi invidentibus respondisse fertur, non jactando & exaggerando inventi magnitudinem, sed quæstionem de re aliqua frivola ipsis proponendo; qua modeste innuere voluerit, ipsos eidem inveniendo, si advertissent, facile pares esse potuisse, attamen hoc ipsis ante se in mentem non venisse. Imo vero tantum abest, ut existimem nos multum gloriari posse de inventorum difficultate vel subtilitate aliqua, ut persuasus potius sim, [puto, Frater & de suis fatebitur] nos nihil hic præstitisse quod non cuivis mediocri ingenio nostris principiis imbuto pariter in mentem venire potuisset. Quemadmodum enim in Natura nuspiam, ita nec in Scientiis saltus datur, sed omnis nostra cognitio, more quantitatum, crescit per elementa, atque ita pedetentim augetur, ut ab uno ejus gradu ad gradum proxime sequentem non nisi saltus, ut sic dicam, requiratur infinite parvus; ut nemo tam sit hebes, qui si modo ordine incedere velit, ac præcedentia intellexerit, non proprio marte pergere & ad sequentia transire possit. Quin etiam subtilissima sæpe quæ videntur inventa, principia habent tam obvia tamque trivialia, ut non inepte comparari posse videantur cum artificiolis illis Præstigiatorum [*Tours de passe-passe*,] quæ ignari tantopere mirantur; qui vero norunt, contemnunt ac rident. Ratio vero, cur non omnia inveniamus omnes, hæc est, quod tanta rerum multitudo sit, ut iis omnibus animum advertendi nulli sufficiens otium vel occasio

* Vide Num. LXX.

occasio detur; aut etiamsi duo eidem quærendæ rei mentem applicent, fieri plerunque solet, ut diversas vias ineant, naturæ rei non æque accommodas, quas tamen quo ducant initio prævidere non possunt; similes duobus, qui pari quidem sagacitate Terras incognitas lustrant, amboque novis spoliis onusti domum redeunt; sed neuter, quæ alterius tantum Terra tulit, asportare potest. N. LXVI.

VII. *Problema*: Æquationem $ady = ypdx + by^n qdx$ [ubi a & b quantitates datas & constantes; n potestatem quamvis litteræ y; p & q quantitates utcunque datas per x denotant,] construere, saltem per quadraturas; hoc est, separare in illa litteras indeterminatas x & y cum suis differentialibus a se invicem †.

† Vide Num. LXXII.





